

능동 소음 제어를 위한 Filtered-x 최소 평균 네제곱 알고리즘의 수렴분석

Convergence of the Filtered-x Least Mean Fourth Algorithm for Active Noise Control

이 강 승†

Kang Seung Lee

(2002년 3월 20일 접수 : 2002년 7월 16일 심사완료)

Key Words : Active Noise Control(능동소음제어), Adaptive Algorithm(적응알고리즘), Filtered-x Least Mean Fourth(filtered-x 최소평균네제곱), Convergence Behavior(수렴특성)

ABSTRACT

In this paper, we drove the filtered-x least mean fourth (FXLMF) algorithm where the error raised to the power of four is minimized and analyzed its convergence behavior for a multiple sinusoidal acoustic noise and Gaussian measurement noise. The application of the FXLMF adaptive filter to active noise control requires to estimate the transfer characteristics of the acoustic path between the output and the error signal of the adaptive controller. The results of the convergence analysis of the FXLMF algorithm indicate that the effects of the parameter estimation inaccuracy on the convergence behavior of the algorithm are characterized by two distinct components : Phase estimation error and estimated gain. In particular, the convergence is shown to be strongly affected by the accuracy of the phase response estimate. Also, we newly show that the convergence behavior can differ depending on the relative sizes of the Gaussian noise and the convergence constant.

1. 서 론

일반적으로 소음 제어 기법으로 흡음재, 차음재, 그리고 방음벽 등을 사용하는 수동적인 방법이 주를 이루었으나 이 기법은 가청 주파수 대역중 고주파수 영역에서는 효과적인 반면 저주파수 영역에서는 비효율적인 단점을 극복하기 위해 저주파 소음에 대하여 동일한 진폭과 위상이 180° 반전된 2차 인공소음(anti-noise)을 스피커로 발생하여 원래의 소음과 중첩시켜 결과적으로 음압 레벨을 저하시키는 능동 소

음 제어에 관한 연구가 활발히 행해지고 있다.⁽¹⁾

전형적인 적응 능동 제어 시스템은 Fig. 1과 같다. 스피커에서 발생되는 제 2차 인공 소음이 입력 마이크로폰으로 음향 케환되는 현상을 배제하기 위하여 입력 마이크로폰 대신 타코미터(tachometer), 가속도계와 같은 비음향 소자를 사용할 수도 있다. 또한 제어 대상 소음이 주기성을 가질 경우는 이 신호의 기본 주파수를 이용하여 입력신호를 발생할 수도 있다.⁽²⁾ 적응 필터 출력은 에러 마이크로폰의 입력점에서 원래의 소음과 스피커로 출력되는 인공 소음을 합하여 소음을 제어할 목적으로 스피커를 구동시킨다.

지금까지는 적응 알고리즘들 중에서도 구현의 간단성 때문에 최소 평균 제곱 알고리즘^(3,4)이 널리 이용되어 왔다. 그러나 Walach와 Widrow는 최소 평균 네제곱 알고리즘을 적응 플랜트 모델링에 적용하여

† 책임저자, 정희원, 동의대학교 컴퓨터공학과
E-mail : kslee@dongeui.ac.kr
Tel : (051) 890-1711, Fax : (051) 890-1619

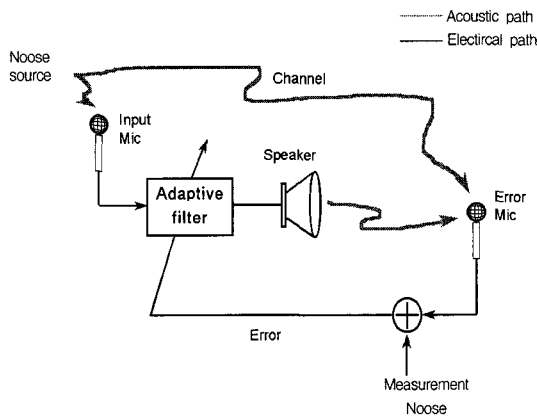


Fig. 1 Adaptive active noise controller configuration

계수 추정 오차 벡터의 평균 및 분산에 대한 수렴특성을 정상상태에서만 해석하였다.^(5, 6) 본 논문은 최소 평균 네제공 알고리즘을 능동 소음 제어 문제에 적용하였다. 그러나 최소 평균 네제공 알고리즘을 Fig. 1의 능동 소음 제어기에 직접 적용하는 것은 적절하지 못하다. 왜냐하면 필터 출력과 오차 신호의 합점(summation point) 사이의 스피커-공기-마이크로폰으로 구성된 2차 음향 경로(secondary acoustic path)는 주파수적으로 민감하여 에러신호의 크기 및 위상을 왜곡시킨다. 결과적으로 에러 경로에서 신호 크기 및 위상 왜곡은 일반적으로 최소 평균 네제공 알고리즘의 성능 저하를 야기시킨다. 그 결과 수렴 속도가 느려지고 잉여 에러(residual error)는 증가되며 조건에 따라 알고리즘이 불안정하게 된다. 이러한 이유로 적응 제어기의 출력과 에러신호 사이의 전달 특성을 추정하여 최소 평균 네제공 알고리즘에 반영한 filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘을 유도하였다.

많은 실제 응용에서 제어 대상 소음은 냉방기, 진공 청소기 등과 같이 회전체 기계류(rotating machines)에 의해서 발생되므로 기본 정현파 신호와 주파수가 정수배인 harmonics의 합으로 모델^(2, 7)할 수 있다. 본 논문은 소음이 다중 정현파 신호로 구성되고 측정 잡음이 가우시안일 때 먼저 filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘을 제안하고, 또한 이 알고리즘의 계수 추정 오차 평균 및 합분산에 대한 수렴특성을 실제 시스템 구축과 부합되는 시간 영역에서 과도기 상태와 정상 상태로 분리하여 이론적으로 분석하였다. 수렴 분석은 알고리즘 성능에 있어서 파라

미터 추정의 부정확으로 인한 효과 및 측정 잡음이 가우시안 확률 밀도 함수를 가질 경우 filtered-x 최소 평균 네제공(FXLMS)⁽⁸⁻¹¹⁾과 filtered-x 최소 평균 네제공(FXLMF) 알고리즘 성능을 비교 평가에 초점을 맞추었다.

