Commun. Korean Math. Soc. **17** (2002), No. 2, pp. 189–205

L^2 조화미분형식과 극소초평면에의 응용

윤갑진

요약문. 본 요약논문에서는 리만다양체에서 정의되는 L^2 조화미분형식의 성질과 존재성에 대하여 알아보고 그 응용으로 유클리드 공간의 극소초평면에서 L^2 조화미분형식과 위상구조와의 관계를 살펴본다.

제 1 절 머리말

본 논문은 미분기하학 중에서 저자가 최근에 연구하고 있는 분야의 관심있는 내용을 중심으로 정리하여 요약한 것이다. 본 논문에서는 L^2 조화미분형식(harmonic differential form)의 기본적인 성질과 다양체에서의 존재성에 대하여 공부하고 극소초평면에의 응용에 대하여 다루고자 한다. 옹골다양체(compact manifold)의 경우 하지(Hodge)이론에 의하면 미분형식은 그것이 결정하는 코호몰로지(cohomology)에 항상 조화미분형식을 포함한다. 일반 미분형식과 달리 조화미분형식은 보크너-바이젠벡 (Bochner-Weitzenböck) 공식 등의 부등식 형태를 만족하기 때문에 미분다양체의 기하학적 또는 위상학적 구조를 조사하는데 해석학을 응용할 수 있는 장점을 가지고 있다. 한편, 비옹골다양체(noncompact manifold)에서도 조화미분형식을 생각할 수 있지만 하지이론은 일반적으로 성립하지 않는다. 따라서 조화미분형식이 다양체의 무한대에서의 행동을 제약받도록 할 필요가 있는데 이를 위한 가장 쉬운 방법이 L^2 성질을 추가하는 것이다. L^2 유계인 L^2 조화미분형식은 옹골다양체에서의 하지이론과 매우 흡사한 성질을 갖고 있다. 그러므로 L^2 조화미분형식은 비옹골다양체의 위상구조를 연구하는 하나의 방법으로 이용할 수 있다.

한편, 유클리드 공간의 극소초평면은 많은 수학자가 오랜 기간동안 연구하여 왔고 많은 결과들이 알려져 있다. 이 요약논문에서는 L^2 조화미분형식과 관련된 극히 제한된 내용만을 다룬다. 모델공간인 $\mathbb{R}^n$에서 L^2 조화미분형식이 존재하지 않는다. 이는 L^2 조화함수가 존재하지 않

Received January 28, 2002.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 53C21, 53A10, 53C42; Secondary 53C40.

Key words and phrases: L^2 조화미분형식, 극소다양체, 비옹골 리만다양체.

는다는 리우비(Liouville) 정리로부터 쉽게 증명할 수 있다. 따라서 $\mathbb{R}^n$과 기하학적 구조 또는 위상구조가 비슷한 극소다양체에는 L^2 조화미분형식이 존재하지 않을 것이라는 예상을 할 수 있다. 실제로 $\mathbb{R}^{n+1}$의 안정극소초평면의 경우에는 L^2 조화미분형식이 존재하지 않는다. 그러나 끝영역(end)이 두 개 이상인 극소초평면에는 0이 아닌 L^2 조화미분형식이 존재한다. 그러므로 안정극소초평면이 아닌 단순히 극소초평면인 경우에 L^2 조화미분형식이 존재하지 않기 위해서는 또 다른 기하학적 또는 위상학적 조건이 필요하다. 본 요약논문에서는 이러한 관점에서 극소초평면과 L^2 조화미분형식을 다루고자 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 옹골다양체와 조화미분형식에 대한 기본적인 성질을 이야기하고 하지분해정리에 대하여 알아본다. 3절에서는 비옹골다양체에서 정의되는 L^2 조화미분형식의 정의와 성질을 이야기한다. 4절에서는 비옹골다양체에서의 L^2 조화미분형식의 존재성에 대하여 논한다. 끝으로 5절에서는 유클리드 공간의 극소초평면과 L^2 조화미분형식의 응용에 대하여 다룬다.

