

## 덮개 함수를 이용한 강건 최적설계의 제한 조건 단일화

이정준\* · 정도현\*\* · 이병채†

(2002년 2월 27일 접수, 2002년 5월 10일 심사완료)

### Unification of Constraints for Robust Optimization Using an Envelope Function

Jeong Joon Lee, Do Hyun Jung and Byung Chai Lee

**Key Words :** Robust Design(강건 설계) , Probability Constraint(확률 제한조건), Envelope Function (덮개 함수)

#### Abstract

Design variables and design parameters are rarely deterministic in practice. Robust optimal design takes into consideration of the uncertainties in the design variables and parameters. Robust optimization methodology with probability constraints requires a lot of system analyses for calculating failure probability of each constraint. By introducing an envelope function to reduce the number of constraints, efficiency of robust optimization techniques can be considerably improved. Through four illustrative examples, it is shown that the number of system analyses is greatly decreased while little differences in the optimum results are observed.

#### 1. 서론

전통적인 최적설계에서는 부재의 치수나 형상과 같은 설계변수와 시스템에 작용하는 하중, 재료 물성치 등과 같은 시스템 파라미터의 불확실성을 안전율(safety factor)을 이용해 간접적으로 고려해 왔는데, 최근 활발하게 연구되는 강건 최적설계에서는 이러한 불확실성을 직접적으로 고려하여 최적화하고 있다. 강건 최적설계에서 의미하는 강건성은 목적함수에 대한 것과 제한조건에 대한 것으로 나눌 수 있다. 목적함수의 강건성은 주어진 변동에 대해 목적함수의 최적치 변동이 작은 것을 의미하고, 제한조건의 강건성은 주어진 변동에 대해 제한조건이 항상 가용한 영역에 있게 하는 성질이다. 따라서, 제한조건의 강건성은 기존의 신뢰도 설계에서 안전지수를 통해 제한조건의 만족성을 조절함으로써 보장할 수 있다.

강건 최적설계 방법은 크게 실험 계획적 방법, 민감도 이용 방법, 확률 제한조건 이용 방법 등 세가지로 분류할 수 있다.<sup>(1)</sup> 실험 계획적 방법은 다구찌 방법과 반응 표면 방법 등이 있는데, 다구찌 방법은 제한조건을 가진 문제나 연속 변수 최적설계 문제에는 적용하기가 어렵고, 반응 표면 방법은 문제에 따라 반응 표면의 적절한 구성이 쉽지 않을수도 있다는 문제가 있다. 민감도 이용 방법은 현재 설계점에서의 민감도 정보를 이용하여 강건성을 확보하는데, 최적설계 알고리즘의 적용시 이차 민감도 값이 필요하다는 문제가 있다. 확률 제한조건 이용 방법은 설계값에서의 제한조건 위반확률을 구하는 것이 필수적이다.

위반확률 계산 방법의 연구는 구조물의 신뢰도 설계 분야에서 많이 진행되어 왔다.<sup>(2)</sup> 구조물의 신뢰도를 나타내는 손상 확률값은 손상함수의 확률 밀도함수를 적분해야 하는데, 이 적분을 해석적으로 하는 것은 거의 불가능하다. 몬테카를로 모의실험을 하면 통계적으로 우수한 확률값을 근사할 수 있지만 계산 비용이 막대하게 들어 실제 적용되기는 어렵고, 확률값을 검증하는 정도로만 쓰이고 있다. 위반 확률을 근사하는 방법으로는 일차 신뢰도 방법(first order reliability method)과 곡률 정보

\* 한국과학기술원 기계공학과  
\*\* 자동차부품연구원  
† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : bclee@mail.kaist.ac.kr  
TEL : (042) 869-3031 FAX : (042) 869-3095

를 이용하는 이차 신뢰도 방법(second order reliability method)이 있는데, 대부분의 연구자들은 일차 신뢰도 방법의 개선에 많은 관심을 기울여 왔다.

일차 신뢰도 방법에는 평균 2 차 모멘트 방법(mean-value first order second moment method)<sup>(2)</sup> 과 불변 2 차 모멘트 방법(advanced first order second moment method)<sup>(3,4)</sup> 이 있다. 평균 2 차 모멘트 방법은 비선형 함수의 확률 변수 평균점에서 근사가 이루어지기 때문에 확률 근사의 정확도가 떨어지고 함수의 형태에 따라 확률이 달라지게 되어 확률의 불변성이 결여되는 등 단점이 존재한다. 이에 반해 불변 2 차 모멘트 방법은 제한조건 함수의 최대 위반 가능점(most probable failure point)에서 선형 근사하므로 확률을 더 정확하게 근사할 수 있고 확률의 불변성도 얻을 수 있으므로 불변 2 차 모멘트 방법이 추천되고 있다. Rackwitz<sup>(5)</sup> 등은 비정규 분포를 상당 정규 분포로 변환하여 비정규 분포를 포함하는 제한조건 함수의 위반 확률을 불변 2 차 모멘트 방법으로 근사할 수 있음을 보였다. Kwak 과 Lee<sup>(6)</sup>는 위반 확률 계산에 불변 2 차 모멘트 방법을 적용하였고 새로운 민감도 수식을 유도하였다. Grandhi<sup>(7)</sup>는 제한 조건 함수를 2 점 근사 기법으로 근사하여 강건 최적설계에서 나타나는 부 최적화 문제를 효율적으로 해결하였다.

