

평면에서의 임의 형상을 갖는 물체의 다점 접촉 해석

전경진* · 박수진* · 손정현* · 유완석†
(2001년 12월 19일 접수, 2002년 5월 27일 심사완료)

Multi-Point Contact Analysis of Two Bodies in Plane

Su-Jin Park, Kyoung-Jin Jun, Jeong-Hyun Sohn and Wan-Suk Yoo

Key Words: Contact Force(접촉력), Continuous Analysis(연속 해석법), Penetration(침투량), Velocity of Penetration(침투 속도), Multi-Point Contact(다점 접촉)

Abstract

This paper presents a method for calculating contact force between bodies on plane. At each integration time step, the proposed method finds expected contact point on their outlines and then calculates penetration, velocity of penetration and contact force. This paper adopts continuous analysis method and multi-point contact method to calculate contact force. To obtain the accurate expected contact point on their outlines, a new algorithm is developed. The accuracy of the proposed algorithm is demonstrated by comparing the numerical results of the proposed method and DADS.

1. 서 론

기계 시스템에서 접촉은 필연적으로 발생하는 요인이다. 충돌과 같이 짧은 시간 동안에 매우 큰 접촉력을 발생시켜 급격한 속도와 가속도의 변화를 초래하는 접촉현상이 있는 반면에 기어나 지면을 굴러가는 물체간의 접촉과 같이 지속적인 접촉력을 발생시키는 접촉도 있다.

접촉을 해석하는 방법은 불연속 해석법(piecewise analysis)과 연속 해석법(continuous analysis)으로 나눌 수 있다. 불연속 해석법은 시스템에서 접촉이 순간적으로 일어난다고 가정하여 접촉 전과 접촉 후로 나누어 계산한다. 이 해석법은 자유 물체 혹은 구속되지 않은 물체간의 충돌해석에 사용되어왔다.^(1~3) 다물체 시스템의 경우에는 Wehage⁽⁴⁾에 의해서 처음으로 선운동량 보존법칙을 이용해 나타내었고, Shabana와

Khulief⁽⁵⁾는 이것을 탄성체에 확장 시켰다. 이 해석 방법은 아주 효율적이거나 접촉 기간이 짧은 시스템인 경우에만 사용 가능하며 접촉 기간이 시스템의 중요한 인자이거나 저속의 접촉에의 응용에는 한계가 있다.

반면에 연속 해석법은 접촉력이 연속적으로 작용한다고 가정하여 해석하는 방식으로 이 해석 방법은 단순히 접촉력을 시스템의 운동 방정식에 적용시켜 주기만 하면 된다. 가장 간단한 것으로 Kelvin-Voigt model⁽⁶⁾이라 불리는 접촉력을 선형 스프링과 댐퍼로 표현한 것이 있고, Khulief와 Shabana⁽⁷⁾는 이 모델을 다물체 시스템에 적용시켰으며 Hunt와 Grossley⁽⁸⁾는 이 모델에서 선형 스프링과 댐퍼에 의한 접촉력 해석이 적합하지 않음을 지적하고, 접촉력을 Hertz의 탄성이론에 의한 거리의 함수로 나타내었다.

본 논문에서는 함수의 형태로 표현된 형상이 아닌 일반적인 좌표 데이터만으로 표현된 임의의 형상을 갖는 두 물체간의 접촉을 해석해 내는데 있다. 이를 위해 이산적인 데이터로 표현된 두 물체간의 접촉점을 찾는 알고리즘을 개발해

* 회원, 부산대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : wsyoo@pusan.ac.kr

TEL : (051)510-2328 FAX : (051)512-9835

내었고, 정확한 접촉력을 계산해 내기 위해 다점 접촉법(multi-point contact method)을 사용하여 접촉력을 계산하고자 하였다.