이 논문에서 리만다양체는 연결집합(connected)이고 완비(complete)인 동시에 가향(orientable)임을 항상 가정하기로 한다.

제 2 절 옹골다양체와 조화미분형식

(M^n, g)를 n-차원 옹골 또는 비옹골 리만다양체라고 하자. M에서 정의된 미분형식 ω가

$$\Delta\omega = (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\omega = 0$$

을 만족할 때, **조화미분형식**이라고 부른다. 다양체 M의 p차 미분형식의 집합을 $\Omega^p(M)$으로 나타내고 p차 조화미분형식의 집합을 $H^p(M)$으로 나타내자. 이 두 집합은 모두 실수집합 위에서 벡터공간을 이룬다. 옹골다양체 M의 p차 미분형식 ω와 η에 대하여 $\langle\omega, \eta\rangle$를

$$\langle\omega, \eta\rangle = \int_M \omega \wedge \star\eta \tag{1}$$

라 정의하면 $\langle\ ,\ \rangle$는 $\Omega^p(M)$에서 내적공간을 이룬다. 여기서 $\star$는 하지연산자(Hodge operator)로 유클리드공간 $\mathbb{R}^n$의 경우,

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

일 때,

$$\star\omega = f dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$$

으로 정의된다.

하지이론에 의하면 옹골다양체에서 정의된 조화미분형식에 대해서 다음과 같은 기본정리가 성립한다. 이를 하지분해정리(Hodge Decomposition Theorem)라고 부른다 ([30]).

정리 2.1 (하지분해정리). *(M^n, g)을 n차원 옹골리만다양체라고 하자. 그러면*

(1) *각 $p \geq 0$에 대하여 $H^p(M)$은 유한차원이다.*

(2) *다음과 같은 분해정리가 성립한다:*

$$\Omega^p(M) = d(\Omega^{p-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(M)) \oplus H^p(M).$$

위의 정리 2.1에 있는 $\oplus$는 내적공간 $\langle\ ,\ \rangle$에 대한 직합(direct sum)을 나타낸다.

M의 p차 미분형식 ω가 $\mathrm{d}\omega = 0$을 만족할 때, *닫힌미분형식*(closed form)이라고 말하고, 만일 $(p-1)$차 미분형식 η가 존재하여 $\omega = \mathrm{d}\eta$를 만족하면 ω를 *완전미분형식*(exact form)이라고 말한다. p차 닫힌미분형식을 p차 완전미분형식으로 나눈 상공간

$$\{\text{닫힌미분형식}\}/\{\text{완전미분형식}\}$$

을 p차 드람코홀몰로지(DeRham cohomology)라고 부르고 $H^p_{DeR}(M)$으로 나타낸다. 다음 정리는 드람코호몰로지를 조화미분형식으로 나타낼 수 있음을 보여준다.

정리 2.2 ([30]). *$[\alpha] \in H^p_{DeR}(M)$이면 조화미분형식 $\omega \in H^p(M)$가 유일하게 존재하여 $[\alpha] = [\omega]$을 만족한다.*

조화미분형식은 보크너-바이젠벡(Bochner-Weitzenböck) 공식이라고 부르는 다음과 같은 등식을 만족한다 ([31]).

정리 2.3. *ω가 p차 조화미분형식이면*

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = |\nabla\omega|^2 + \langle \mathcal{R}(\omega), \omega\rangle.$$

여기서 ∇는 공변미분(covariant derivative)이고 $\mathcal{R}$은 곡률을 포함하는 항이다. 일반적인 미분형식에 비해 조화미분형식은 이러한 라플라스 연산자에 대한 멋진 형태의 공식을 만족하기 때문에 기하학에 해석학 도구를 사용할 수 있는 장점을 제공한다. 특히, 주어진 다양체의 곡률조건을 포함하는 문제에서는 매우 효과적으로 사용할 수 있다. (cf. [31])

제 3 절 비옹골다양체와 조화미분형식

이 절에서는 조화미분형식과 관련하여 옹골다양체 위에서 성립하는 개념이나 성질이 비옹골다양체 위에서도 똑같이 성립하는지에 대하여 알아보자.