덮개 함수(envelope function)는 Kreisselmeier 와 Steinhaus 가 처음으로 도입하여 전투기의 강건 제어 루프 설계에 이용한 이후 다계층 최적설계 분야에서 누적 제한조건(cumulative constraint)을 구성하는 데 이용되었다.<sup>(8)</sup> Sobieski 등은 최적 설계 문제를 부문제와 상위 수준의 조정 문제로 분해하는 방법을 도입하였는데, 덮개 함수를 이용하여 누적 제한조건을 구성한 후 각 요소에서의 제한조건 위반 여부를 판정하였다.<sup>(9)</sup> Barthelemy 와 Riley 는 제한조건 근사와 잠정적 제한조건 제거 방법을 통해 다계층 최적설계의 효율을 향상시키는 방법을 제안하였고, 덮개 함수의 사용자 정의 파라미터를 결정하는 방법도 제안하였다.<sup>(10)</sup> Sethi 와 Striz 는 강도, 변위, 치수 제한조건이 동시에 부과되는 구조의 무게 최적화 문제에 대해서 덮개 함수를 이용하여 수치적 효율 향상과 성능 개선을 피하였다.<sup>(11)</sup> Renwei 와 Shaojun 은 덮개 함수와 2 점 근사 함수, 다계층 근사 기법을 이용하여 구조 최적화 문제를 준해석적으로 해결하는 것을 제안하였다.<sup>(12)</sup>

기존의 신뢰도 최적설계 및 확률 제한조건을 이용하는 강건 최적설계의 경우 최적설계 과정 중

에 필요한 신뢰도 해석은 확률 함수 각각에 대해 수행해야 하므로 계산량이 상당히 많아지게 된다. 이 때 제한 조건을 통합하여 제한조건의 개수를 줄이게 되면 통합된 제한조건의 위반확률을 계산하기 위한 랜덤 변수 변동 해석회수가 줄어들게 되고 전체 축차 회수가 크게 변하지 않는다면 계산량을 크게 줄일 수 있게 된다. 본 연구에서는 덮개 함수를 이용하여 제한조건의 만족 정도는 기존의 강건 최적설계와 비슷하게 유지하면서 전체적인 계산량을 줄여 강건 최적설계의 효율을 향상시킬 수 있음을 보이려 한다.

본 논문은 2 장에서 강건 최적설계 수식화와 덮개 함수의 특성을 기술하고 3 장에서 수치예제를 통해 효율 개선이 가능함을 보인 후 결론을 맺는 것으로 구성된다.

## 2. 덮개함수를 이용한 강건 최적설계

### 2.1 강건 최적설계 정식화

설계변수가 랜덤 변수가 아니고 확정변수인 결정론적 최적설계 문제를 다음과 같이 수학적으로 기술할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \\ & \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{x}$  는 설계변수 벡터로서  $n$  차원 벡터이고,  $\underline{x}_i$  와  $\bar{x}_i$  는 각각 설계변수  $x_i$  의 하한과 상한을 나타낸다. 이에 비해, 설계변수가 랜덤 변수이고 확률 제한조건을 가지는 신뢰도 최적설계 수식화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } \Pr[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq p_j \quad j=1, \dots, m \\ & \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $p_j$  는 위반 확률을 제한하는 확률값이므로, 식 (2)에서 제한조건의 의미는 제한조건을 위반할 확률이 확률 제한값  $p_j$  보다 작아야 함을 나타낸다.

정규분포를 갖는 확률 변수들은 각각 다른 평균과 분산값을 갖고 있으며 일반적으로 상관관계도 존재하는데, 간단한 행렬 변환식에 의하여 서로 독립적이고 평균이 0, 분산이 1 인 표준 정규 분포를 갖는 새로운 확률변수로 치환할 수 있다. 또, 비정규 분포를 갖는 랜덤 변수는 특정점 근처에서 상당 정규분포로 변환할 수 있으므로 대개 통계적으로 독립인 랜덤 변수로 취급하고 정규분

포를 갖는다고 가정할 수 있다.<sup>(13)</sup>

강건 최적설계 수식화는 성능함수의 강건성과 제한 조건의 위반에 대한 강건성을 부여하기 위해 전술한 바와 같이 민감도를 이용하거나 확률 제한 조건을 이용하여 수식화하는데 다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \sigma_j^2 \\ & \text{subject to} \\ & \mu_j \leq \bar{\mu}_j \\ & \Pr[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq p_j \quad j=1, \dots, m \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\sigma_j^2$  과  $\mu_j$  는 각각 성능 함수의 분산과 평균을 나타내고,  $\bar{\mu}_j$  는 평균 제한값이다.