계산된 결과를 상용 다물체 동역학 해석 프로그램인 DADS⁽⁹⁾와 비교하여 본 프로그램의 신뢰성을 검증하였다. 또한 신뢰성을 바탕으로 현재 DADS에서 모델링 하기 힘든 경우에 대한 예제 수행을 통해 본 논문의 활용도를 보이하고자 하였다.

2. 접촉 해석

2.1 접촉 해석의 단계

시스템의 접촉을 해석하기 위해서는 크게 접촉을 판단하는 단계와 접촉력을 구하는 두 가지의 단계로 나뉜다.

2.1.1 접촉 판단

평면상에서 두 물체가 접촉을 하기 위해서는 다음과 같은 구속조건을 만족해야 한다. 첫째, 두 강체상의 접촉점의 좌표는 일치해야 한다. 둘째, 각 강체상의 접촉점에서의 접평면에 수직인 벡터들은 서로 평행해야 한다. 이 구속조건들을 만족하면서 두 물체의 예상되어지는 접촉점을 찾아 접촉 여부를 판단한다.⁽¹⁰⁾

접촉 판단을 위해 먼저 주어진 점들 중 최단거리를 갖는 두 점을 찾고, 그 이후에 그 찾은 점의 이웃하는 점들과의 벡터를 이용해 다시 한번 최단거리를 찾는다. 두 점들간의 거리가 영(zero)에 가까울 때 (본 프로그램에서는 10^{-10} 으로 하였음.) 접촉이 일어난다고 판단하였으며, Fig. 1에 표시된 접촉 판단 과정을 순서적으로 설명하면 다음과 같다.

- ① 접촉하는 물체와 접촉 당하는 물체의 형상 정보(geometric data)를 읽어 온다.
- ② 두 물체의 주어진 좌표 데이터들간의 거리를 계산하여 최단 거리를 갖는 점 $P_i(k)$, $P_j(l)$ 을 찾아낸다.
- ③ 접촉 당하는 물체상의 점 $P_j(l)$ 과 접촉하는 물체상의 점 $P_i(k)$, 그리고 그 이전과 이후의 형상 정보 데이터 $P_i(k-1)$, $P_i(k+1)$ 을 가지고 벡터를 형성한다.
- ④ 벡터 1(Vec 1)과 벡터 3(Vec 3)의 내적(dot

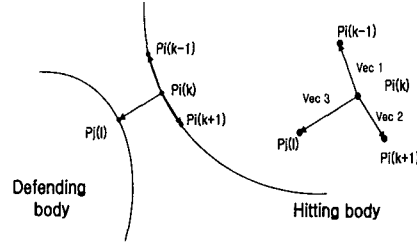


Fig. 1 Process of detection of contact point

product)과 벡터 2(Vec 2)와 벡터 3의 내적(dot product)을 각각 계산하여 그 부호를 판정한다. 벡터 1과 벡터 3간의 내적을 계산하여 그 값이 양(positive)이면 $P_j(l)$ 과의 최단거리를 갖는 점 P_i 가 벡터 1상에 있게 되므로 벡터 1에 수직이고 $P_j(l)$ 을 지나는 직선식을 구해서 벡터 1과의 교점을 구한다. 반면에 벡터 1과 벡터 3의 내적이 음(negative)이면 벡터 2와 벡터 3간의 내적을 구해서 내적이 양이면 위와 마찬가지로의 방법으로 교점을 구한다. 만약 벡터 1과 벡터 3간의 내적과 벡터 2와 벡터 3간의 내적이 모두 음인 경우에는 $P_j(l)$ 과 최단 거리를 갖는 점은 $P_i(k)$ 가 된다.

- ⑤ 최단거리를 갖는 점 P_i , P_j 가 정해졌으면 그 두 점간의 거리를 구한다.
- ⑥ P_i , P_j 간의 거리가 허용오차(10^{-10})보다 작으면 영(zero)으로 간주하여 접촉이 발생하는 순간이라고 판정한다.
- ⑦ 접촉이 일어나면 그 순간의 P_i , P_j 를 저장하여 $\vec{P_iP_j}$ 를 변형 벡터(penetration vector)로 하여 접촉력을 계산한다.