2절에서는 기본적인 적응 능동 소음 제어 시스템 모델 설명 및 filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘을 제안하였고, 3절과 4절은 수렴 분석 및 컴퓨터 모의 실험 결과를 각각 나타냈으며 5절에서 결론을 맺었다.

2. 능동소음제어 모델 및 알고리즘

적응 능동 소음 제어 시스템에서 입력 센서인 마이크로폰 대신 타코미터, 가속도계 등 비음향소자를 사용하면 스피커의 출력 신호가 입력 신호로 되돌아오지 않는 비궤환 음향 시스템이고 스피커-공기-마이크로폰의 음향 경로를 선형이라고 가정할 수 있다. 그러므로 Fig. 1의 2차 음향 경로를 합점 이후로 재조정하여 배치하면 Fig. 2와 같은 등가 시스템을 얻을 수 있다. 여기에서 원래의 희망신호에 방사스피커, 공기, 그리고 여러 마이크로폰에 대하여 각각 역할을 취하면 새로운 희망신호는 유도된다.

소음이 M 개의 정현파로 구성되는 다중 신호일 때 입력신호와 희망신호 사이의 경로를 Fig. 3의 상부와 같이 동상(I) 및 직교위상(Q) 계수로 표현할 수 있다. m 번째 정현파 잡음 신호에서 적응 제어기의 구조는 각각의 입력 신호 $x_{I,m}(n)$ 와 $x_{Q,m}(n)$ 에 대하여 두개의 적응 계수 $w_{I,m}(n)$, $w_{Q,m}(n)$ 을 갖는다.

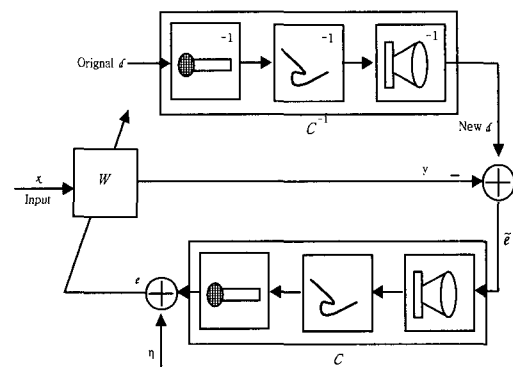


Fig. 2 Rearranged form of the controller under linear system condition

따라서 m 번째 제어기의 출력 $y_m(n)$ 은 식 (1)과 같이 표현할 수 있다.

$$y_m(n) = w_{I,m}(n) x_{I,m}(n) + w_{Q,m}(n) x_{Q,m}(n) \quad (1)$$

여기에서

$$x_{I,m}(n) = A_m \cos(\omega_m n + \phi_m) \triangleq A_m \cos \Psi_m(n),$$

$$x_{Q,m}(n) = A_m \sin(\omega_m n + \phi_m) \triangleq A_m \sin \Psi_m(n),$$

- m : 가지 지수(branchindex) = 1, 2, 3, ..., M ,
- n : 이산(discrete) 시간 지수,
- A : 진폭,
- ω : 정규화 주파수,
- ϕ : 랜덤 위상이다.

또한, Fig. 3의 신호 표시를 참조하면 오차 신호 $e(n)$ 은 식 (2)와 같다.

$$e(n) = \sum_{m=1}^M [c_{I,m} \tilde{e}_{I,m}(n) + c_{Q,m} \tilde{e}_{Q,m}(n)] + \eta(n)$$

$$= - \sum_{m=1}^M A_m [c_{I,m} \cos \Psi_m(n) + c_{Q,m} \sin \Psi_m(n)] (w_{I,m}(n) - w_{I,m}^*)$$

$$- \sum_{m=1}^M A_m [c_{I,m} \sin \Psi_m(n) - c_{Q,m} \cos \Psi_m(n)] (w_{Q,m}(n) - w_{Q,m}^*)$$

$$+ \eta(n) \quad (2)$$

여기에서

$$\tilde{e}_I(n) \triangleq \tilde{e}(n) = \sum_{m=1}^M \{d_m(n) - y_m(n)\},$$

$\tilde{e}_Q(n)$: $\tilde{e}_I(n)$ 가 90° 위상 천이된 신호,

$\eta(n)$: 평균이 0인 가우시안 측정 잡음이다.

$w_{I,m}(n)$ 과 $w_{Q,m}(n)$ 은 $x_{I,m}(n)$ 및 $x_{Q,m}(n)$ 에 비하여 상대적으로 천천히 시변한다고 가정하면 식 (1)로부터 90° 위상 천이된 필터 출력은 식 (3)과 같이 주어진다.

$$y_Q(n) = \sum_{m=1}^M \{w_{I,m}(n) x_{Q,m}(n) - w_{Q,m}(n) x_{I,m}(n)\}$$

$$= \sum_{m=1}^M A_m \{w_{I,m}(n) \sin \Psi_m(n) - w_{Q,m}(n) \cos \Psi_m(n)\} \quad (3)$$

식 (1), (2) 그리고 식 (3)으로부터 기울기 감소

(gradient-descent) 방법(3)을 이용하여 $e^4(n)$ 을 최소화하는 filtered-x 최소 평균 네제곱 계수 갱신 방정식은 식 (4)와 같이 표시된다.

$$w_{I,m}(n+1) = w_{I,m}(n) + 2 \mu_m e^3(n) \cdot \{c_{I,m} x_{I,m}(n) + c_{Q,m} x_{Q,m}(n)\},$$

$$w_{Q,m}(n+1) = w_{Q,m}(n) + 2 \mu_m e^3(n) \cdot \{c_{I,m} x_{Q,m}(n) - c_{Q,m} x_{I,m}(n)\} \quad (4)$$

여기에서 μ_m 은 수렴 상수(convergence constant)이다.

Filtered-x 최소 평균 네제곱 알고리즘을 구현하려면 $c_{I,m}$ 및 $c_{Q,m}$ 을 알아야 한다. 즉, 식 (4)의 $c_{I,m}$ 과 $c_{Q,m}$ 을 각각 추정값 $\hat{c}_{I,m}$ 및 $\hat{c}_{Q,m}$ 으로 대치된다. 다음에는 filtered-x 최소 평균 네제곱 알고리즘의 수렴을 계수 추정 오차의 평균 및 합분산에 대하여 분석하여 고찰한다.

