디폴트 베이즈인자를 이용한 포아송 평균모수에 대한 다중검정

김 경 숙 · 손 영 숙
전남대학교 통계학과

A Multiple Test of a Poisson Mean Parameter Using Default Bayes Factors

Kyungsook Kim · Young Sook Son
Department of Statistics, Chonnam National University

Keywords : noninformative prior, default Bayes factor, intrinsic Bayes factor(IBF), fractional Bayes factor(FBF), posterior probability, Poisson model, miltiple test

Abstract

A multiple test of a mean parameter, λ, in the Poisson model is considered using the Bayes factor. Under noninformative improper priors, the intrinsic Bayes factor(IBF) of Berger and Pericchi(1996) and the fractional Bayes factor(FBF) of O'Hagan(1995) called as the default or automatic Bayes factors are used to select one among three models, $M_1 : \lambda < \lambda_0$, $M_2 : \lambda = \lambda_0$, $M_3 : \lambda > \lambda_0$. Posterior probability of each competitive model is computed using the default Bayes factors. Finally, theoretical results are applied to simulated data and real data.

1. 서론

품질관리에서 많이 다루어지는 자료의 예로서 일정 시간 동안 발견되는 불량품의 수, 일정 길이 당 절사의 수, 일정 면적 당 흠의 수 등과 같이 주어진 시간, 길이, 면적, 공간 등의 구간에서 발생하는 사건의 발생건수로 표현되는 계수형 자료들은 전형적으로 포아송(Poisson) 분포를 따른다.

확률변수 X를 단위 시간당 발생하는 사건수라 하고, 단위 시간당 평균 사건 발생수를 λ라고 하면, 확률변수 X의 확률분포는 다음과 같다.

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0, 1, \ldots,\ \lambda > 0.$$

이 때 모수 λ에 대한 가설검정으로써 다음과 같이 I개의 모형으로 정의된 다중검정을 고려해 보자.

$$M_i : X \sim f(x|\lambda_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, I, \qquad (1)$$

여기서 $\lambda_i \in \Lambda_i$ 이고 $\Lambda_i \subset \Lambda = \{\lambda | \lambda > 0\}$ 이다.

다중검정 문제를 해결하기 위해 고전적인 방법으로 접근하는 것은 쉽지 않다. 그 예로써 모수 λ를 모수공간에 포함된 임의의 상수 λ_0에 비교하여 $\lambda < \lambda_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\lambda > \lambda_0$ 가운데 어느 것이 옳은지를 다중검정 하는 문제를 생각해 보자. 가장 흔히 접근되는 방법은 먼저 양측검정($H_0 : \lambda = \lambda_0$, $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$)을 실시하여 귀무가설 H_0가 기각되면, 다음으로 단측검정($H_1 : \lambda < \lambda_0$ 또는 $H_1 : \lambda > \lambda_0$)을 시행하는 것이다. 또는 대안적인 방법으로써 H_0가 기각되면 모수에 대한 신뢰구간을 제시한다. 그러나 이러한 방법은 엄격한 의미의 표본이론에 있어서는 문제점을 안고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 고전적 접근방법의 측면에서 연구가 계속 진행되고 있지만 이는 상당히 까다로운 과제이다「Berger와 Mortera, 1999」.

한편, 베이지안 접근방법은 검정하고자 하는 두 개 이상의 모든 모형을 동시에 설정하여 검정할 수 있다. 또한 고전적인 방법에서는 정해진 유의수준에 따라 가설을 채택하거나 기각하는데 그치지만, 베이지안 방법은 각 모형에 대한 사후확률(posterior probability)을 계산함으로써 모형의 지지 정도를 수량화 할 수 있는 장점이 있다. 즉, 베이즈인자(Bayes factor)라는 측정도구를 이용하여 모형의 사전확률을 가중치로 적용함으로써 각 모형 M_i에 대한 사후확률을 계산할 수 있으며, 이 가운데 가장 큰 확률을 갖는 모형을 선택하는 방법이다. 이러한 이유로 베이지안 방법에서는 가설검정이라는 용어보다는 베이지안 모형선택 또는 베이지안 모형비교라는 표현을 더 선호한다.

본 논문에서는 포아송 모형의 평균 모수인 λ에 대한 다중검정, 즉, $M_1 : \lambda < \lambda_0$, $M_2 : \lambda = \lambda_0$, $M_3 : \lambda > \lambda_0$, 을 위하여 베이지안 방법을 사용하고자 한다. 이에 관련된 선행연구를 살펴보면, Son과 Kim(2000)에 의해 하나의 포아송 모집단의 평균 모수인 λ에 대한 가설 $H_0 : \lambda = \lambda_0$, $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$ 및 두 모집단의 평균 모수인 λ_1, λ_2의 동일성에 대한 가설 $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$, $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$을 검정하는 방법이 연구되었고, Cho 외(2001)에 의해 K개의 포아송 모집단의 평균 모수인 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_I$에 대한 다중 가설 $M_1 : \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_I$, $M_2 : \lambda_1 \neq \lambda_2 = \ldots = \lambda_I, \ldots, M_K : \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_I$를 검정하는 방법이 연구되었다.