비옹골다양체 M의 두 미분형식 ω와 η에 대하여 $\langle\omega, \eta\rangle$을 식 (1)과 같이 정의하면 $\langle\ ,\ \rangle$은 더이상 $\Omega^p(M)$의 내적이 되지 않는다. 그리고 조화미분형식 공간 $H^p(M)$도 일반적으로 유한차원이 아닐 뿐만 아니라, 하

지분해정리(정리 2.1)도 성립하지 않는다. 따라서 이러한 정의가 유용하기 위해서는 다른 조건을 첨부해야만 하는데 비옹골다양체에서 조건을 첨부하는 가장 쉬운 방법 중의 하나는 주어진 기하학적 개념이 무한대에서 활동을 제한받게 하는 것이다. 무한대에서의 활동을 제한하는 방법 중 가장 흔한 것은 제곱의 적분을 유한하게 하는 것이다. 이러한 입장에서 미분형식을 살펴보면 L^2 미분형식이라는 개념을 생각할 수 있다. 비옹골다양체의 경우에 L^2 미분형식을 생각하면 옹골다양체에서 성립하는 하지분해정리와 매우 비슷한 정리가 성립함을 알 수 있다.

정의 3.1. *미분형식 ω가 조화미분형식인 동시에 L^2 유계일 때, 즉,*

$$\Delta\omega = 0, \quad \int_M \omega \wedge \star\omega = \int_M |\omega|^2 \, dv_g < \infty$$

일 때, L^2 조화미분형식이라고 말한다.

다양체 M의 p차 L^2 미분형식 공간과 L^2 조화미분형식 공간을 각각 $L^2\Omega^p(M)$, $L^2H^p(M)$으로 나타내기로 한다. 이 공간들도 실수집합 위에서 벡터공간을 이룬다.

(M^n, g)을 비옹골 리만다양체라고 하자. 그러면 $\omega, \eta \in L^2\Omega^p(M)$에 대하여 $\langle \omega, \eta \rangle$를 식 (1)로 정의하면 $L^2\Omega^p(M)$은 힐버트 (Hilbert) 공간이 된다.

보기 3.1. *(M, ds^2)을 포앵카레(Poincare) 곡면이라고 하자. 다시 말해서 $M = B^2(1)$은 단위원판(unit disk)이고 $z = x + iy = (x, y)$를 좌표계라 할 때, 포앵카레 계량 ds^2은*

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}$$

로 주어진다.

$$\omega = u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

를 일차 L^2 조화미분형식이라고 하자. 그러면

$$\star\omega = udy - vdx$$

이고

$$\omega \wedge \star\omega = (u^2 + v^2)dx \wedge dy.$$

한편,

$$d\omega = (v_x - u_y)dx \wedge dy$$

이고

$$\delta\omega = u_x + v_y$$

이다. 그러므로

$$\omega = u(x, y)dx + v(x, y)dy \in L^2H^1(M)$$

이기 위한 필요충분조건은

$$u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = 0 \qquad \int\int_M (u^2 + v^2) dx \wedge dy < \infty$$

를 만족하는 것이다.

한편, 4절의 따름정리 4.1에 의하면 다양체의 부피가 무한이면 0 이외의 L^2 조화함수는 존재하지 않으므로 $L^2H^0(M) = \{0\}$. 더욱이 식 (7)에 의해 L^2 조화미분형식에 대하여 포앵카레 쌍대성이 성립하므로

$$L^2H^2(M) = L^2H^0(M) = \{0\}.$$

보기 3.2. $M = S^1 \times \mathbb{R}$이라 하고 $ds^2 = d\theta^2 + dt^2$을 곱계량(product metric)이라고 하자. (θ, t)는 $S^1 \times \mathbb{R}$의 좌표계이다.