2.1.2 다점 접촉 알고리즘

동역학 해석 프로그램으로 물체의 접촉을 해석한다고 하면 일반적으로 한 점 접촉(one-point contact)을 의미한다. 그러나 아무리 강체로 모델링을 한다해도 두 물체간의 변형을 고려하게 되고 그러면 한 점 접촉으로는 실제에 근사한 해석을 하기 힘들다. 따라서 본 논문에서는 실제에 좀더 근접한 접촉력을 계산하기 위해 다음과 같은 다점 접촉의 방법을 제시한다.

- ① 접촉이 일어나는 순간과 접촉점을 찾아낸다. (Fig. 2)
- ② 그 다음 단계에서는 Fig. 3과 같은 형상처렴

되는데, 이 경우 각 물체의 A와 B를 찾아낸다. 그리하여 각각의 점들에 대한 변형량을 구해 각 점에 대한 접촉력을 구한다. 각 점에서 작용하는 힘의 방향은 평면 접촉인 경우는 평면에 수직인 방향으로 하고, 곡선과 곡선의 접촉(convex to convex)인 경우에는 처음 ①의 과정에서 구해지는 수직 벡터의 방향으로 작용한다고 가정한다. 그래서 각각의 점에서 구한 접촉력들을 구해 전체 시스템에 작용하는 힘으로 계산을 한다.

- ③ A와 B 사이의 각 점들에 대한 변형량은 다음과 같이 구한다. A와 B사이의 충돌 물체(hitting body)의 점의 개수를 m개라 하고 충돌 당하는 물체(defending body)의 점의 개수를 n개라 하면 충돌 물체의 x 번째인 한 점에서 충돌 당하는 물체의 각 점에 대한 n개의 벡터를 구할 수 있다. 이 벡터들의 단위 벡터를 구해 그 단위 벡터와 ②의 과정에서 구한

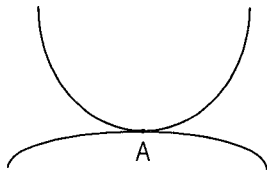


Fig. 2 First stage of multi-point contact

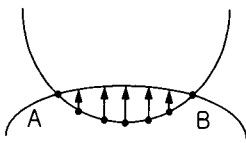


Fig. 3 Second stage of multi-point contact

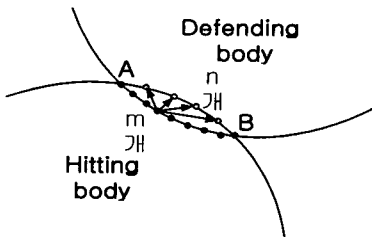


Fig. 4 Third stage of multi-point contact

수직 벡터와의 내적(dot product)을 구해 최대값을 가지는 점을 찾으면 이 점이 충돌 물체의 x 번째 점에 대한 변형량을 나타내는 충돌 당하는 물체의 y 번째의 점이 된다. 따라서 이 두 점을 잇는 벡터 \vec{xy} 의 길이가 변형량의 길이가 된다. 이러한 방식으로 충돌 물체에 대한 m개의 변형량과 그에 대응하는 충돌 당하는 물체의 점들을 구할 수 있다. (Fig. 4 참조)

- ④ 각 점의 위치와 그 점에서의 변형량을 알 수 있으므로 그 점에서의 접촉력을 계산할 수 있다.