3. 수렴 분석

3.1 계수 추정 오차(weight error)의 평균(크기)

식 (4)와 같이 유도한 적응 알고리즘이 부정확한 $\hat{c}_{I,m}$ 및 $\hat{c}_{Q,m}$ 에 대해 어떻게 동작하는지를 보기 위해 먼저 적응 계수들의 평균값에 대한 수렴 특성을 조사한다. Fig. 3의 신호 모델로부터 $E[w_{I,m}(n)]$ 과 $E[w_{Q,m}(n)]$ 은 수렴하는 조건을 만족하는 경우 정상 상태에 이르면 각각 $w_{I,m}^*$ 와 $w_{Q,m}^*$ 에 도달된다. 따라서 수렴 방정식을 간단히 하기 위해 식 (5)와 같이 계수 추정 오차 $v_{I,m}(n)$ 및 $v_{Q,m}(n)$ 정의한다.

$$v_{I,m}(n) \triangleq w_{I,m}(n) - w_{I,m}^*$$

$$\text{그리고 } v_{Q,m}(n) \triangleq w_{Q,m}(n) - w_{Q,m}^* \quad (5)$$

한편, 식 (2), (5), 그리고 Fig. 3으로부터 식 (6)을 얻는다.

$$\tilde{e}_{I,m}(n) = -v_{I,m}(n) x_{I,m}(n) - v_{Q,m}(n) x_{Q,m}(n),$$

$$\tilde{e}_{Q,m}(n) = -v_{I,m}(n) x_{Q,m}(n) + v_{Q,m}(n) x_{I,m}(n) \quad (6)$$

또한, 식 (5)를 식 (4)에 대입하면 계수 추정 오차 $v_{I,m}(n)$, $v_{Q,m}(n)$ 는 식 (7)과 같이 표현된다.

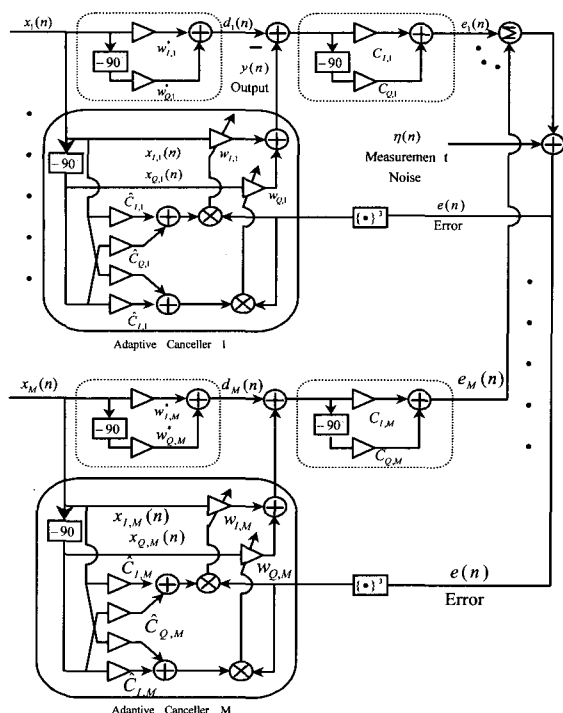


Fig. 3 The diagram of adaptive active noise controller system under study

$$\begin{aligned}
 v_{I,m}(n+1) &= v_{I,m}(n) + 2\mu_m e^3(n) \\
 &\quad \cdot \{ \hat{c}_{I,m} x_{I,m}(n) + \hat{c}_{Q,m} x_{Q,m}(n) \}, \\
 v_{Q,m}(n+1) &= v_{Q,m}(n) + 2\mu_m e^3(n) \\
 &\quad \cdot \{ \hat{c}_{I,m} x_{Q,m}(n) - \hat{c}_{Q,m} x_{I,m}(n) \} \quad (7)
 \end{aligned}$$

마지막으로, 식 (6)과 식 (2)를 식 (7)에 대입하여 정리한 후, 입력 신호 $x_m(n)$, 측정 잡음 $\eta(n)$, 그리고 계수 추정 오차 $v_{I,m}(n)$ 과 $v_{Q,m}(n)$ 사이의 관계가 서로 독립적이라고 가정한 후 양변에 통계적 평균을 취하면 계수 추정 오차 수렴방정식을 유도할 수 있다. 이 유도된 수렴방정식에서 $E[v_{I,m}(n)]$ 과 $E[v_{Q,m}(n)]$ 의 2차 이상의 고차 모멘트항은 1차 모멘트항에 비해 급격히 감쇄하므로 2차 이상 고차 모멘트항을 무시하면 식 (8)과 같은 계수 추정 오차 수렴방정식으로 근사화 된다.

$$\begin{bmatrix} E[v_{I,m}(n+1)] \\ E[v_{Q,m}(n+1)] \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ -\beta_m & \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[v_{I,m}(n)] \\ E[v_{Q,m}(n)] \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기에서

$$\begin{aligned}
 \alpha_m &\triangleq 1 - 3\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta\theta_{c,m}, \\
 \beta_m &\triangleq 3\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \sin \Delta\theta_{c,m} \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

또한, 전달 특성의 이득 및 위상 응답 파라미터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 g_m &\triangleq \sqrt{\hat{c}_{I,m}^2 + \hat{c}_{Q,m}^2}, \\
 \hat{g}_m &\triangleq \sqrt{\hat{c}_{I,m}^2 + \hat{c}_{Q,m}^2}, \\
 \theta_{c,m} &\triangleq \tan^{-1} \left(\frac{\hat{c}_{Q,m}}{\hat{c}_{I,m}} \right), \\
 \hat{\theta}_{c,m} &\triangleq \tan^{-1} \left(\frac{\hat{c}_{Q,m}}{\hat{c}_{I,m}} \right), \\
 \Delta\theta_{c,m} &\triangleq \theta_{c,m} - \hat{\theta}_{c,m}
 \end{aligned}$$

한편 $E[v_{I,m}(n)]$ 과 $E[v_{Q,m}(n)]$ 을 완화(decoupling)된 형태로 만들기 위해서 유사 변환을 이용하면 식 (8)은 다음과 같이 변환된 영역으로 바꾸어 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} E[\check{v}_{I,m}(n+1)] \\ E[\check{v}_{Q,m}(n+1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda_{I,m} & 0 \\ 0 & 1-\lambda_{Q,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[\check{v}_{I,m}(n)] \\ E[\check{v}_{Q,m}(n)] \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기에서

$\lambda_{i,m} = 3\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 [\cos \Delta\theta_{c,m} \pm j \sin \Delta\theta_{c,m}]$, $i = I, Q$ 이다. 식 (9)에서 $\lambda_{i,m}$ 가 복소수 값이므로 변환된 계수 추정 오차도 복소수값이다. 그러므로 복소수인 경우, 실수부와 허수부를 따로 고려하거나 또는 복소수값의 크기와 위상에 대한 수렴성을 고려해야 한다. 따라서 본 논문에서는 변환된 계수 추정 오차의 크기(magnitude of transformed weight error)에 대한 수렴을 생각한다.

$$\zeta_{i,m}(n+1) = |1 - \lambda_{i,m}| \zeta_{i,m}(n), \quad i = I, Q \quad (10)$$

여기에서 $\zeta_{i,m}(n) \triangleq |E[\check{v}_{i,m}(n)]|$ 이다.