$$\omega = u(\theta, t)d\theta + v(\theta, t)dt$$

를 L^2 일차 조화미분형식이라고 하면 보기 3.1에서와 같이

$$v_\theta - u_t = 0, \quad u_\theta + v_t = 0.$$

각각의 변수에 대하여 한 번 더 미분하면 u와 v가 각각 조화함수가 된다는 것을 알 수 있다. 또한 L^2 유계이므로 u와 v는 L^2 유계인 조화함수이다. 따라서 u와 v는 상수함수이고 (따름정리 4.1 참고) M의 넓이가 무한이므로 $u = v = 0$임을 알 수 있다. 그러므로 $M = S^1 \times \mathbb{R}$에는 일차 L^2 조화미분형식이 존재하지 않는다. 즉,

$$L^2H^1(M) = \{0\}.$$

한편, M의 넓이가 무한이므로 따름정리 4.1과 포앵카레 쌍대성에 의해

$$L^2H^2(M) = L^2H^0(M) = \{0\}$$

이고 따라서 곱리만계량을 갖는 원기둥면은 모든 $0 \le p \le 2$에 대하여

$$L^2H^p(M) = \{0\}$$

임을 알 수 있다.

하지분해정리가 성립하는 근본적인 이유는 경계가 없는 옹골다양체(닫힌다양체)는 스토크스(Stokes)정리 등의 부분적분이 가능하다는 것이다. 즉 M이 옹골리만다양체이면 $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$과 $\eta \in \Omega^p(M)$에 대하여

$$\langle \mathrm{d}\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \delta\eta \rangle. \tag{2}$$

또한 M이 옹골다양체이면

$$\Delta\omega = (\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})\omega = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}\omega = 0 \quad \text{이고} \quad \delta\omega = 0.$$

그러므로

$$\begin{aligned}\Delta(\Omega^p(M)) &= \mathrm{d}\delta(\Omega^p(M)) \oplus \delta\mathrm{d}(\Omega^p(M)) \\ &= \mathrm{d}(\Omega^{p-1}(M)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(M)).\end{aligned}$$

결과적으로

$$\Omega^p(M) = \Delta(\Omega^p(M)) \oplus H^p(M) \tag{3}$$

만 보이면 하지분해정리를 증명하는 셈이다.

위의 내용을 비옹골다양체에 적용하여보자. 미분연산자 $\mathrm{d}, \delta, \star$는 모두 국소적 개념이므로 M이 옹골다양체이거나 비옹골다양체일 때,

$$\mathrm{d}\omega \wedge \star\eta - \omega \wedge \star\delta\eta = \pm\mathrm{d}(\omega \wedge \star\eta) \tag{4}$$

이 성립한다.[1] 따라서 식 (2)가 성립하기 위해서는

$$\int_M \mathrm{d}(\omega \wedge \star\eta) = 0 \tag{5}$$

이어야만 한다. 식 (5)은 M이 옹골다양체이면 성립하지만 비옹골다양체인 경우에는 항상 성립하는 것은 아니다. 그러나 미분형식에 L^1 유계를 가정하면 스토크스정리가 성립함을 증명할 수 있다.

도움정리 3.1 ([16], [17]). *$(n-1)$차 미분형식 ω가 L^1 이고 $d\omega$ 또한 L^1이면*

$$\int_M d\omega = 0. \tag{6}$$

미분형식 ω가 L^1이라는 것은 각 점에서의 ω의 크기의 적분이 유한하다는 것을 의미한다. 즉,

$$\|\omega\|_{L^1} = \int_M |\omega(x)|\, dv(x) < \infty.$$

도움정리 3.1의 증명에서 M이 완비다양체라는 사실을 매우 요긴하게 사용한다. $\omega \in L^2\Omega^{p-1}(M)$이고 $\eta \in L^2\Omega^p(M)$이면 $\omega \wedge \star\eta$는 $(n-1)$차 L^1 미분형식이 된다.

안드레오티-베센티니 (Andreotti-Vesentini) 정리 또는 그로모프(Gromov) 의 결과에 의하면 L^2 미분형식 ω가 조화미분형식이 되기 위한 필요충분조건은 그것이 닫힌미분형식(closed form)인 동시에 여닫힌미분형식(coclosed form)이 되는 것이다. 위의 도움정리 3.1과 비슷한 방법을 이용하여 이를 증명할 수 있다.