본 논문에서는 성능 함수의 분산 및 평균값을 줄이는 강건 최적설계 수식화를 이용한다.<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} & \text{minimize } b \\ & \text{subject to } \Pr[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq p_j \quad j=1, \dots, m \\ & \Pr[f \geq b] \leq p_{m+1} \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $b$  는 새로운 성능 함수와 관련된 파라미터로서 제한조건을 새로 구성하고, 설계변수 벡터에 추가된다. 그런데 식 (4)의 정식화에서 제한조건의 위반확률을 제한하는 확률 제한값  $p_j$  는 작은 값이므로 수치적 편의를 위해 안전지수를 이용하여 변환하고, 부 최적화 기법을 도입해서 다시 써보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } b \\ & \text{subject to } \min_{\mathbf{x} \in D} g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad , \quad j=1, \dots, m \\ & \Pr[f \geq b] \leq p_{m+1} \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \\ & \text{where } D = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = \beta_j^x\} \quad , \\ & \beta_j^x = \Phi^{-1}(1-p_j) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서,  $D$  는 지정된 위반 확률 제한값에 해당하는 안전 지수와 크기가 같은 벡터공간으로 부 문제의 목적함수가 최소화 되는 공간이고,  $\Phi(\tau)$  는 누적 표준확률 분포함수이다.

식 (5)의 부 최적화 문제는 위반 확률값을 평균 2 차 모멘트 방법보다 좀 더 정확하게 근사하기 위해 Hasofer<sup>(3)</sup> 등이 도입한 것이다. 확률 조건 함수가 비선형일 경우, 최대 위반 가능점을 미리 알 수 없기 때문에 먼저 최대 위반 가능점을 구해야

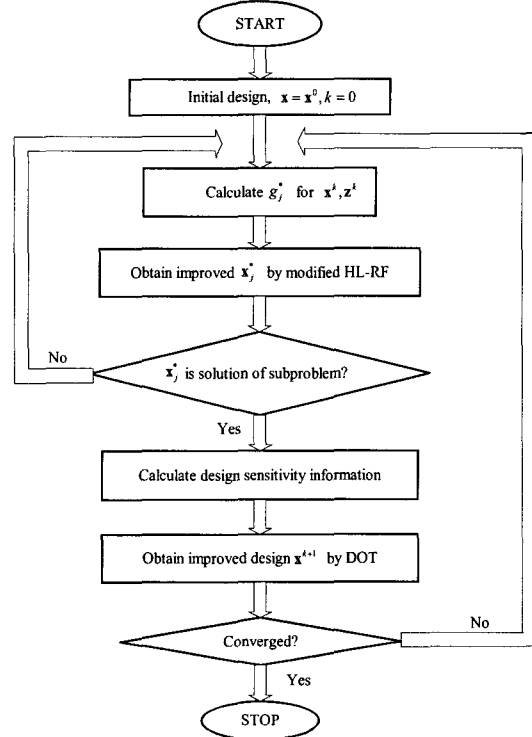


Fig. 1 Flow chart of robust optimization method

한다. 이러한 부 최적화 문제를 해결하기 위해 수정 HL-RF 방법을 이용하였다. 강건 최적설계의 흐름도는 Fig. 1 과 같고, 강건 최적설계 시스템은 상용 최적설계 프로그램인 DOT 와 연계하여 구성되었다.

2.2 뒹개 함수를 이용한 강건 최적설계

2.2.1 뒹개 함수의 형태 및 특징

각 설계점에서의 제한조건 최대값을

$$g_{\max} = \max(g_1, g_2, \dots, g_m) \quad (6)$$

라 하면, 사용자가 정할 수 있는 양의 파라미터  $p$  에 대해서,

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \frac{1}{p} \ln \left\{ \sum_{j=1}^m \exp[p g_j(\mathbf{x})] \right\} \\ &= g_{\max}(\mathbf{x}) + \frac{1}{p} \ln \left\{ \sum_{j=1}^m \exp[p(g_j(\mathbf{x}) - g_{\max}(\mathbf{x}))] \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

인 뒹개 함수  $E(\mathbf{x})$ 를 정의할 수 있다.  $E(\mathbf{x})$ 의 형태는 순차적 비제약 최소화 기법(sequentially unconstrained minimization technique)에서 쓰이는 벌칙 항과 비슷하다.  $E(\mathbf{x})$ 를 이용하면, 식 (1)과 같은 일반적인 최적설계 문제를 제한조건이 하나이거나 또는 원래 문제보다 훨씬 적은 개수의 제한조건이

있는 최적설계 문제로 변환할 수 있다.<sup>(14)</sup>

덮개 함수 E(x)는 다음의 범위에 있게 된다.