식 (10)에서 볼 수 있듯이, 계수 추정 오차의 크기는 식 (11)의 조건하에서 지수적으로 0으로 수렴한다. (결과적으로 계수 추정 오차 위상의 수렴에 관계

없이 $E[w_{I,m}(n)]$ 은 $w_{I,m}^*$ 으로, $E[w_{Q,m}(n)]$ 은 $w_{Q,m}^*$ 으로 수렴한다.)

$$|1 - \lambda_{i,m}| < 1 \quad \forall i,m \quad i = I, Q \quad (11)$$

식 (11)을 제공하여 정리하면 식 (12)의 안정 조건을 얻는다.

$$0 < \mu_m < \frac{2 \cos \Delta \theta_{c,m}}{3A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2} \quad \text{또는} \quad 0 < x_{m,f} < 1 \quad (12)$$

여기에서 $x_{m,f} \triangleq \frac{3\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2}{2 \cos \Delta \theta_{c,m}}$ 으로 정의한다.

식 (12)의 안정 조건은 filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘^(8~11)과 달리 추정 잡음 신호의 분산 σ_η^2 에 영향을 받음을 알 수 있다. 즉, 추정 잡음 신호의 분산이 크면 클수록 안정 조건을 만족한 수렴 상수의 범위는 작아짐을 알 수 있다.

지수적 수렴(exponential convergence)의 시정수 τ 는 충분히 큰 시정수 τ 영역에서 식 (13)과 같이 단순화되어 유도된다.⁽³⁾

$$e^{-1/\tau_{i,m}} \cong 1 - \frac{1}{\tau_{i,m}} = |1 - \lambda_{i,m}|, \quad i = I, Q \quad (13)$$

한편, 식 (10)과 식 (13)으로부터 시정수는 식 (14)와 같이 얻는다.

$$\tau_i = \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 6\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta \theta_{c,m} + 9\mu_m^2 A_m^4 g_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^4}}, \quad i = I, Q$$

$$= \frac{1}{1 - \sqrt{1 - 4x_{m,f}(1 - x_{m,f}) \cos^2 \Delta \theta_{c,m}}} \quad (14)$$

3.2 계수 추정 오차의 합분산(summed variance of weight errors)

식 (2)와 식 (6)을 이용하여 평균 제곱 에러(MSE : mean-square-error) $E[e^2(n)]$ 는 식 (15)와 같이 표현되어, 평균 제곱 에러의 수렴 연구는 제곱 계수 추정 오차의 합(sum of squared weight errors) $\xi_m(n)$ 을 연구하는 것과 직결됨을 인지할 수 있다.

$$E[e^2(n)] = \sum_{m=1}^M e_m^2(n) + \sigma_\eta^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M A_m^2 \xi_m(n) + \sigma_\eta^2 \quad (15)$$

여기에서 $\xi_m(n) \triangleq E[v_{I,m}^2(n)] + E[v_{Q,m}^2(n)]$,

$$\sigma_\eta^2 \triangleq E[\eta^2(n)] \text{이다.}$$

식 (1)과 식 (2)를 식 (5)에 대입하여 제공하여, 입력 신호 $x_m(n)$, 추정 잡음 $\eta(n)$, 그리고 계수 추정 오차 $v_{I,m}(n)$ 과 $v_{Q,m}(n)$ 사이의 관계가 서로 독립적이라고 가정한 후 양변에 통계적 평균을 취하면 두개의 방정식 $E[v_I^2(n+1)]$, $E[v_Q^2(n+1)]$ 을 얻을 수 있다. 상기 두 방정식이 서로 대칭이므로 더한 후 $E[v_{I,m}^2(n+1)] \cong E[v_{Q,m}^2(n+1)]$ 이라고 근사화 하자. 따라서 계수 추정 오차의 2차 모멘트 방정식을 간단하게 하기 위하여 아래 첨자 I, Q 를 제거한 후 정리하면 식 (16)을 얻는다.

$$E[v_m^2(n+1)] = \frac{5}{4} \mu_m^2 A_m^8 g_m^6 \hat{g}_m^2 \{E[v_m^6(n)] + 3E[v_m^2(n)]E[v_m^4(n)]\} - \frac{3}{2} \mu_m A_m^4 g_m^3 \hat{g}_m \cos \Delta \theta_{c,m} \{E[v_m^4(n)] + (E[v_m^2(n)])^2\} + \frac{45}{2} \mu_m^2 A_m^6 g_m^4 \hat{g}_m^2 E[\eta^2(n)] \{E[v_m^4(n)] + (E[v_m^2(n)])^2\} + (1 - 6\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m E[\eta^2(n)]) \cos \Delta \theta_{c,m} + 30\mu_m^2 A_m^4 g_m^2 \hat{g}_m^2 E[\eta^4(n)] E[v_m^2(n)] + 2\mu_m^2 A_m^2 \hat{g}_m^2 E[\eta^6(n)] \quad (16)$$

$\eta(n)$ 은 평균이 0인 가우시안이고, 적응계수 $w_{I,m}(n)$, $w_{Q,m}(n)$ 이 가우시안 랜덤 변수이라고 가정하면 계수 추정 오차 $v_m(n)$ 은 또한 가우시안 랜덤 변수이다. 따라서 식 (16)은 $E[v_m^{2K}(n)]$ 을 $E[v_m^2(n)]$ 항으로 표현하여 간략화 시킬 수 있다. 여기에서 K 는 양의 정수이다. $E[v_m(n)]$ 은 비록 급격히 감소하지만 처음부터 0이 아니므로 평균이 0인 가우시안 랜덤 변수 $\Delta w_m(n)$ 과 이것의 분산을 식 (17)과 같이 도입한다.