본 논문의 2장에서는 무정보 사전분포(noninformative prior distribution)의 가정하에 디폴트 베이즈인자(default Bayes factor)를 이용하여 다중검정 하는 방법에 대해 소개하였고, 3장에서는 이러한 방법론을 적용하여 포아송 모형의 평균 모수에 대해 다중검정 하는 방법을 제시하였다. 모형의 사전분포로는 무정보 사전분포를 가정하고, 디폴트 베이즈인자로는 내재적 베이즈인자(intrinsic Bayes factor: IBF)인 AIBF, MIBF, GIBF와 부분 베이즈인자(fractional Bayes factor: FBF)를 이용하여 각 모형의 사후확률을 계산하였다. 마지막으로 4장에서는 모의실험자료와 실제자료에 적용한 결과

가 이론에 부합되는지를 검토하였다.

2. 디폴트 베이즈인자를 이용한 다중검정

I개의 모형인 식 (1)의 가설검정(모형선택)을 위해 베이지안 통계에서 이용되는 가장 기본적인 도구는 베이즈인자이다. $\boldsymbol{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$의 관측값 $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$이 주어졌을 때, 임의의 모형 M_i에 대한 M_j의 베이즈인자 B_{ji}는 다음과 같이 정의된다.

$$B_{ji}(\boldsymbol{x}) = \frac{m_j(\boldsymbol{x})}{m_i(\boldsymbol{x})}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, I, \ i \neq j,$$

여기서 $m_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\lambda \in \Lambda_i} \pi_i(\lambda)\, L(\lambda|\boldsymbol{x})\, d\lambda$ 이고, $\pi_i(\lambda)$는 모형 M_i하에서 모수 λ에 대해 가정된 사전분포이며, $L(\lambda|\boldsymbol{x}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k|\lambda)$는 우도함수(likelihood function)를 나타낸다. 또한 $m_i(\boldsymbol{x})$는 모형 M_i하에서 표본 $\boldsymbol{x}$에 대한 주변확률밀도함수(marginal density), 또는 예측확률밀도함수(predictive density)라고도 불린다. 정의된 식의 의미를 살펴보면, 모형 M_i에 속하는 표본들에 대한 모형 M_j에 속하는 표본들의 오즈(odds)로써 해석할 수 있으며, 또한 각 모형에 대해 모수의 사전분포를 가중치로 적용하여 표본에 대한 확률을 가중평균 낸 후, 두 모형의 비(ratio)를 산출한 것으로 볼 수 있다.

보통 모수에 대한 특별한 사전정보가 없는 실험의 초기에는 모수 λ의 사전분포로서 무정보 사전분포를 가정한다. 그러나 무정보 분포는 확률분포의 성질을 만족시키지 못하는 부적절 분포(improper distri- bution)에 해당하는 경우가 많이 있다. 무정보 부적절 사전분포를 $\pi_i^N(\lambda)$라고 표시할 때, 베이즈인자 $B_{ji}^N(\boldsymbol{x})$는

$$B_{ji}^N(\boldsymbol{x}) = \frac{m_j^N(\boldsymbol{x})}{m_i^N(\boldsymbol{x})}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, I, \ i \neq j, \tag{2}$$

여기서 $m_i^N(\boldsymbol{x}) = \int_{\lambda \in \Lambda_i} \pi_i^N(\lambda) L(\lambda|\boldsymbol{x})\, d\lambda$, 로 정의되며, N은 부적절 사전분포를 사용함을 나타낸다. 위의 식은 부적절 사전분포를 사용하기 때문에 임의의 상수항 c_j / c_i을 내포하고 있어서 베이즈인자를 정확히 계산하기 어렵다. 이러한 문제는 Spiegelhalter와 Smith(1982)가 제안한 가상의 상수(imaginary constant)를 이용한 가상적 트레이닝 표본법(imaginary training sample method : ITSM), 부적절 사전분포를 적절 사후분포로 전환시키기 위해 제안된 Berger와 Pericchi(1996)의 IBF, O'Hagan(1995)의 FBF 등을 이용하여 해결할 수 있다. 이 가운데 IBF와 FBF는 ITSM에 비해 훨씬 사용하기 편한 방법으로서, 자료만 주어지면 아무런 사전적인 고려 없이 자동적으로 계산되는 '자동적(automatic)' 혹은 '디폴트(d- efault)' 베이즈인자로 알려져 있다「Berger와 Mortera, 1999」.

첫째, Berger와 Pericchi(1996)의 IBF인 $B_{ji}^N(l)$은 l번째의 최소 트레이닝 표본

(minimal training sample)인 $\boldsymbol{x}(l)$ 을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$B_{ji}^{N}(l) = \frac{\int_{\lambda\in\Lambda_j}\pi_j^N(\lambda|\boldsymbol{x}(l))f(\boldsymbol{x}(-l)|\lambda,\boldsymbol{x}(l))d\lambda}{\int_{\lambda\in\Lambda_i}\pi_i^N(\lambda|\boldsymbol{x}(l))f(\boldsymbol{x}(-l)|\lambda,\boldsymbol{x}(l))d\lambda}$$

$$= B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})\cdot B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}(l)), \qquad (3)$$

여기서 $B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}(l)) = m_i^N(\boldsymbol{x}(l))/m_j^N(\boldsymbol{x}(l))$, $m_i^N(\boldsymbol{x}(l)) = \int_{\lambda\in\Lambda_i}\pi_i^N(\lambda)L(\lambda|\boldsymbol{x}(l))d\lambda$을 의미한다. 식 (3)을 살펴보면, 우변의 첫째항 $B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})$에 내포된 상수항 c_j/c_i과 둘째 항 $B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}(l))$에 내포된 상수항 c_i/c_j은 곱하여 상쇄되므로, 내재적 베이즈인자 $B_{ji}^{N}(l)$는 최소 트레이닝 표본 $\boldsymbol{x}(l)$과 전체 표본 $\boldsymbol{x}$를 이용하여 명확하게 정의된다. 여기서 최소 트레이닝 표본이란 모든 모형 M_i $(i=1,2,\ldots,I)$에 대해 $0 < m_i^N(\boldsymbol{x}(l)) < \infty$의 조건이 성립되는 모든 가능한 표본들 가운데 최소 크기의 표본들을 말한다.