$$g_{\max} \leq E(\mathbf{x}) \leq g_{\max} + (1/p)\ln(m) \quad (8)$$

즉, 덮개 함수는 최대 제한조건에 따르는 덮개 함수가 되어, p 가 커질수록  $g_{\max}$  에 가까워지게 된다. 일차 미분값을 이용하는 수학적 최적설계 기법에서 필요한 설계변수에 대한 민감도는,

$$\frac{dE(\mathbf{x})}{dx_k} = \sum_{j=1}^m \exp[p(g_j - E(\mathbf{x}))] \frac{dg_j}{dx_k} \quad (9)$$

$(k=1, \dots, n)$

가 된다. 이로부터 사용자 정의 파라미터 p 가 커질수록 민감도는  $dg_{\max}/dx_k$  에 지배받게 됨을 알 수 있다.

p 의 값은  $g_{\max}$  에 대한 근사정도와 불연속적인 민감도의 고려 정도에 따라 적절히 선택해야 하는데, 다음과 같이 선택하면 적절하다고 알려져 있다.<sup>(10)</sup> 최적화 기법에서의 제한조건의 활성화 여부를 판정하는  $\epsilon$  에 대해 p 의 값은

$$p = \frac{\ln(m)}{\epsilon} \quad (10)$$

이고, 여기서 m 은 식 (1)과 같은 최적설계 정식에서 제한조건 개수를 나타낸다. 이 경우, E(x)가 활성화되었다는 것은 E(x)를 구성하는 원 문제의 제한조건 중 가장 큰 제한조건이 활성화되었다는 것과 동일한 의미이다.

2.2.2 덮개 함수를 이용한 강건 최적설계 수식화  
강건 최적설계 수식화에서 덮개 함수를 이용하여 제한조건의 개수를 줄이면, 각 제한 조건마다 위반 확률을 계산해야 하는 계산량이 크게 줄어들어 강건 최적설계의 효율을 향상시킬 수 있을 것이다. 본 논문에서는 이러한 점에 착안하여, 기존의 결정론적 제한 조건 함수를 덮개함수를 이용하여 적은 개수의 제한 조건 또는 하나의 제한 조건으로 변환한 후, 확률 제한값을 만족시키도록 정식화하였다. 이를 식 (4)와 같은 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } b \\ & \text{subject to } \Pr[E(\mathbf{x}) \leq 0] \leq p_1 \\ & \quad \Pr[f \geq b] \leq p_2 \\ & \quad x_i \leq \bar{x}_i \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

### 3. 수치예제와 검토

덮개 함수를 이용한 강건 최적설계 정식화의 효율성을 보이고, 기존의 강건 최적설계에 의한 최적해와 비교하기 위해 네 개의 예제를 풀었다. 각 수치예제에서 제한 조건의 만족 확률은 99.5% 이상으로 하였는데 이는 사용자가 각 제한 조건마다 다르게 설정할 수도 있다. 각 수치예제에서 최적해의 제한 조건 만족 확률은 몬테카를로 모의 실험을 10 만회 수행하여 검증하였다. 설계 변수는 2 장에서 기술한 바와 같이 서로 독립적이고 정규 분포를 갖는다고 가정해도 무방하므로, 수치예제에서는 그와 같은 랜덤 변수라고 가정한다. 또, 결과를 정리한 표에서는 각 제한조건의 만족 확률을 모두 표시하지 않고, 만족 확률이 차이가 나는 제한 조건 중에서 대표적인 것들만 제시하였다.

일반적인 신뢰도 최적설계에서는 제한 조건을 표준화하였을 때 제한 조건의 만족 여부를 0 을 기준으로 판정하는데, 본 논문에서는 상용 최적설계 프로그램인 DOT 를 이용하므로 제한 조건의 만족여부를 0.003 을 기준으로 판정하였다. 일반적인 신뢰도 최적설계와 동일한 만족 확률을 얻으려면 제한 조건을 약간 수정하여 최적 설계를 수행하면 될 것이다.

#### 3.1 용접된 보 구조물<sup>(1)</sup>

Fig. 2 에 그려진 바와 같이 용접된 보 구조물에 대한 강건 최적설계를 수행하였다. 목적함수는 용접 재료와 보 요소의 가격의 합으로 나타나는데, 이는 구조물의 중량과 비례한다. 제한 조건으로는 용접 부위의 전단 응력  $\tau$ , 보 요소의 굽힘 응력  $\sigma$ , 보 요소의 변위  $\delta$  와 좌굴 하중  $P_c$  에 대하여 부과된다. 설계 변수는 용접 재료의 폭  $x_1$  과 길이  $x_2$ , 보 요소의 높이  $x_3$  와 두께  $x_4$  이다. 결정론적