$$\Delta w_m(n) \triangleq v_m(n) - V_m(n),$$

$$E[v_m^2(n)] = V_m^2(n) + \rho_m^2(n) \quad (17)$$

여기에서 $V_m(n) \triangleq E[v_m(n)]$ 이고

$$\rho_m^2(n) \triangleq E[\Delta^2 w_m(n)] \text{이다.}$$

식 (17)로 부터 $E[v_m^2(n)]$ 는 처음부터 정상 상태에 도달 이전까지 즉, 과도기 상태에서는 $\rho_m^2(n)$ 은 $V_m^2(n)$ 보다 상대적으로 매우 작아 무시되므로 $V_m^2(n)$ 만 고려되고, 정상 상태에서는 반대로 $V_m^2(n)$ 이 $\rho_m^2(n)$ 보다 상대적으로 매우 작아 무시되므로 $\rho_m^2(n)$ 만 고려됨을 알 수 있다. 한편, 식 (17)을 식 (16)에 대입하여 가우시안 랜덤 변수의 $E[v_m^{2K}(n)]$ 과 $E[v_m^2(n)]$ 사이의 관계(12)를 이용하면 식 (18)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & V_m^2(n+1) + \rho_m^2(n+1) \\
 &= 5\mu_m^2 A_m^8 \hat{g}_m^6 \hat{g}_m^2 \{V_m^6(n) + 9\rho_m^2(n) V_m^4(n) \\
 &+ 18\rho_m^4(n) V_m^2(n) + 6\rho_m^6(n)\} \\
 &- (3\mu_m A_m^4 \hat{g}_m^3 \hat{g}_m \cos \Delta\theta_{c,m} - 45\mu_m^2 A_m^6 \hat{g}_m^4 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^2) \\
 &\cdot \{V_m^4(n) + 4\rho_m^2(n) V_m^2(n) + 2\rho_m^4(n)\} \\
 &+ (1 - 6\mu_m A_m^2 \hat{g}_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta\theta_{c,m} + 90\mu_m^2 A_m^4 \hat{g}_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^4) \\
 &\cdot \{V_m^2(n) + \rho_m^2(n)\} + 30\mu_m^2 A_m^2 \hat{g}_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^6 \quad (18)
 \end{aligned}$$

(1) 과도기 상태 수렴분석

수렴 방정식 식 (18)은 두가지 경우에 대하여 연구할 수 있다. 먼저 과도기 상태에서는 $\rho_m^{2K}(n)$ 과 식 (18)의 마지막 항은 무시할 수 있다. 그러므로 식 (19)와 같은 과도기 수렴 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & V_m^2(n+1) \cong 5\mu_m^2 A_m^8 \hat{g}_m^6 \hat{g}_m^2 V_m^6(n) \\
 &- (3\mu_m A_m^4 \hat{g}_m^3 \hat{g}_m \cos \Delta\theta_{c,m} - 45\mu_m^2 A_m^6 \hat{g}_m^4 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^2) V_m^4(n) \\
 &+ (1 - 6\mu_m A_m^2 \hat{g}_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta\theta_{c,m} + 90\mu_m^2 A_m^4 \hat{g}_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^4) V_m^2(n) \quad (19)
 \end{aligned}$$

식 (19)의 우변은 극단적인 경우에 있어서 $V_m^6(n)$ 항 또는 $V_m^2(n)$ 항중 어느 한 항이 지배적이다. 이 두항 값이 같을 때, 이 때의 $V_m^2(n)$ 값을 $V_{m,th}^2$ 한다면 $V_{m,th}^2$ 는 식 (20)과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{m,th}^2 = \sqrt{\frac{1 - 6\mu_m A_m^2 \hat{g}_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta\theta_{c,m} + 90\mu_m^2 A_m^4 \hat{g}_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^4}{5\mu_m^2 A_m^8 \hat{g}_m^6 \hat{g}_m^2}} \quad (20)$$

식 (20)에서 특기할 사항은 $V_{m,th}^2$ 는 $\Delta\theta_{c,m}$ 에 거의

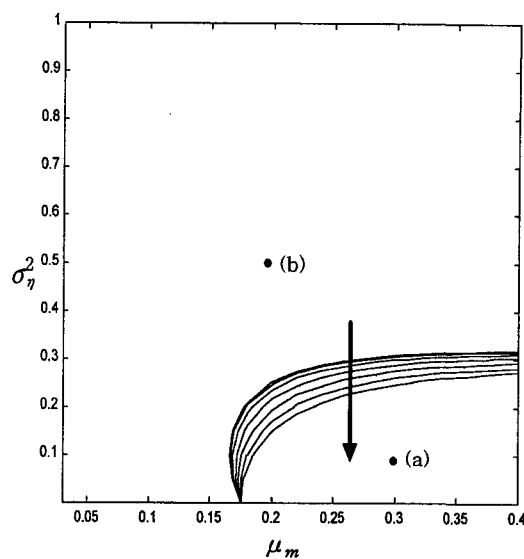


Fig. 4 Dominant term decision diagram for filtered-x LMF algorithm of the summed variance of weight errors at the transient-state. [point (a) : $\mu_m=0.3$ and $\sigma_\eta^2=0.1$. point (b) : $\mu_m=0.2$ and $\sigma_\eta^2=0.5$]

영향을 받지 않는다. 그리고 식 (19)는 $V_m^2(n)$ 이 $V_{m,th}^2$ 보다 클 때는 처음 $V_m^6(n)$ 항이 지배적으로 작용하며, $V_{m,th}^2$ 보다 작을 때는 마지막 $V_m^2(n)$ 항이 지배적으로 작용한다. Fig. 4는 일례로 $V_{m,th}^2=0.8$ 일 때 처음 $V_m^6(n)$ 항과 마지막 $V_m^2(n)$ 항 중 어느 항이 지배적인가를 보기위해 수렴 상수 μ_m 과 측정 잡음의 분산 σ_η^2 을 영역으로 하여 나타냈다. 점 (a)는 처음 $V_m^6(n)$ 항이, 그리고 점 (b)는 마지막 $V_m^2(n)$ 항이 지배적으로 작용하는 영역이다. 그러므로 과도기 수렴 방정식 식 (19)는 식 (21)과 같이 고려될 수 있다.