그러나, 위에서 정의된 내재적 베이즈인자는 단 하나의 최소 트레이닝 표본인 $\boldsymbol{x}(l)$만을 이용하기 때문에, 여전히 추출된 표본에 의해 영향을 받는다는 문제가 남아있다.

이를 해결하기 위한 방법으로 IBF의 표본 산술평균(AIBF), 표본 중앙값(MIBF), 표본 기하평균(GIBF)을 이용하는 방법을 고려할 수 있으며, 이는 다음과 같이 정의된다.

$$B_{ji}^{AI} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}B_{ji}^{N}(l)$$

$$= B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})\cdot\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}B_{ij}(\boldsymbol{x}(l)),$$

$$B_{ji}^{MI} = \underset{1\le l\le L}{Median}\, B_{ji}^{N}(l)$$
$$= B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})\cdot\underset{1\le l\le L}{Median}\, B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}(l)),$$

$$B_{ji}^{GI} = \left(\prod_{l=1}^{L}B_{ji}(l)\right)^{1/L}$$
$$= B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})\cdot\left(\prod_{l=1}^{L}B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}(l))\right)^{1/L},$$

여기서 $\boldsymbol{x}(l)$은 l번째 최소 트레이닝 표본을 의미하고, L은 전체 표본에서 총 가능한 최소 트레이닝 표본 수를 의미한다. 그러나 이러한 내재적 베이즈인자는 전체 표본공간 내의 단위 표본들을 재사용 한다는 한계점이 있다.

둘째, O'Hagan(1995)의 FBF인 B_{ji}^{F}는 최소 트레이닝 표본들을 직접 이용하는 대신에 최소 트레이닝 표본의 크기만을 우도함수에 적용하는 방법으로써 다음과 같이 정의된다.

$$B_{ji}^{F} = B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})\cdot B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}|b), \qquad (4)$$

여기서 $B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}|b) = m_i^N(\boldsymbol{x}|b)/m_j^N(\boldsymbol{x}|b)$, $m_i^N(\boldsymbol{x}|b) = \int_{\lambda\in\Lambda_i}\pi_i^N(\lambda)L^b(\lambda|\boldsymbol{x})\,d\lambda$ 이고, 상수 $b\,(0<b\le 1)$는 보통 간단히 최소 트레이닝 표본크기 m과 전체 표본크기 n을 이용하여 $b=m/n$로 정의된 값을 사용한다. 또 다른 방식으로 정의된 b에 대해서는 O'Hagan(1995)을 참고한다.

식 (4)를 살펴보면 IBF에서와 유사하게 우변의 첫째 항 $B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x})$에 포함된 상수항 c_j/c_i와 둘째 항 $B_{ij}^{N}(\boldsymbol{x}(l))$에 포함된 상

수항 c_i / c_j은 곱하여 상쇄되므로 FBF 또한 명확하게 정의된다.

모형 M_i에 대한 사후확률은 앞에서 정의된 베이즈인자들을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$P(M_i|\boldsymbol{x}) = \left\{ \sum_{j=1}^{I} \frac{p_j}{p_i} B_{ji} \right\}^{-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, I, \tag{5}$$

여기서 p_i는 각 모형에 대한 사전확률(prior probability)을 의미하며, 일반적으로 모수 λ에 대한 사전정보가 거의 없는 경우에는 동일한 값을 부여한다. 최종적으로 각 모형에 대한 사후확률을 계산하여 이 가운데 가장 높은 확률을 갖는 모형을 선택함으로써 다중검정의 결론을 얻는다.

3. 포아송 평균 모수에 대한 베이지안 다중검정

포아송 분포를 따르는 하나의 모집단에서 평균 모수인 λ에 대해 다음과 같은 다중검정 문제를 고려해 보자.

$$\begin{cases} M_1 : \lambda < \lambda_0, \\ M_2 : \lambda = \lambda_0, \\ M_3 : \lambda > \lambda_0, \end{cases}$$

여기서, λ_0 ($0 < \lambda_0 < \infty$)는 임의의 상수이다.

모수 λ에 대한 사전분포로서 무정보 부적절 확률분포는 일반적으로 다음과 같다「Yang과 Berger, 1997」.

$$\pi^N(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}, \quad \lambda > 0.$$

이를 각 모형에 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{cases} M_1 : \pi_1^N(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}, & \lambda < \lambda_0, \\ M_2 : \pi_2^N(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}, & \lambda = \lambda_0, \\ M_3 : \pi_3^N(\lambda) \propto \lambda^{-1/2}, & \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

또한, 확률표본이 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$으로 관측되었을 때 각 모형의 우도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$L(\lambda \mid \boldsymbol{x}) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k! \right)^{-1} \cdot e^{-n\lambda} \lambda^{\Sigma x_k}.$$