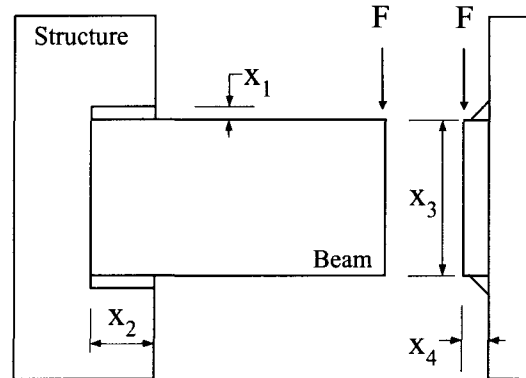


Fig. 2 A welded beam structure

최적설계 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = c_1 x_1^2 x_2 + c_2 x_3 x_4 (z_2 + x_2) \\
 & \text{subject to} \\
 & g_1(\mathbf{x}) = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / z_6 - 1 \leq 0 \\
 & g_2(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / z_7 - 1 \leq 0 \\
 & g_3(\mathbf{x}) = x_1 / x_4 - 1 \leq 0 \\
 & g_4(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / z_5 - 1 \leq 0 \\
 & g_5(\mathbf{x}) = 1 - P_c(\mathbf{x}, \mathbf{z}) / z_1 \leq 0 \\
 & 3.175 \leq x_1 \leq 50.8, \quad 0 \leq x_2, x_3 \leq 254, \\
 & 0 \leq x_4 \leq 50.8 \\
 & \text{where} \\
 & \tau(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \left\{ (t(\mathbf{x}, \mathbf{z}))^2 + 2t(\mathbf{x}, \mathbf{z})tt(\mathbf{x}, \mathbf{z})(x_2/2R(\mathbf{x})) \right. \\
 & \quad \left. + tt(\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 \right\}^{1/2} \\
 & t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = z_1 / \sqrt{2x_1 x_2} \\
 & tt(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = M(\mathbf{x}, \mathbf{z})R(\mathbf{x}) / J(\mathbf{x}) \\
 & M(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = z_1 \left( z_2 + \frac{x_2}{2} \right), \quad R(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{x_2^2 + (x_1 + x_3)^2}}{2} \\
 & J(\mathbf{x}) = \sqrt{2} x_1 x_2 \left\{ x_2^2 / 12 + (x_1 + x_3)^2 / 4 \right\} \\
 & \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 6z_1 z_2 / x_3^2 x_4 \\
 & \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 4z_1 z_2^3 / z_3 x_3^2 x_4 \\
 & P_c(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{4.013 x_3 x_4^3 \sqrt{z_3 z_4}}{6z_2^2} \left( 1 - \frac{x_3}{4z_2} \sqrt{\frac{z_3}{z_4}} \right) \\
 & \mathbf{z} = \left\{ 2.6688 \times 10^4 N \quad 3.556 \times 10^2 mm \right. \\
 & \quad \left. 2.0685 \times 10^5 MPa \quad 8.274 \times 10^4 MPa \quad 6.35 mm \right. \\
 & \quad \left. 93.77 MPa \quad 206.85 MPa \right\}^T \\
 & c_1 = 6.74135 \times 10^{-5}, \quad c_2 = 2.93585 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

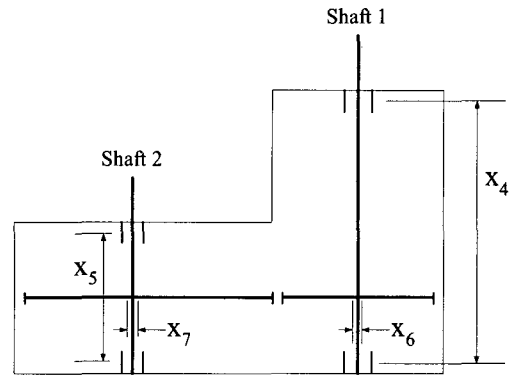
강건 최적설계 수식은 다음과 같이 식 (9)의 형태로 나타낼 수 있고, 뒤틀개 함수를 이용할 경우에는 제한 조건의 개수가 줄어드는 것만 달라지게 된다.

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } b \\
 & \text{subject to } \Pr[g_j(\mathbf{x}) \leq 0] \leq 0.005 \quad j=1, \dots, 5 \\
 & \quad \Pr[f \geq b] \leq 0.03 \\
 & \quad 3.175 \leq x_1 \leq 50.8, \quad 0 \leq x_2, x_3 \leq 254, \\
 & \quad 0 \leq x_4 \leq 50.8
 \end{aligned}$$

여기서,  $\mathbf{x}$  는 설계변수 벡터이고,  $\mathbf{z}$  는 설계 파라미터 벡터이며  $z_1$  과  $z_2$  는 각각 보 구조물의 끝단에 가해지는 힘의 크기와 보 구조물의 길이를 나타내고,  $z_3$  와  $z_4$  는 각각 인장 강성과 전단 강성

**Table 1** The robust optimal design results of welded beam design

	Deterministic optimum	Robust optimum	
		Not using an E(X) function	Using an E(X) function
Object function	2.380	2.643	2.695
$x_1$	6.198	5.568	7.745
$x_2$	157.9	177.1	135.3
$x_3$	210.7	222.4	188.7
$x_4$	6.198	6.535	7.898
$g_1$ satisfaction probability, %	61.03	99.98	99.33
$g_3$ satisfaction probability, %	62.79	99.99	99.90
Sub-problem function call		68981	10787



**Fig. 3** Speed reducer configuration

을 나타낸다. 또,  $z_5$  는 변형 허용값이며,  $z_6$  과  $z_7$  는 각각 허용 인장 응력과 허용 전단 응력을 나타내고,  $c_1$  과  $c_2$  는 구조물의 제작비용에 관련된 상수값을 나타낸다.