$$V_m^2(n+1) \cong \begin{cases} 5\mu_m^2 A_m^8 \hat{g}_m^6 \hat{g}_m^2 V_m^6(n) \\ , V_m^2(n) \gg V_{m,th}^2 \quad (21a) \\ (1 - 6\mu_m A_m^2 \hat{g}_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta\theta_{c,m} \\ + 90\mu_m^2 A_m^4 \hat{g}_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^4) V_m^2(n) \\ , V_m^2(n) \ll V_{m,th}^2. \quad (21b) \end{cases}$$

한편, 식 (21)로부터 안정 조건 및 시정수를 구할 수 있다. 식 (21a)는 수열의 일반항 형태로 나타내면 식 (22)와 같다.

$$V_m^2(n) = \{5\mu_m^2 A_m^8 g_m^6 \hat{g}_m^2\}^{(3^*-1)/2} \{V_m^2(0)\}^{3^*}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}\mu_m A_m^4 g_m^3 \hat{g}_m} \{\sqrt{5}\mu_m A_m^4 g_m^3 \hat{g}_m V_m^2(0)\}^{3^*} \quad (22)$$

따라서 식 (22)는 식 (23)의 조건하에서 안정된다.

$$|\sqrt{5}\mu_m A_m^4 g_m^3 \hat{g}_m V_m^2(0)| < 1,$$

$$0 < \mu_m < \frac{1}{\sqrt{5} A_m^4 g_m^3 \hat{g}_m V_m^2(0)} \quad (23)$$

식 (23)의 안정 조건에서 특기할 사항으로 수렴상수는 입력 신호의 크기, 2차 음향 경로의 이득 및 추정 이득뿐만 아니라 계수 추정 오차의 초기값에 의해 제한됨을 알 수 있다.

또한, 식 (21b)는 식 (24)를 만족하면 안정된다.

$$|1 - 6\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \cos \Delta \theta_{c,m} + 90\mu_m^2 A_m^4 g_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^2| < 1$$

$$0 < \mu_m < \frac{\cos \Delta \theta_{c,m}}{15 A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2} \text{ 또는 } 0 < x_{m,s} < 1 \quad (24)$$

여기에서 $x_{m,s} \triangleq \frac{15\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2}{\cos \Delta \theta_{c,m}}$ 로 정의한다.

식 (13)과 식 (21b)로부터 시정수는 식 (25)와 같이 얻는다.

$$\tau_{m,s} = \frac{1}{6\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \{\cos \Delta \theta_{c,m} - 15\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2\}}$$

$$= \frac{5}{2x_{m,s} \cos^2 \Delta \theta_{c,m} (1 - x_{m,s})} \quad (25)$$

(2) 정상 상태 수렴분석

수렴 방정식 식 (18)은 정상 상태에서는 $V_m^2(n)$ 는 아주 작아지고 $\rho_m^4(n)$ 과 $\rho_m^6(n)$ 을 포함하는 항은 매우 작아 무시할 수 있으므로 식 (26)과 같이 근사화된다.

$$\rho_m^2(n+1) \cong (1 - 6\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2 \cos \Delta \theta_{c,m} + 90\mu_m^2 A_m^4 g_m^2 \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^4) \cdot \rho_m^2(n) + 30\mu_m^2 A_m^2 g_m \hat{g}_m^2 \sigma_\eta^6 \quad (26)$$

또한, 계수 추정 오차 합분산의 정상상태 $\xi_m(\infty)$ 는 $2\rho_m(\infty)$ 이므로 식 (27)과 같이 얻을 수 있다.

$$\xi_m(\infty) = 2\rho_m(\infty)$$

$$= \frac{10\mu_m \hat{g}_m \sigma_\eta^4}{g_m \{\cos \Delta \theta_{c,m} - 15\mu_m A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2\}}$$

$$= \frac{2\sigma_\eta^2 x_{m,s}}{3A_m^2 g_m^2 (1 - x_{m,s})} \quad (27)$$

(3) FXLMF 및 FXLMS 알고리즘간 성능 비교

적용 알고리즘간의 성능 비교 평가 방법에는 통상 두가지 방법이 주로 이용되는데 첫번째는 알고리즘의 정상 상태의 값을 동일하게 놓은 후 수렴 속도를 비교 평가하는 방법과 나머지 한 방법은 알고리즘의 수렴 속도(통상적으로 시정수를 도입)를 동일하게 놓은 후 정상상태의 값을 비교하는 평가 방법이 사용된다. 다음은 filtered-x 최소 평균 제곱(FXLMS) 및 filtered-x 최소 평균 네제곱(FXLMF) 알고리즘을 이론적으로 성능을 비교, 평가한다.

참고문헌 (8)의 식 (18)과 같이 FXLMS 알고리즘의 계수 추정 오차 합분산은 등비 수열로 시정수를 정의할 수 있는 반면 FXLMF 알고리즘의 합분산 식 (18)은 등비 수열이 아님으로 시정수를 정의할 수 없다. 따라서 두 적용 알고리즘의 정상 상태 값을 동일하게 놓은 후 수렴 속도를 비교 평가한다. 식 (27) 및 참고문헌 (8)의 식 (22)로부터 식 (28)과 같은 관계식을 얻는다.

$$\frac{10\mu_{m(FXLMF)} \hat{g}_m \sigma_\eta^4}{g_m \{\cos \Delta \theta_{c,m} - 15\mu_{m(FXLMF)} A_m^2 g_m \hat{g}_m \sigma_\eta^2\}}$$

$$= \frac{\mu_{m(FXLS)} \hat{g}_m \sigma_\eta^2}{g_m \{\cos \Delta \theta_{c,m} - \frac{1}{16} \mu_{m(FXLS)} A_m^2 g_m \hat{g}_m (9 - \cos 2\Delta \theta_{c,m})\}} \quad (28)$$

여기에서 $\mu_{m(FXLMF)}$ 와 $\mu_{m(FXLS)}$ 은 각각 FXLMF 및 FXLMS 알고리즘의 수렴 상수이다.