앞에서 정의된 사전분포와 우도함수를 이용하여 각 모형 M_i하에서 $m_i^N(\boldsymbol{x}|b)$를 다음과 같이 정의할 수 있으며,

$$\begin{cases} m_1^N(\boldsymbol{x}|b) = \int_0^{\lambda_0} \pi_i^N(\lambda) L^b(\lambda|\boldsymbol{x}) \, d\lambda, \\ m_2^N(\boldsymbol{x}|b) = \pi_i^N(\lambda_0) L^b(\lambda_0|\boldsymbol{x}), \\ m_3^N(\boldsymbol{x}|b) = \int_{\lambda_0}^{\infty} \pi_i^N(\lambda) L^b(\lambda|\boldsymbol{x}) \, d\lambda, \end{cases}$$

이를 계산한 결과는 각각 다음과 같다.

$$\begin{cases} m_1^N(\boldsymbol{x}|b) = A \cdot B \cdot F_\Gamma(\lambda_0 : 0.5 + b\Sigma x_k, 1/nb), \\ m_2^N(\boldsymbol{x}|b) = A \cdot e^{-nb\lambda_0} \cdot \lambda_0^{-0.5 + b\Sigma x_k}, \\ m_3^N(\boldsymbol{x}|b) = A \cdot B \cdot [1 - F_\Gamma(\lambda_0 : 0.5 + b\Sigma x_k, 1/nb)], \end{cases} \tag{6}$$

여기서 $A = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k! \right)^{-b}$이고, $B = \Gamma(0.5+$

$b\sum x_k) \cdot (nb)^{-(0.5+b\sum x_k)}$ 이다. $F_\Gamma(\cdot)$는 감마 분포의 누적분포함수를 의미하며, 확률변수 G가 형태모수 α와 척도모수 β를 갖는 감마분포를 갖는다고 할 때, $F_\Gamma(g:\alpha,\beta) = P(G \le g)$로 정의된다. 여기서 최소 트레이닝 표본의 크기는 $m=1$이므로 최소 트레이닝 표본은 $x(l) = \{x_l\}$, $l=1,2,\ldots,n$이며, 가능한 총 가짓수는 $L=n$이다.

식 (6)의 $m_i^N(\boldsymbol{x}|b)$에 전체 표본 $\boldsymbol{x}$ 대신 $\boldsymbol{x}(l)$, 상수 b 대신 1, 표본크기 n 대신 1, x_k 대신 x_l을 대입하여 다음과 같이 $m_i^N(\boldsymbol{x}(l))$을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} m_1^N(\boldsymbol{x}(l)) = x_l^{-1} \cdot \Gamma(0.5+x_l) \\ \qquad\qquad \cdot F_\Gamma(\lambda_0 : 0.5+x_l, 1), \\ m_2^N(\boldsymbol{x}(l)) = x_l^{-1} \cdot e^{-\lambda_0} \cdot \lambda_0^{-0.5+x_l}, \\ m_3^N(\boldsymbol{x}(l)) = x_l^{-1} \cdot \Gamma(0.5+x_l) \\ \qquad\qquad \cdot [1-F_\Gamma(\lambda_0 : 0.5+x_l, 1)]. \end{cases} \tag{7}$$

식 (6)과 (7)을 이용하여 베이즈인자 $B_{ji}^N(l)$를 구하면 다음과 같다.

$$B_{ji}^N(l) = B_{ji}^N(\boldsymbol{x}|b=1) \cdot B_{ij}^N(\boldsymbol{x}(l)) = \frac{m_j^N(\boldsymbol{x}|b=1)}{m_i^N(\boldsymbol{x}|b=1)} \cdot \frac{m_i^N(\boldsymbol{x}(l))}{m_j^N(\boldsymbol{x}(l))}.$$

그런데, 여기서 한가지 주목해야 할 점이 있다. 본 논문에서 가정된 모형들은 모수의 영역들이 서로 포함되는 부분이 없는 비내포된 모형들(nonnested models)이다. 이러한 비내포된 모형들로 설정된 검정에 있어서 AIBF는 다음과 같은 문제를 발생시킨다. 첫째, $B_{ji}^N(l)$과 $1/B_{ij}^N(l)$은 정의에 의해 직관적으로 일치되어야 하는데 이러한 관계가 성립되지 않는다는 점과 둘째, 최소 트레이닝 표본들을 이용한 베이즈인자들의 평균인

$$\overline{B_{ij}^N}(\boldsymbol{x}(l)) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} B_{ij}(\boldsymbol{x}(l))$$

이 매우 안정적(stable)이지 못하며, 실제로 그것의 기대값이 유한하지 않는(infinite) 심각한 문제가 발생한다.

이를 해결하는 한가지 방법은 비내포된 모형들을 모두 포함하는 포괄적 모형(encompassing model)을 고려하는 것이다「Berger와 Pericchi, 1996」. 이러한 포괄적 모형을 M_0라고 한다면,

$$M_0 : 0 < \lambda < \infty$$

로 나타낼 수 있다. 모형 M_0의 전체 표본 $\boldsymbol{x}$에 대한 $m_0^N(\boldsymbol{x}|b)$와 최소 트레이닝 표본 $\boldsymbol{x}(l)$에 대한 $m_0^N(\boldsymbol{x}(l))$를 계산하면 다음과 같다.

$$m_0^N(\boldsymbol{x}|b) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k!\right)^{-b} \cdot \Gamma(0.5+b\Sigma x_k) \cdot (nb)^{-(0.5+b\Sigma x_k)},$$

$$m_0^N(\boldsymbol{x}(l)) = (1/x_l) \cdot \Gamma(0.5+x_l).$$

포괄적 모형을 고려한 베이즈인자는

$$B_{ji}^0 = B_{0i}^N / B_{0j}^N$$

와 같이 정의되며, 여기서 B_{0i}^N과 B_{0j}^N은 식 (2)의 정의를 따르는 베이즈인자들이다. 이를 이용하여 AIBF를 재정의 하면 다음과 같고,

$$B_{ji}^{0AI} = B_{0i}^{AI} / B_{0j}^{AI} = B_{ji}^{N}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\overline{B_{i0}^{N}(\boldsymbol{x}(l))}}{\overline{B_{j0}^{N}(\boldsymbol{x}(l))}},$$

이는 $B_{ji}^{0AI} = 1 / B_{ij}^{0AI}$가 성립된다.