강건 최적설계 결과를 Table 1 에 나타내었다.  $x_1, x_4$  랜덤변수의 표준편차는 0.04 로,  $x_2, x_3$  랜덤 변수의 표준편차는 0.1 로 설정하였다. 뒤틀개 함수를 이용한 경우 기존의 강건 최적해에 비해 목적함수는 약 2% 증가하였고, 각 제한 조건의 만족 확률은 0.6% 정도의 차이를 보였다. 부 최적화 문제에서 해석한 시스템 회수는 1/6 정도로 감소하였음을 볼 수 있다.

3.2 속도 감쇄기 최적설계 문제<sup>(15)</sup>

소형 항공기 엔진에서 흔히 쓰이는 속도 감쇄기를 최적설계 문제로 정식화한 것으로, 개략도는 Fig. 3 에 그려져 있다. 목적 함수는 속도 감쇄기 전체 중량이고, 제한 조건으로는 기어의 굽힘 응력, 접촉 응력, 피니언과 기어의 처짐 변위, 피니언과 기어의 전단 응력, 기하학적 제한 조건 등이 부과된다. 결정론적 최적설계 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{minimize } f(\mathbf{x}) &= 0.7854x_1x_2^2(3.3333x_3^2 + 14.9334x_3 \\ &\quad - 43.0934) - 1.508x_1(x_6^2 + x_7^2) \\ &\quad + 7.477(x_6^3 + x_7^3) + 0.7854(x_4x_6^2 + x_5x_7^2) \end{aligned}$$

subject to

$$g_1(\mathbf{x}) = 27/x_1x_2^2x_3 - 1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 397.5/x_1x_2^2x_3^2 - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 1.93x_4^3/x_2x_3x_6^4 - 1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = 1.93x_5^3/x_2x_3x_7^4 - 1 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \sqrt{\left(\frac{745x_4}{x_2x_3}\right)^2 + 16.9 \times 10^6} / 0.1x_6^3 \leq 1100$$

$$g_6(\mathbf{x}) = \sqrt{\left(\frac{745x_5}{x_2x_3}\right)^2 + 157.5 \times 10^6} / 0.1x_7^3 \leq 850$$

$$g_7(\mathbf{x}) = x_2x_3 \leq 40$$

$$g_8(\mathbf{x}) = 5 - x_1/x_2 \leq 0$$

$$g_9(\mathbf{x}) = x_1/x_2 - 12 \leq 0$$

$$g_{10}(\mathbf{x}) = (1.5x_6 + 1.9)/x_4 - 1 \leq 0$$

$$g_{11}(\mathbf{x}) = (1.1x_7 + 1.9)/x_5 - 1 \leq 0$$

$$2.6 \leq x_1 \leq 3.6, \quad 0.7 \leq x_2 \leq 0.8, \quad 17 \leq x_3 \leq 28,$$

$$7.3 \leq x_4 \leq 8.3, \quad 7.3 \leq x_5 \leq 8.3, \quad 2.9 \leq x_6 \leq 3.9,$$

$$5.0 \leq x_7 \leq 5.5$$

여기서  $x_1, x_2, x_3$ 는 각각 기어면의 폭, 기어 모듈(teeth module), 피니언의 톱니 개수를 나타낸다.

또,  $x_4$ 와  $x_5$ 는 각각 축 1과 축 2의 베어링 거리를 나타내며,  $x_6$ 과  $x_7$ 은 각각 축 1과 축 2의 지름을 나타낸다.

본 논문의 정식화를 통해 강건 최적설계한 결

과를 Table 2에 나타내었다. 각 랜덤변수의 표준편차는 0.005로 설정하였다. 덮개 함수를 이용한 경우 목적함수 값은 차이가 없었고 제한 조건의 만족 확률은 0.4% 정도 감소하였지만, 부 최적화 문제에서 해석한 시스템 회수는 1/5 정도로 감소하였다.

### 3.3 수학적 문제 104번<sup>(16)</sup>

설계 변수는 8개이고, 설계 변수의 상,하한 조건을 제외한 제한 조건은 6개이다. 결정론적 최적 설계 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{minimize } f(\mathbf{x}) &= 0.4x_1^{0.67}/x_7^{0.67} + 0.4x_2^{0.67}/x_8^{0.67} \\ &\quad + 10 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

subject to

$$g_1(\mathbf{x}) = 0.1x_1 + 0.0588x_5x_7 - 1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.0588x_6x_8 - 1 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = 4x_3/x_5 + 2/x_3^{0.71}x_5 + 0.0588x_7/x_3^{1.3} - 1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = 4x_4/x_6 + 2/x_4^{0.71}x_6 + 0.0588x_8/x_4^{1.3} - 1 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{x}) = 1 - f(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$g_6(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - 4.2 \leq 0$$

$$0.1 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, \dots, 8$$

각 랜덤변수의 표준편차는 0.001로 설정하였고, 강건 최적설계 결과는 Table 3에 나타내었다. 덮개 함수를 이용한 경우 기존의 강건 최적해에 비해 목적함수 값은 2% 정도 작아졌으며, 제한 조건의 만족 확률도 차이가 없었다. 그러나, 부 최적화 문제에 소요되는 시스템 해석 회수는 1/4 정도로 감소하였다.