수렴 방정식의 안정조건을 만족시키는 수렴상수값 $\mu_{m(FXLMF)}$, $\mu_{m(FXLS)}$ 를 갖을때 식 (28)의 양변 분모의 괄호안항 중 각각 두번째항은 첫번째항에 비하여 상대적으로 무시할 정도로 값이 작으므로 식 (29)와 같이 표현할 수 있다.

$$\mu_{m(FXLMF)} = \frac{\mu_{m(FXLS)}}{10\sigma_\eta^2} \quad (29)$$

4. 모의 실험 결과

본 절은 3절의 filtered-x 최소 평균 제곱 알고리즘에 대한 이론 분석에 덧붙여서 컴퓨터 모의 실험 결과를 나타냈다.

두개의 정현파로 구성된 다중 정현파인 경우를 생각한다. 첫번째, 두번째 정현파 신호의 주파수는 각각 120 Hz, 240 Hz 이고 표본화 주파수는 2 kHz 로 선택하였고 입력 신호 $x(n)$ 및 회망 신호 $d(n)$ 은 식 (30)과 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \sum_{m=1}^2 A_m \cos(\omega_m n + \phi_m) \\
 &= \sqrt{2} \left\{ \cos\left(\frac{240 \pi n}{2000} + \phi_1\right) + \cos\left(\frac{480 \pi n}{2000} + \phi_2\right) \right\}, \\
 d(n) &= \sum_{m=1}^2 \{ w_{I,m}^* x_{I,m} + w_{Q,m}^* x_{Q,m} \} \\
 &= 0.6x_{I,1}(n) - 0.1x_{Q,1}(n) + 0.3x_{I,2}(n) - 0.3x_{Q,2}(n)
 \end{aligned} \tag{30}$$

2차 음향 경로의 전달 특성이 $g_1 = g_2 = 1$, $\theta_{c,1} = -45^\circ$ 그리고 $\theta_{c,2} = 45^\circ$ 로 모델되고, 측정 잡음 신호의 분산 σ_v^2 이 1 및 0.001 일때 모의 실험을 하였다. 또한 초기 적응 웨이트 값은 모두 0으로 하였다. 컴퓨터 모의 실험 결과 앙상블 평균은 1,000 번씩 독립적으로 실행하여 얻었다.

$\mu_m = 0.2$, $\sigma_v^2 = 0.001$, 그리고 $|\Delta\theta_{c,m}|$ 가 15° 일 때 FXLMF 알고리즘에 대한 계수 추정 오차 합분산의 수렴 곡선을 모의실험을 통해 얻은 결과를 Fig. 5에 나타냈다. 3.2절에서 분석한 바와 같이 과도기 상태에서는 $V^2(n)$ 이 지배적이며 정상 상태에서는 $\rho^2(n)$ 이 지배적임을 알수 있었다.

Fig. 6은 위상 추정 오차 $|\Delta\theta_{c,m}|$ 가 (1) 0° , (2) 45° , (3) 60° , (4) 75° 일 때 계수 추정 오차의 합분산에 대한 모의 실험을 통해 얻은 수렴 곡선이다. 정상 상태 값을 동일하게 놓고 서로 다른 위상 추정 오차 $|\Delta\theta_{c,m}|$ 에 따라 수렴 속도를 비교한 결과 위상 추정 오차 $|\Delta\theta_{c,m}|$ 가 크면 클수록 수렴 속도는 늦어졌다. 또한, 정상 상태에 도달한 계수 추정 오차 합분산은 위상 추정 오차 $|\Delta\theta_{c,m}|$ 에 대하여 거의 영향을 받지 않았다.

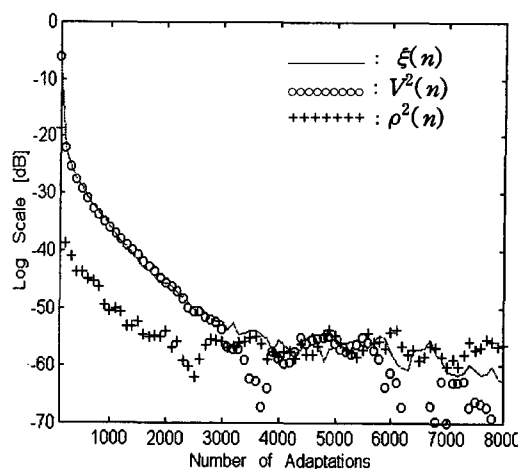


Fig. 5 Learning curves for filtered-x LMF algorithm of the summed variance of weight errors when the convergence behaviors are divided between $V^2(n)$ and $\rho^2(n)$ [$\mu_m = 0.2$, $\sigma_v^2 = 0.001$, and $|\Delta\theta_{c,m}| = 15^\circ$]

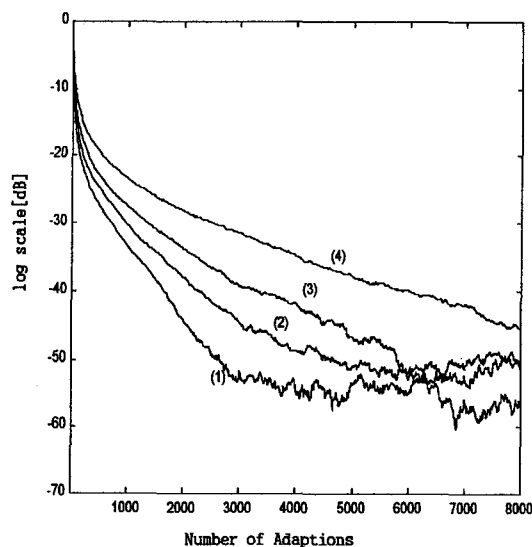


Fig. 6 Learning curves for filtered-x LMF algorithm of the summed variance of the weight errors. ($\mu_m = 0.2$, $\sigma_v^2 = 0.001$.)
 (1) $|\Delta\theta_{c,m}| = 0^\circ$, (2) $|\Delta\theta_{c,m}| = 45^\circ$,
 (3) $|\Delta\theta_{c,m}| = 60^\circ$, (4) $|\Delta\theta_{c,m}| = 75^\circ$

FXLMF 및 FXLMS 알고리즘의 수렴 특성에 대해 모의 실험을 통해 비교 평가했다. 두 알고리즘의 정상 상태 값을 동일하게 놓은 후 수렴 속도를 비교