마지막으로, 앞 장에서 정의된 식 (5)를 이용하여 각 모형의 사후확률을 계산하며, 이 가운데 가장 큰 확률을 갖는 모형을 선택하여 다중검정의 결론을 얻을 수 있다.

4. 모의실험자료 및 실제자료 분석

4.1. 모의실험자료 분석

포아송 모형의 평균 모수인 λ에 대한 검정문제에 있어서 고전적인 방법은 평균 모수인 λ가 5 이하일 때와 5 이상일 때 다소 다른 방식을 적용한다. 그러므로 베이지안 방법을 이용하는 본 모의실험에서도 이러한 점을 고려하여 평균 모수인 λ를 검정하기 위해 임의의 상수 λ_0가 1 인 경우와 10 인 경우를 각각 고려해 본다.

먼저, 임의의 상수 λ_0가 1 인 경우에 대해, 평균 모수인 λ 값이 0.1, 0.5, 0.7, 1.0, 1.5, 2.0, 3.0 인 포아송분포를 따르는 모의실험자료를 생성하였다. 이때 표본크기는 30 과 100 으로 하고, 각각에 대해 300 번씩 반복(iteration)하여 시행하였다. 또한 임의의 상수 λ_0가 10 인 경우에 대해서는 평균 모수인 λ 값은 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 으로 설정하고, 표본크기와 반복횟수는 앞에서와 동일하게 설정하여 모의실험자료를 생성하였다. 평균 모수(λ), 임의의 상수(λ_0), 표본크기(n), 반복횟수를 조합한 모든 경우에 대해 AIBF, MIBF, GIBF, 그리고 FBF를 이용하여 각 모형의 사후확률을 계산하였다.

반복 시행하여 얻은 각 모형에 대한 사후확률의 평균과 표준편차(괄호 안에 제시)를 〈표 1〉과 〈표 2〉에 제시하였다. 먼저, 임의의 상수 λ_0가 1 일 때의 결과인 〈표 1〉를 살펴보면, 표본크기가 30, 100인 두 경우 모두에서 모의실험 결과는 이론에 부합됨을 보였다. 특히, 표본크기 100 인 경우에는 이론에 부합하는 모형에 대한 사후확률의 평균은 커지고, 표준편차는 작아짐으로써 이론에 보다 더 부합된 결과를 보였다. 또한, 베이즈인자들의 검정 능력을 비교해 보면 하나의 값($\lambda_0 = 1$)에 대해 검정하는 정확한 모형인 M_2 모형일 때를 제외하고는 FBF가 AIBF, MIBF 보다 더 좋은 결과를 보였다. 임의의 상수 λ_0가 10 일 때의 결과인 〈표 2〉에서도 〈표 1〉과 매우 유사한 경향을 보였다.

4.2. 실제자료 분석

포아송 모형을 따르는 두 개의 실제 자료를 이용하여 베이지안 다중검정을 시행하였다.

첫째, 샘플 100 개당 결점이 있는 베어링의 수를 측정한 자료로써, Montgomery (1996, p304)에서 인용하였다. 자료의 수(n)는 20개이고, 평균의 최우추정치($\hat{\lambda}$)가 5.85인 포아송 분포를 따르는 것으로 추정되었다. 추정된 평균 모수인 $\hat{\lambda} = 5.85$를 중

〈표 1〉 평균 모수 λ인 포아송분포를 갖는 모의실험 자료에 대한 $M_1: \lambda < 1$, $M_2: \lambda = 1$, $M_3: \lambda > 1$ 의 다중검정 결과 (반복시행 300회)