### 3.4 수학적 문제 113번<sup>(16)</sup>

설계 변수는 10개이고, 설계 변수의 상,하한 조건

**Table 2** The robust optimal design results of speed reducer design

	Deterministic optimum	Robust optimum	
		Not using an E(X) function	Using an E(X) function
Object function	2994	3262	3262
$x_1$	3.50	3.56	3.55
$x_2$	0.70	0.70	0.70
$x_3$	17.0	17.8	18.1
$x_4$	7.30	7.45	7.51
$x_5$	7.71	8.29	7.99
$x_6$	3.35	3.47	3.42
$x_7$	5.29	5.37	5.32
$g_8$ satisfaction probability, %	65.99	99.85	99.48
Sub-problem function call		83019	15141

**Table 3** The robust optimal design results of HS104<sup>(15)</sup> problem

	Deterministic optimum	Robust optimum	
		Not using an E(X) function	Using an E(X) function
Object function	3.951	4.156	4.059
$x_1$	6.24	5.93	6.11
$x_2$	2.48	2.08	2.42
$x_3$	0.68	0.70	0.68
$x_4$	0.59	0.66	0.60
$x_5$	5.95	6.01	6.12
$x_6$	5.52	5.81	5.73
$x_7$	1.07	1.13	1.05
$x_8$	0.39	0.58	0.43
$g_3$ satisfaction probability, %	69.15	99.99	99.99
Sub-problem function call		33868	7669

을 제외한 제한 조건 개수는 8 개이다. 결정론적 최적설계 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{minimize } f(\mathbf{x}) = & x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 14x_1 - 16x_2 \\ & + (x_3 - 10)^2 + 4(x_4 - 5)^2 + (x_5 - 3)^2 \\ & + 2(x_6 - 1)^2 + 5x_7^2 + 7(x_8 - 11)^2 \\ & + 2(x_9 - 10)^2 + (x_{10} - 7)^2 + 45 \end{aligned}$$

subject to

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{4x_1 + 5x_2 - 3x_7 + 9x_8}{105} - 1 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = 10x_1 - 8x_2 - 17x_7 + 2x_8 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \frac{-8x_1 + 2x_2 + 5x_9 - 2x_{10}}{12} - 1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{x}) = \frac{3(x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 2x_3^2 - 7x_4}{120} - 1 \leq 0$$

$$g_5(\mathbf{x}) = \frac{5x_1^2 + 8x_2 + (x_3 - 6)^2 - 2x_4}{40} - 1 \leq 0$$

$$g_6(\mathbf{x}) = \frac{0.5(x_1 - 8)^2 + 2(x_2 - 4)^2 + 3x_5^2 - x_6}{30} - 1 \leq 0$$

$$g_7(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2(x_2 - 2)^2 - 2x_1x_2 + 14x_3 - 6x_6 \leq 0$$

$$g_8(\mathbf{x}) = -3x_1 + 6x_2 + 12(x_9 - 8)^2 - 7x_{10} \leq 0$$

각 랜덤변수의 표준편차는 0.02 로 설정하였고, 강건 최적설계 결과는 Table 4 에 제시하였다. 이 문제의 경우 결정론적 최적해에 비해 강건 최적해가 60% 이상 증가하였다. 제한 조건의 만족 확률은 덮개함수를 이용하였을 때 0.6% 정도 감소하였지만, 부 최적화 문제에서 요구되는 시스템 해

석 회수는 1/10 정도로 크게 감소하였다.

네 개의 수치예제를 통해 덮개함수를 이용해서 강건 최적설계를 수행하였을 경우 시스템 해석 회수는 1/4~1/10 정도로 크게 감소하였음을 볼 수 있다. 특히 제한 조건 개수가 많은 경우 덮개함수를 이용하는 것이 전체적인 강건 최적설계의 효율을 크게 개선시켰다.

대형 구조물의 최적설계에서는 구조 해석기법과 최적설계 알고리즘을 통합하여 설계를 수행하게 되므로, 단순한 구조물의 최적설계 문제나 수학적 최적설계 문제에 비해 설계변수와 제한조건의 개수는 훨씬 많아지게 된다. 즉, 실제적인 구조물을 최적화할 때에는 대략 수백개의 설계변수와 수천개의 내연적인 제한 조건이 포함된다. 따라서, 제한 조건의 개수를 줄이게 되면 시스템 해석 회수를 줄일 수 있으므로 실제 구조물을 더 효율적으로 강건 최적화할 수 있을 것이다.