2.1.3 연속 접촉력 계산

일반적으로 접촉은 두 물체간의 압축 상태와 복원 상태(restitution phase)로 구분되어진다. 압축 상태동안 두 물체는 접촉면의 수직방향으로 변형이 생기고, 두 물체의 접촉점의 상대속도는 영(zero)으로 감소된다. 압축 상태가 끝나는 시점은 변형이 최대로 되었을 때이며 이때가 이완 상태의 시작이 된다. 이완 상태는 두 물체가 떨어질 때까지 계속되며,⁽¹¹⁾ 연속 접촉 모델에서 접촉력은 접촉 기간동안 지속적으로 작용한다고 생각한다. 연속 접촉 모델은 Kelvin-Voigt 모델에서부터 시작하여 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델로 이어져 왔다. 연속 접촉 모델에서는 접촉력을 구하기 위해서 충돌하는 두 물체를 단순히 스프링과 댐퍼를 가진 시스템으로 가정한 뒤 스프링 강성 및 댐핑 계수를 이용하여 접촉력을 구하거나 변형량과 변형 속도에 따라 비선형적인 접촉력을 구한다. 그리고 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델은 재료의 물성치인 영 계수와 반발 계수를 사용하여 접촉력을 구한다.

Kelvin-Voigt 모델에서 접촉력을 구하는 식은 다음과 같다.

$$F = K\delta + D\dot{\delta} \quad (1)$$

여기서 K와 D는 각각 스프링 강성과 댐핑 계수를 나타내고, δ 와 $\dot{\delta}$ 은 각각 변형량과 변형 속도를 나타낸다. 식 (1)에 의한 접촉력은 댐핑이 있는 경우 변형량이 영이더라도 침투 속도에 의해 0이 아닌 값을 가지게 된다. 따라서 실제 물리현상에 적용시키기에는 불합리하다고 할 수 있다.

반면, Hertz의 탄성이론을 바탕으로 하는 모델

에서는 접촉력을 구하는 스프링력과 댐핑력을 거리에 대한 비선형적인 함수로 계산을 하고 있다. Fig. 5는 변형량에 대한 접촉힘을 나타낸 것이고, Fig. 6은 접촉이 일어나는 순간부터 접촉이 끝나는 순간까지 시간에 대한 변형량을 나타낸 것이다. Fig. 5에서 보는 바와 같이 변형량이 영인 지점에서는 접촉력이 영이 되며 거리에 따른 접촉력이 비선형적인 것을 알 수 있다. 이것은 접촉힘이 Kelvin-Voigt 모델과는 달리 접촉력이 거리에 따른 선형적인 함수가 아니라 비선형적인 함수이기 때문이다. 또한 반발 계수에 의한 에너지 감쇠 역시 거리의 함수로 계산되어진다.

Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델에서 접촉력을 구하는 식은 다음과 같다.^(8,12)

$$F = K\delta^n + D\dot{\delta} \quad (2)$$

여기서 $n=3/2$ 이고, K 는 물성치와 구의 반지름에 관련된 변수이며 다음과 같다.

$$K = \frac{4}{3\pi(h_i + h_j)} \left[\frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^2 \quad (3)$$

여기서 R_i 와 R_j 는 각 물체의 곡률반경을 나타내고, h_i 와 h_j 는 재료의 물성치를 나타내는데 다음과 같다.

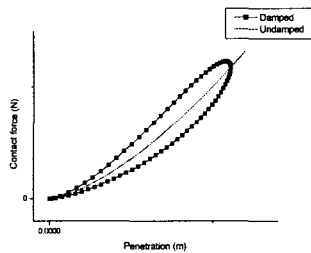


Fig. 5 Contact force vs penetration

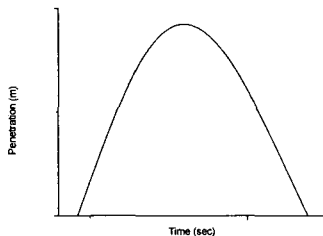


Fig. 6 Penetration vs. time

$$h_l = \frac{1 - \nu_l^2}{\pi E_l} : l = i, j \quad (4)$$

여기서 ν_l 과 E_l 은 각각 프와송 비와 영 계수를 나타낸다.