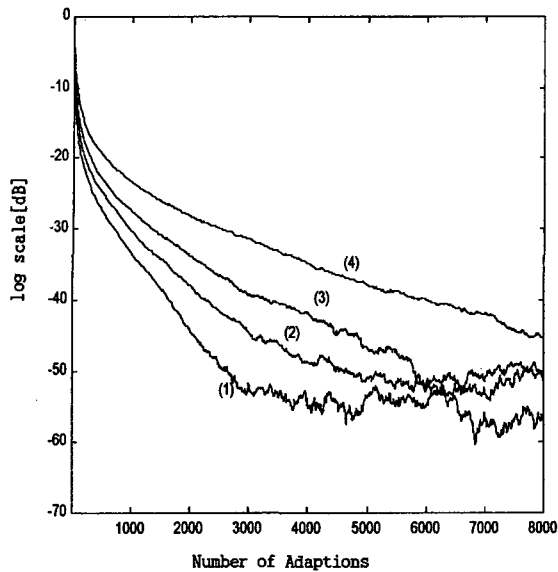


Fig. 7 Comparison of the FXLMS and FXLMF algorithm learning curves of the summed variance of weight errors

- (a) $\mu_m(FXLMS) = 0.002$, $\mu_m(FXLMF) = 0.2$, $\sigma_\eta^2 = 0.001$, $|\Delta\theta_{c,m}| = 45^\circ$ and $V_{ih}^2 = 0.558$.
 (b) $\mu_m(FXLMS) = 0.002$, $\mu_m(FXLMF) = 0.0002$, $\sigma_\eta^2 = 1$, $|\Delta\theta_{c,m}| = 45^\circ$ and $V_{ih}^2 = 558$

하였다. 즉 주어진 측정신호의 분산에 대하여 식 (29)를 만족하는 FXLMS 및 FXLMF 알고리즘의 수렴 상수를 선택하였다. 구체적으로 σ_η^2 이 각각 0.001 및 1이고 $\mu_m(FXLMS)$ 가 0.002 일 때 두 알고리즘의 정상 상태 값이 같도록 $\mu_m(FXLMF)$ 를 각각 0.2와 0.0002 로 선택하였다.

Fig. 7은 위의 파라미터와 위상 추정 오차 $|\Delta\theta_{c,m}|$ 가 45° 일 때 모의 실험을 통해 얻은 FXLMF 및 FXLMS의 계수 추정 오차 합분산의 수렴 특성 곡선을 비교하여 나타냈다. Fig. 7의 수렴곡선 (a)처럼 V_{ih}^2 가 1보다 충분히 작을 경우는 FXLMF 알고리즘의 초기 수렴은 FXLMS 알고리즘에 비해 매우 빨랐으며 곧이어 FXLMS 처럼 대수 눈금(logarithm scale)상에서 거의 선형적으로 수렴한 반면, Fig. 7의 수렴곡선 (b)처럼 V_{ih}^2 가 매우 클 경우는 FXLMF 알고리즘은 FXLMS 보다 약간 느리면서 선형적으로 수렴했다.

5. 결 론

Filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘의 수렴 특성에 대한 파라미터 추정 부정확으로 인한 효과는 뚜렷이 대별되는 두가지 성분, 즉 위상 추정 오차 및 추정 이득에 의해 특징지어 졌다. 특히, 알고리즘을 안정시키기 위한 수렴 상수값의 범위는 입력 신호의 크기, 위상 추정 오차, 추정 이득, 측정 잡음의 분산뿐만 아니라 계수 추정 오차의 초기값에 따라 제한됨을 새롭게 알 수 있었다. 또한, filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘의 과도기 수렴 특성은 가우시안 측정 잡음의 분산과 수렴 상수의 크기에 따라 다음 두가지 경우로 특징지어졌다 : (1) filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘의 초기 수렴은 filtered-x 최소 평균 제공처럼 대수 눈금상에서 거의 선형적으로 수렴한다. 또는 (2) filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘의 수렴은 filtered-x 최소 평균 제공보다 약간 느리면서 선형적으로 수렴한다. 결론적으로 filtered-x 최소 평균 네제공 알고리즘의 수렴은 위상 응답 추정의 정확도에 많은 영향을 받을 뿐만 아니라 가우시안 측정 잡음의 분산과 수렴 상수의 크기에 따라 서로 다른 수렴 형태를 보였다.

참 고 문 헌

- (1) Elliott, S. J. and Nelson, P. A., 1990, "The Active Control of Sound," Jour. Electronics and Communication Eng., pp. 127~136.
- (2) Ross, C. F., 1978, "Elements of the Active Control of Transformer Noise," Jour. Sound and Vibration, Vol. 61, No. 4, pp. 473~480.
- (3) Widrow, B. and Stearns, S. D., 1985, Adaptive Signal Processing : Prentice-Hall.
- (4) Duttweiler, D., 2001, "Avoiding Slow Band-edge Convergence in Subband Echo Cancelers," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 49, No. 3, pp. 593~603.
- (5) Walach, E. and Widrow, B., 1984, "The Least Mean Fourth (LMF) Adaptive Algorithm and Its Family," IEEE Trans. on Information

- Theory, Vol. 30, No. 2, pp. 275~283.
- (6) Zerguine, A. and Aboulnasr, T., 2000, "Convergence Behavior of the Normalized Least Mean Fourth Algorithm," 2000 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. I, pp. 279~282.
- (7) Elliott, S. J., Nelson, P. A., Stothers, I. M., et al., 1990, "In-flight Experiments on the Active Control of Propeller-induced Cabin Noise," Jour. Sound and Vibration, Vol. 140, pp. 219~238.
- (8) Lee, K. S., Lee, J. C. and Youn, D. H., 1994, "On the Convergence Behavior of the Filtered-x LMS Active Noise Canceler," IEEE International Workshop on Intelligent Signal Processing and Communication Systems.
- (9) Wang, A. and Ren, W., 1999, "Convergence Analysis of the Multi-variable Filtered-x LMS Algorithm with Application to Active Noise Control," IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 47, No. 4, pp. 1166~1169.
- (10) Kuo, S., Taherzadeh, M. and Hao, W., 1999, "Convergence Analysis of Narrow-band Active Noise Control System," IEEE Trans. on Circuits and Systems-II, Vol. 46, No. 2, pp. 220~223.
- (11) 이강승, 2002, "다중 정현파의 능동 소음 제어를 위한 Filtered-x 최소 평균 제곱 적응 알고리즘 수렴 연구." 한국소음진동공학회논문집(심사중), 2002.
- (12) Bendat, J. S., 1990, Nonlinear System Analysis and Identification from Random Data :Jhon Wiley & Sons.