λ λ_0	참 모형	베이즈 인자	n = 30 $P(M_1)$	n = 30 $P(M_2)$	n = 30 $P(M_3)$	n = 100 $P(M_1)$	n = 100 $P(M_2)$	n = 100 $P(M_3)$
0.5 〈 1.0	M1	AIBF	0.8689 * (0.1925)	0.1234 (0.1796)	0.0077 (0.0133)	0.9992 * (0.0051)	0.0007 (0.0050)	0.0000 (0.0001)
		MIBF	0.8381 * (0.2059)	0.1499 (0.1902)	0.0120 (0.0172)	0.9988 * (0.0087)	0.0012 (0.0084)	0.0000 (0.0003)
		GIBF	0.8755 * (0.1840)	0.1159 (0.1696)	0.0086 (0.0146)	0.9993 * (0.0045)	0.0007 (0.0043)	0.0000 (0.0001)
		FBF	0.8940 * (0.1642)	0.0981 (0.1503)	0.0078 (0.0141)	0.9995 * (0.0034)	0.0005 (0.0033)	0.0000 (0.0001)
0.7 〈 1.0	M1	AIBF	0.5194 * (0.2959)	0.4438 (0.2672)	0.0368 (0.0335)	0.8489 * (0.2294)	0.1467 (0.2217	0.0044 (0.0081)
		MIBF	0.4894 * (0.2831)	0.4710 (0.2571)	0.0396 (0.0342)	0.8468 * (0.2243)	0.1496 (0.2185	0.0036 (0.0063)
		GIBF	0.5396 * (0.2871)	0.4194 (0.2550)	0.0411 (0.0367)	0.8599 * (0.2177)	0.1353 (0.2091	0.0048 (0.0090)
		FBF	0.5855 * (0.2739)	0.3741 (0.2397)	0.0404 (0.0388)	0.8799 * (0.1971)	0.1155 (0.1884	0.0045 (0.0090)
1.0 = 1.0	M2	AIBF	0.1536 (0.1513)	0.6953 * (0.1480)	0.1511 (0.1484)	0.1020 (0.1198)	0.7918 * (0.1407)	0.1062 (0.1332)
		MIBF	0.1552 (0.1471)	0.7050 * (0.1496)	0.1398 (0.1497)	0.1101 (0.1259)	0.7953 * (0.1440)	0.0947 (0.1320)
		GIBF	(0.1739 (0.1541	0.6659 * (0.1425)	0.1602 (0.1476)	0.1179 (0.1272)	0.7684 * (0.1418)	0.1138 (0.1354)
		FBF	0.2097 (0.1668	0.6220 * (0.1426)	0.1683 (0.1546)	0.1452 (0.1421)	0.7333 * (0.1473)	0.1215 (0.1419)
1.5 〉 1.0	M3	AIBF	0.0170 (0.0225)	0.2669 (0.2569)	0.7161 * (0.2771)	0.0006 (0.0022)	0.0255 (0.0894)	0.9739 * (0.0916)
		MIBF	0.0174 (0.0232)	0.2691 (0.2606)	0.7134 * (0.2810)	0.0006 (0.0022)	0.0261 (0.0929)	0.9733 * (0.0952)
		GIBF	0.0222 (0.0277)	0.2602 (0.2465)	0.7176 * (0.2720)	0.0008 (0.0028)	0.0245 (0.0854)	0.9748 * (0.0882)
		FBF	0.0274 (0.0352)	0.2395 (0.2332)	0.7331 * (0.2657)	0.0009 (0.0035)	0.0222 (0.0787)	0.9769 * (0.0822)
2.0 〉 1.0	M3	AIBF	0.0006 (0.0030)	0.0138 (0.0620)	0.9856 * (0.0650)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 * (0.0000)
		MIBF	0.0009 (0.0042)	0.0146 (0.0653)	0.9845 * (0.0692)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 * (0.0000)
		GIBF	0.0009 (0.0042)	0.0138 (0.0607)	0.9854 * (0.0649)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 * (0.0000)
		FBF	0.0011 (0.0053)	0.0120 (0.0542)	0.9869 * (0.0594)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	1.0000 * (0.0000)

* : 자료로부터 지지되는 모형임.

〈표 2〉 평균 모수 λ인 포아송분포를 갖는 모의실험 자료에 대한 $M_1: \lambda < 10$, $M_2: \lambda = 10$, $M_3: \lambda > 10$ 의 다중검정 결과 (반복시행 300회)