또한 D 는 댐핑 계수를 말하며 다음과 같다.

$$D = \mu\delta^n \quad (5)$$

여기서 μ 는 이력 댐핑요소(hysteresis damping factor)이며 다음과 같이 나타낸다.

$$\mu = \frac{3K(1 - e^2)}{4\dot{\delta}_0} \quad (6)$$

여기서 $\dot{\delta}_0$ 는 초기 침투 속도를 의미한다. 이상과 같이 식 (3)에서 식 (6)까지를 조합하면 Hertz 탄성이론을 기반으로 하는 모델의 접촉력은 다음과 같이 나타낸다.

$$F = K\delta^n \left[1 + \frac{3(1 - e^2)}{4} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0} \right] \quad (7)$$

3. 수치 예제

3.1 자유 낙하 예제

Fig. 7은 기울어진 지면과 충돌하는 공을 보여준다. 2장에서 언급한 연속 접촉 해석법을 이용하여 접촉력을 계산하고 있다. 계에 작용하는 외력으로는 중력이 지면 아래쪽으로 작용을 하고 중력 가속도는 9.8066 m/sec^2 의 크기를 갖는다. 해석에 사용된 공과 지면의 물성치는 Table 1에 나타내었다. 공의 초기 위치좌표는 (2.0,2.0)이다. 공의 형상 데이터는 초기의 공의 위치와 반경을 가지고 180개의 점들의 x, y 좌표로 나타내었다. 해석 시간의 효율을 위해 매 시간마다 최단거리를 계산해서 그 거리가 길면 적분 간격도 길게, 그 거리가 짧아지면 그에 맞게 적분간격도 짧아지는 형태로 적분 간격을 조정하였다.

Fig. 8은 공에 작용하는 접촉력을 나타낸 그래프이다. 그래프에서 알 수 있듯이 0.49초와 1.19초 근처에서 접촉현상이 일어난다. 두 번째 접촉력이 첫 번째 접촉력보다 작은 이유는 댐핑의 영향으로 첫 충돌 후 일정량의 에너지가 소실되었기 때문이다. 이 결과 그래프와 DADS의 해석 결과가 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다.