#### 4. 결론

강건 최적설계는 목적 함수의 강건성과 제한 조건의 강건성을 직접적으로 고려하는 최적설계 기법인데, 확률 제한조건을 이용하는 경우 각 제한 조건마다 위반확률을 계산해야 하므로 시스템 해석 회수가 많아지게 된다. 덮개 함수를 이용하여 제한 조건 개수를 줄인 다음, 확률 제한조건으로 변환하면 강건 최적설계의 효율 향상을 기대할 수 있는데, 본 논문에서는 여러 수치예제에 이를 적용하여 효율적인 결과를 얻었다. 얻어진 결과로부터 강건 최적해가 기존의 강건 최적해와 크게 다르지 않으면서 시스템 해석 회수는 감소하였음을 보였다.

향후 덮개 함수의 사용자 정의 파라미터를 적절히 선택하는 방법에 대한 연구와 통합된 제한 조건의 만족 확률에 대한 분석이 요구된다.

#### 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) Jung, D. H. and Lee, B. C., , 2000, "Development of an Efficient Optimization Technique for Robust Design by Approximating Probability Constraints," *Trans. of the KSME A*, Vol. 24, No. 12, pp. 3053 ~ 3060. (in Korean)
- (2) Melchers, R. E., 1987, *Structural Reliability*

**Table 4** The robust optimal design results of HS113<sup>(15)</sup> problem

	Deterministic optimum	Robust optimum	
		Not using an E(X) function	Using an E(X) function
Object function	24.38	42.46	38.65
x <sub>1</sub>	2.169	2.056	2.157
x <sub>2</sub>	2.374	3.253	2.620
x <sub>3</sub>	8.780	6.936	7.863
x <sub>4</sub>	5.120	5.033	5.050
x <sub>5</sub>	1.068	1.021	1.048
x <sub>6</sub>	1.605	1.796	1.853
x <sub>7</sub>	1.314	0.839	1.928
x <sub>8</sub>	9.822	9.112	9.789
x <sub>9</sub>	8.270	7.621	7.869
x <sub>10</sub>	8.375	8.555	7.909
g <sub>3</sub> satisfaction probability, %	57.84	99.99	99.41
Sub-problem function call		278907	27423

- Analysis and Prediction*, Ellis Horwood Limited
- (3) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1974, "Exact and Invariant Second Moment Code Format," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 100, pp. 111~121.
- (4) Choi, J. H., Lee, S. J. and Choi, D. H., 1998, "Study on Tolerance and Reliability Analysis of Mechanical Systems with Uncertainty," *Trans. of the KSME A*, Vol. 22, No. 1, pp. 215~226. (in Korean)
- (5) Rackwitz, R. and Fiessler, B., 1978, "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences," *Computers & Structures*, Vol. 9, pp. 489~494.
- (6) Kwak, B. M. and Lee, T. W., 1987, "A Reliability-Based Optimal Design Using Advanced First Order Second Moment Method," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 15, No. 4, pp. 523~542.
- (7) Grandhi, R. V. and Wang, L., 1998, "Reliability-Based Structural Optimization Using Improved Two-Point Adaptive Nonlinear Approximations," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 29, pp. 35~48
- (8) Kreisselmeier, G. and Steinhauser, R., 1985, "Application of Vector Performance Optimization to a Robust Control Loop Design for a Fighter Aircraft," *Int. J. Control*, 37 (2), pp. 251~284.
- (9) Sobieski, J. S., James, B. B. and Dovi, A. R., 1985, "Structural Optimization by Multilevel Decomposition," *AIAA Journal*, 23(11), pp. 1775~1782.
- (10) Barthelemy, J. F. M. and Riley, M. F., 1988, "Improved Multilevel Optimization Approach for the Design of Complex Engineering Systems," *AIAA Journal*, 26(3), pp. 353~360.
- (11) Sethi, S. S. and Striz, A. G., 1997, "On Using the Kreisselmeier-Steinhaus Function in Simultaneous Analysis and Design," *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference and Exhibit*, 38<sup>th</sup>, pp. 1357~1365.
- (12) Renwei, X. and Shaojun, C., 1998, "A Quasi-Analytic Method for Structural Optimization," *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 14, pp. 569~580.
- (13) Lee, T. W., 1987, "Method of Sensitivity Analysis for Failure Probability and Applications to Optimal Structural Design," Ph. D. Thesis, KAIST. (in Korean)
- (14) Lee, J. J. and Lee, B. C., 2002, "A Study on Constraint Accumulation in Mathematical Programming Problems Using Envelope Functions," *Trans. of the KSME A*, Vol. 26, No. 4, pp. 720~370. (in Korean)
- (15) Rao, S. S., 1996, *Engineering Optimization*, 3<sup>rd</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc.
- (16) Hock, W. and Schittkowski, K., 1981, *Test Examples for Nonlinear Programming Codes*, Springer-Verlag.