λ λ_0	참 모형	베이즈 인자	n = 30 $P(M_1)$	$P(M_2)$	$P(M_3)$	n = 100 $P(M_1)$	$P(M_2)$	$P(M_3)$
8 〈 10	M1	AIBF	0.9239 * (0.1624)	0.0719 (0.1518)	0.0042 (0.0109)	0.9998 * (0.0024)	0.0002 (0.0023)	0.0000 (0.0000)
		MIBF	0.9254 * (0.1596)	0.0695 (0.1472)	0.0051 (0.0126)	0.9998 * (0.0021)	0.0002 (0.0020)	0.0000 (0.0000)
		GIBF	0.9214 * (0.1622)	0.0732 (0.1495)	0.0054 (0.0129)	0.9998 * (0.0023)	0.0002 (0.0022)	0.0000 (0.0001)
		FBF	0.9337 * (0.1468)	0.0611 (0.1338)	0.0051 (0.0132)	0.9999 * (0.0017)	0.0001 (0.0017)	0.0000 (0.0000)
9 〈 10	M1	AIBF	0.5167 * (0.2933)	0.4488 (0.2667)	0.0345 (0.0300)	0.8311 * (0.2221)	0.1644 (0.2150)	0.0045 (0.0074)
		MIBF	0.5259 * (0.2880)	0.4346 (0.2586)	0.0395 (0.0331)	0.8384 * (0.2161)	0.1562 (0.2075)	0.0054 (0.0091)
		GIBF	0.5196 * (0.2873)	0.4390 (0.2563)	0.0414 (0.0343)	0.8359 * (0.2163)	0.1587 (0.2080)	0.0054 (0.0087)
		FBF	0.5637 * (0.2790)	0.3934 (0.2443)	0.0430 (0.0380)	0.8587 * (0.1973)	0.1360 (0.1883)	0.0054 (0.0093)
10 = 10	M2	AIBF	0.1506 (0.1476)	0.6887 * (0.1518)	0.1607 (0.1621)	0.0981 (0.1089)	0.8079 * (0.1110)	0.0940 (0.0987)
		MIBF	0.1605 (0.1509)	0.6681 * (0.1510)	0.1713 (0.1644)	0.1083 (0.1136)	0.7888 * (0.1129)	0.1030 (0.1039)
		GIBF	0.1610 (0.1452)	0.6671 * (0.1447)	0.1719 (0.1604)	0.1075 (0.1117)	0.7886 * (0.1111)	0.1039 (0.1021)
		FBF	0.1866 (0.1581)	0.6262 * (0.1455)	0.1871 (0.1695)	0.1286 (0.1243)	0.7550 * (0.1168)	0.1164 (0.1106)
11 〉 10	M3	AIBF	0.0352 (0.0329)	0.4524 (0.2644)	0.5123 * (0.2924)	0.0051 (0.0081)	0.1854 (0.2323)	0.8094 * (0.2400)
		MIBF	0.0399 (0.0364)	0.4388 (0.2578)	0.5213 * (0.2886)	0.0060 (0.0093)	0.1769 (0.2238)	0.8171 * (0.2327)
		GIBF	0.0422 (0.0365)	0.4401 (0.2534)	0.5177 * (0.2856)	0.0062 (0.0095)	0.1782 (0.2244)	0.8157 * (0.2335)
		FBF	0.0486 (0.0439)	0.4054 (0.2441)	0.5459 * (0.2832)	0.0070 (0.0114)	0.1611 (0.2103)	0.8320 * (0.2212)
12 〉 10	M3	AIBF	0.0066 (0.0134)	0.1139 (0.1908)	0.8794 * (0.2038)	0.0000 (0.0002)	0.0009 (0.0098)	0.9991 * (0.0100)
		MIBF	0.0079 (0.0154)	0.1097 (0.1832)	0.8824 * (0.1981)	0.0000 (0.0002)	0.0007 (0.0082)	0.9992 * (0.0084)
		GIBF	0.0085 (0.0163)	0.1140 (0.1867)	0.8775 * (0.2026)	0.0000 (0.0003)	0.0008 (0.0096)	0.9991 * (0.0098)
		FBF	0.0093 (0.0185)	0.1011 (0.1723)	0.8896 * (0.1906)	0.0000 (0.0003)	0.0007 (0.0082)	0.9993 * (0.0085)

* : 자료로부터 지지되는 모형임.

〈표 3〉 추정된 평균 모수 $\hat{\lambda}=5.85$인 포아송 분포 자료에 대한 $M_1:\lambda<\lambda_0$, $M_2:\lambda=\lambda_0$, $M_3:\lambda>\lambda_0$의 다중검정 결과

λ λ_0	추정 모형	베이즈 인자	$P(M_1)$	$P(M_2)$	$P(M_3)$
5.85 〉 3.85	M3	AIBF	0.0000	0.0009	0.9991 *
		MIBF	0.0000	0.0013	0.9987 *
		GIBF	0.0001	0.0014	0.9985 *
		FBF	0.0001	0.0008	0.9992 *
5.85 〉 4.85	M3	AIBF	0.0190	0.4092	0.5718 *
		MIBF	0.0254	0.3799	0.5946 *
		GIBF	0.0260	0.4329	0.5411 *
		FBF	0.0357	0.3236	0.6407 *
5.85 = 5.85	M2	AIBF	0.0963	0.7979 *	0.1058
		MIBF	0.1128	0.7566 *	0.1306
		GIBF	0.0925	0.7881 *	0.1194
		FBF	0.1623	0.6890 *	0.1487
5.85 〈 6.85	M1	AIBF	0.4610	0.5085 *	0.0304
		MIBF	0.4633	0.4951 *	0.0416
		GIBF	0.3851	0.5687 *	0.0463
		FBF	0.5723 *	0.3864	0.0413
5.85 〈 7.85	M1	AIBF	0.9771 *	0.0220	0.0009
		MIBF	0.9753 *	0.0231	0.0016
		GIBF	0.9600 *	0.0375	0.0024
		FBF	0.9825 *	0.0162	0.0013

* : 자료로부터 지지되는 모형임. 출처 : Montgomery(1996), $n=20$.

심으로 임의의 상수 λ_0값을 설정하여 다중검정 한 결과를 〈표 3〉 에 제시하였다.

〈표 3〉 을 살펴보면 대부분의 결과가 이론에 부합하였다. 이 가운데 임의의 상수 $\lambda_0=6.85$ 경우에서 FBF를 제외한 IBF들은 잘못된 결론을 내었지만, 이는 모수에 대한 추정오차에 기인한 것으로 해석할 수 있다. 베이즈인자들의 검정능력을 비교해 보면, 하나의 값($\lambda_0=5.85$)에 대해 검정하는 정확한 모형인 M_2모형일 때를 제외하고는 FBF가 AIBF, MIBF, GIBF에 비해 더 좋은 결과를 보였다. 또한, FBF는 다중검정이 시행된 각 경우에서 모두 옳은 결론을 제시하였다.