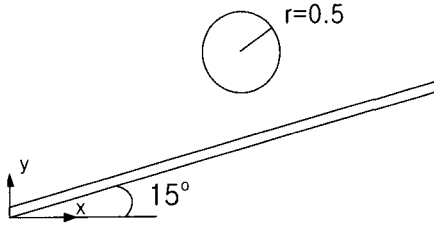


Fig. 7 Ball colliding with inclined surface

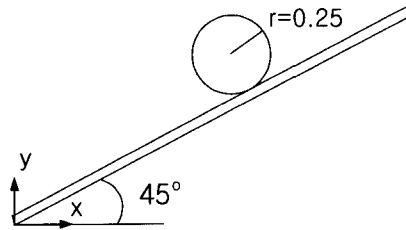


Fig. 9 Ball and inclined surface contact

Table 1 Properties of ball and ground

Stiffness	Damping	Radius	Depth
10000 N/m	10 N · s/m	0.5 m	0.1 m

Table 2 Properties of ball and ground

Stiffness	Damping	Radius	Depth
10000 N/m	10 N · s/m	0.25 m	0.1 m

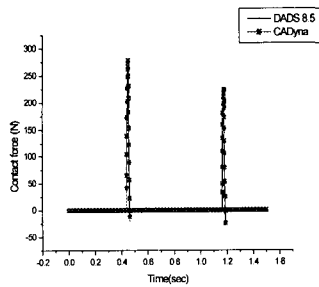


Fig. 8 Contact force

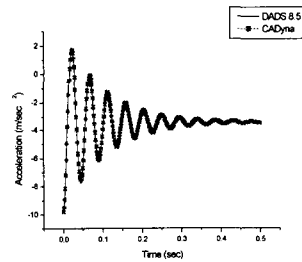


Fig. 10 Acceleration of ball on y-coordinate

3.2 구름 예제

Fig. 9는 기울어진 면을 공이 굴러 내려오는 모습을 보여주고 있다. 면은 x축과 45° 각도를 가지고 기울어져 있다. 공의 외형은 180개의 점으로 이루어져 있으며 계에 작용하는 외력은 중력이고, 중력 가속도는 9.8066 m/sec²의 크기를 갖는다. 접촉하는 두 물체의 물성치는 Table 2에 나타내었으며 공과 지면 사이의 마찰계수는 0.3이라고 하였다. 정해와 비교하는 과정은 다음과 같다. 미끄러지지 않는다고 가정하면 공의 질량이 0.5236kg이고 관성 모멘트를 0.0531이라 했을 때 평면에 수평한 방향의 수평력은 2.2462N이고 이 값은 최대 마찰력 1.0892N보다 크므로 미끄러지지 않는다는 가정은 잘못되었다. 따라서 수평력은 1.0892N이고 이때의 y축상의 가속도는 -3.4323m/sec²이 된다. Fig. 10에서 나타나듯이 이 값에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 가속도가 일

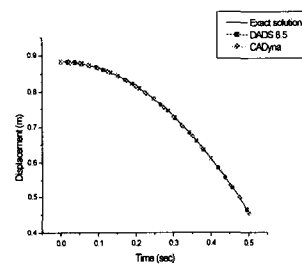


Fig. 11 Displacement of ball on y-coordinate

정한 경우에 시간에 대해 적분을 수행하여 위치를 구한 값과 시뮬레이션의 결과를 비교한 그래프를 Fig. 11에 나타내었다. DADS와 CADyna 모두 정확히 일치하고 있음을 알 수 있다. 관성모멘트 I를 적절히 조정하여 미끄럼이 수반되는 경우에 대해서도 정해와 일치하는 결과를 보인다.

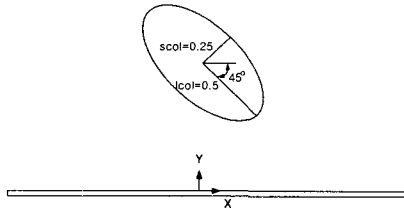


Fig. 12 Ellipsoid colliding with ground

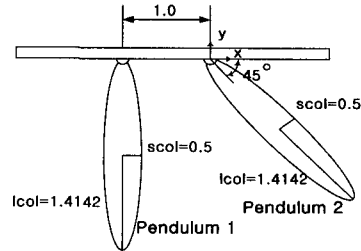


Fig. 14 Two elliptic pendulums

Table 3 Properties of ellipsoid body and ground

Stiffness	Damping	Major axis	Minor axis	Depth
10000 N/m	10 N · s/m	0.5 m	0.25 m	0.1 m

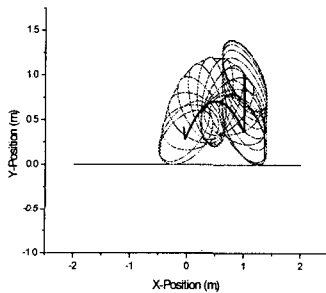


Fig. 13 Motion of ellipsoid

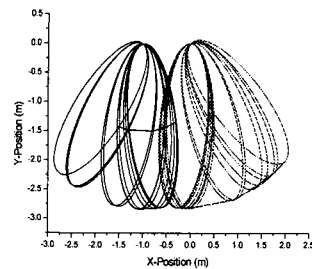


Fig. 15 Motion of each pendulum after contact

3.3 타원 형태를 갖는 물체의 자유 낙하

Fig. 12는 타원 형태의 외형을 갖는 물체가 자유 낙하하는 예제를 나타내었다. 장축의 길이는 0.5m이고, 단축의 길이는 0.25m로 모델링 하였다. 물체의 외형은 360개의 점 데이터로 표현을 하였다. 계에 작용하는 외력은 중력이고 중력 가속도는 9.8066 m/sec^2 의 크기를 갖는다. 충돌하는 두 물체의 물성치는 Table 3에 나타내었다. Fig. 13는 타원 물체의 외형과 중심이 시간에 대해 움직이는 양상을 나타내었다.