둘째, 전화선 1,000m당 결점의 수를 측정한 자료로써, Montgomery(1996, p310)에서 인용하였다. 자료의 수(n)는 22개이고, 평균의 최우추정치($\hat{\lambda}$)가 8.59인 포아송 분포를 따르는 것으로 추정되었다. 추정된 평균 모수인 $\hat{\lambda}=8.59$를 중심으로 임의의 상수 λ_0를 설정하여 다중검정 한 결과를 〈표 4〉 에 제시하였다. 이를 살펴보면, 임의의 상수 λ_0가 7. 59, 9.59인 경우에 F BF를 제외한 IBF들은 잘못된 결론을 내었지만, 이는 모수에 대한 추정오차에 기인한 것으로 해석할 수 있다. 베이즈인자들의 검정능력은 위

〈표 4〉 추정된 평균 모수 $\hat{\lambda}=8.59$인 포아송 분포 자료에 대한 $M_1: \lambda < \lambda_0$, $M_2: \lambda = \lambda_0$, $M_3: \lambda > \lambda_0$의 다중검정 결과

$\hat{\lambda}$ λ_0	추정 모형	베이즈 인자	$P(M_1)$	$P(M_2)$	$P(M_3)$
8.59 〉 6.59	M3	AIBF	0.0003	0.0132	0.9865 *
		MIBF	0.0004	0.0178	0.9818 *
		GIBF	0.0010	0.0316	0.9674 *
		FBF	0.0009	0.0109	0.9883 *
8.59 〉 7.59	M3	AIBF	0.0207	0.5573 *	0.4220
		MIBF	0.0205	0.5761 *	0.4034
		GIBF	0.0251	0.6654 *	0.3095
		FBF	0.0486	0.4391	0.5123 *
8.59 = 8.59	M2	AIBF	0.0710	0.8357 *	0.0933
		MIBF	0.0567	0.8467 *	0.0965
		GIBF	0.0576	0.8601 *	0.0823
		FBF	0.1554	0.6998 *	0.1448
8.59 〈 9.59	M1	AIBF	0.2982	0.6689 *	0.0329
		MIBF	0.2352	0.7202 *	0.0446
		GIBF	0.2056	0.7522 *	0.0422
		FBF	0.4809 *	0.4689	0.0502
8.59 〈 10.59	M1	AIBF	0.9088 *	0.0885	0.0028
		MIBF	0.8658 *	0.1281	0.0061
		GIBF	0.8232 *	0.1690	0.0078
		FBF	0.9502 *	0.0461	0.0037

* : 자료로부터 지지되는 모형임. 출처 : Montgomery(1996), $n=22$.

의 〈표 3〉에서 살펴본 것과 유사하였다.

5. 결 론

본 논문은 베이지안 다중검정 방법에 대해 살펴보고, 이를 포아송 모형의 평균 모수의 다중검정에 적용하였다. 고전적인 접근방법과 비교할 때, 베이지안 방법은 다중 모형을 동시에 설정하여 검정한다는 점과 검정 결과를 각 모형의 확률로써 설명할 수 있다는 장점이 있다.

가정된 다중 모형이 비내포된 모형(nonnested model)이므로, 포괄적 모형(encompassing model)을 고려하여 베이즈인자를 재정의함으로써 디폴트 베이즈인자인 AIBF, MIBF, GIBF, FBF를 이용하였다. 이론적인 결과를 검토하기 위해 모의실험자료 및 실제 자료에 적용하였다. 두 개의 실제 자료 분석에서 FBF는 실험한 모형 모두에서 옳은 결론을 내린 것을 볼 수 있었으며, 계산과정 또한 IBF 보다는 FBF가 훨씬 쉽다고 생각된다.

단지 두 개의 모형을 검정하는 경우에는, 고전적인 방법으로 검정력 함수(power function)를 이용하여 계산한 검정력(power)과 베이지안 방법으로 모의실험을 하여 구한 검정력을 비교할 수 있다. 그러나, 셋 이상의 모형에 대한 다중검정은 동시에 여러 모형을 검정하기 때문에 검정력을 계산하기

가 쉽지 않으므로, 그 대안으로써 각 모형에 대해 반복 시행하여 구한 사후확률의 분포를 비교하였다.

향후 연구과제로는 본 논문에서 다루지 않은 여러 다른 확률모형에 대해서도 이와 같은 다중검정을 적용해 볼 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Berger, J. O. and Mortera, J.(1999), "Default Bayes Factors for Non-Nested Hypothesis Testing", *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 94, No. 446. pp.542-554.

[2] Berger, J. O. and Pericchi, L. R.(1996) , "The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction", *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 91, No. 433, pp.109-122.

[3] Berger, J. O. and Pericchi, L. R.(1998), "Accurate and Stable Bayesian Model Selection: The Median Intrinsic Bayes Factor", *Sankhya,* B, Vol. 60, pp. 1-18.

[4] Cho, J. S., Kim, D. H., and Kang, S. G.(2001), "Semiparametric Bayesian Multiple Comparisons for Poisson Populations", *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 8, No. 2, pp.427-434.

[5] Montgomery, D. C.(1996), *Introduction to Statistical Quality Control*, third edition, John Wiley & Sons.

[6] O'Hagan, A.(1995), "Fractional Bayes Factors for Model Comparison", *Journal of the Royal Statistical Society,* B, Vol. 57, No. 1, pp.99-138.

[7] Son, Y. S. and Kim, S. W.(2000), "Default Bayes Factors for Testing the Equality of Poisson Population Means", *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 7, No. 2, pp.549-562.

[8] Spiegelhalter, D. J. and Smith, A.F.M. (1982), "Bayes Factorsfor Linear and Log-linear Models with Vague Prior Information", *Journal of the Royal Statistical Society,* B, Vol. 57, No. 1, pp.99-138.

[9] Yang, R. and Berger, J. O.(1997), "A Catalog of Noninformative Priors", *ISDS Discussion Paper, J.*, pp.97-142.