3.4 타원 형태를 갖는 두 진자의 충돌

Fig. 14은 타원 형태의 외형을 갖는 두 진자가 충돌하는 예제이다. 두 진자 모두 장축의 길이

는 1.4142m이고, 단축의 길이는 0.5m로 모델링 하였다. 두 진자의 외형은 360개의 점 데이터로 표현을 하였다. 계에 작용하는 외력은 중력이고 중력 가속도는 9.8066 m/sec^2 의 크기를 갖는다. 충돌하는 두 물체의 물성치는 앞의 예제와 같은 값을 사용하였다. Fig. 15는 시간에 대한 두 진자의 움직임을 나타낸 그래프이다.

4. 결론

본 연구에서는 평면에서 임의의 외형을 갖는 두 강체의 접촉 현상을 해석하였다. 외형의 표현을 일반적인 좌표의 데이터로 하였으며 예제를 원과 타원으로 국한 시켰으나 임의의 형상도 충분히 가능하다. 짧은 순간에 발생하는 접촉인 충돌해석과 지속적인 접촉 상태를 유지하는 형태의 접촉 해석을 마칠까지 고려하여 해석을 수행하였으며, 동역학 상용 프로그램인 DADS와 그 결과를 비교·검증하여 신뢰성을 추구하였다. 본 논문에서 수행한 수치 예제에서는 DADS와의 비교를 위해 한 물체의 외형이 원형인 경우에 대한 것만을 수행했으며 두 결과의 일치성을 통해 두 물체 모두가 임의의 형상을 갖는 물체들의 접촉

또한 그 결과의 신뢰성을 예측할 수 있었다. 이 신뢰성을 바탕으로 DADS에서 모델링이 어려운 두 물체 모두 원형이 아닌 경우에 대한 예제를 수행하여 두 물체 모두 임의의 형상을 가지는 경우에 대해서도 접촉해석이 가능함을 보였다. 예상된 두 접촉점들의 거리를 이용하여 적분 간격을 조정함으로써 해석 시간을 단축하였으며, 정확한 충돌 시간과 충돌 지점을 계산할 수 있었다.

후 기

본 연구는 부산대학교 기계공학부의 연구비 지원에 의해 이루어 졌음.

참고문헌

- (1) Greenwood D.T., 1965, *Principles of Dynamics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- (2) Meirovitch, L., 1970, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill.
- (3) Kane, T. R., 1968, *Dynamics*, Holt, Rinehart and Winston, Inc.
- (4) Wehage, R. A., 1980, "Generalized Coordinate Partitioning in Dynamic Analysis of Mechanical Systems," Ph.D. Dissertation, University of Iowa.
- (5) Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., 1984, "Dynamic Analysis of Constrained System of Rigid and Flexible Bodies with Intermittent Motion," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Paper No. 84-DET-116.
- (6) Goldsmith, W., 1960, *Impact, the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids*, Edward Arnold Ltd.
- (7) Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., 1987, "A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody System," *Mechanical and Machine Theory*, Vol. 22, NO. 3, pp. 213~224.
- (8) Hunt, K. H. and Grossley, F. R. E., 1975, "Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact," *ASME Journal of Applied Mechanics*, pp. 440~445.
- (9) CADSI, 2000, *DADS User's Manual*, Oakdale, Iowa, U.S.A.
- (10) Park, J. H., Yoo, H. H., Hwang, Y. and Yang, H. I., 2000, "Dynamic analysis of Constrained Multibody Systems Undergoing Collision," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 24, No. 2, pp. 535~542.
- (11) Lim, S. H., Sohn, J. H., Kim, K. S. and Yoo, W. S., 2001, "Development of Contact Module in AutoDyn7 Program," *Transactions of Korea Society of Automotive Engineers*, Vol. 9, No. 6, pp. 152~159.
- (12) Lankarani, H. M., and Nikravesh, P. E., 1990, "A Contact Force Model with Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 112, pp. 369~376.