정리 3.1 ([13], [17]). *ω가 L^2 미분형식이라고 하자. 그러면 $\Delta\omega = 0$이기 위한 필요충분조건은 $d\omega = \delta\omega = 0$이다.*

[1] 식 (4)에서 부호 $\pm$는 ω가 $(p-1)$차 미분형식이고 η가 p차 미분형식이면 $(-1)^{n+np+1}$을 나타낸다.

실제로 다음 식

$$\langle \Delta\omega, \omega\rangle = \langle \mathrm{d}\omega, \mathrm{d}\omega\rangle + \langle \delta\omega, \delta\omega\rangle$$

이 성립함을 보일 수 있다.

그러므로 도움정리 3.1과 정리 3.1에 의해 비옹골다양체인 경우에는 L^2미분형식에 대하여 다음과 같은 하지분해정리가 성립한다.

정리 3.2 ([17]). *(M^n, g)을 비옹골 리만다양체라고 하자. 그러면*

$$L^2\Omega^p(M) = L^2H^p(M) \oplus \overline{d(L^2\Omega^{p-1}(M))} \oplus \overline{\delta(L^2\Omega^{p+1}(M))}.$$

여기서 $\overline{\mathrm{d}(L^2\Omega^{p-1}(M))}$은 $\mathrm{d}(L^2\Omega^{p-1}(M)) \cap L^2\Omega^p(M)$의 $L^2\Omega^p(M)$에서의 폐포(closure)를 나타낸다. $\overline{\delta(L^2\Omega^{p+1}(M))}$도 비슷한 의미를 나타낸다.

또한 L^2 조화형식에 대해서는 포앵카레 쌍대(duality) 성질도 성립한다. 다시 말해서 하지연산자

$$\star : L^2H^p(M) \to L^2H^{n-p}(M) \tag{7}$$

는 동형사상이다.

참고 3.1. *옹골다양체에서 닫힌미분형식과 여닫힌미분형식을 이용하여 드람코호몰로지를 정의한다. 비슷한 방법으로 비옹골다양체에서도 L^2 코호몰로지를 정의할 수 있다. 한 예로 M이 비옹골 리만다양체라 하고 Γ를 M의 등장사상군의 부분군으로 상공간 M/Γ가 옹골다양체가 된다고 가정하자. 이 때, $B^p(M), Z^p(M)$을 각각*

$$B^p(M) = \{\omega \in L^2\Omega^p(M) \mid \text{적당한 } \eta \in L^2\Omega^{p-1}(M)\text{에 대하여 } \omega = d\eta\},$$

$$Z^p(M) = \{\omega \in L^2\Omega^p(M) \mid d\omega = 0\}$$

라 정의하자. 그러면 L^2 코호몰로지 $L^2H^p_{DeR}(M)$를

$$L^2H^p_{DeR}(M) = Z^p(M)/\overline{B^p(M)} \tag{8}$$

으로 정의할 수 있다. 이 경우에는 $L^2H^p_{DeR}(M)$이 p차 L^2 조화미분형식 공간 $L^2H^p(M)$과 동형이 된다는 것을 보일 수 있다. 참고문헌 [3], [11], [22]등에서 L^2 코호몰로지에 대하여 다루고 있다.

제 4 절 존재정리

이 절에서는 다양체의 기하학적 또는 위상학적 구조가 L^2 조화형식의 존재성에 미치는 영향에 대하여 다루고, 이와 관련된 가설에 대하여 논한다.

우선 0차 조화미분형식에 해당하는 조화함수에 대하여 생각하자. 다양체에서 정의된 0차 조화미분형식인 조화함수에 대한 성질은 1970년

대 이후 Yau에 의해 그 성질이 연구되어 왔고 그 이후 많은 수학자들에 의해 여러 결과들이 알려져 있다 ([20], [21], [26]).

L^2 조화함수의 존재성은 다양체의 부피와 밀접한 관련이 있다. 예를 들어 주어진 비옹골다양체 M의 부피가 유한하면 상수함수는 분명히 L^2 조화함수가 된다. 그러나 부피가 무한하면 0이 아닌 상수함수는 더 이상 L^2 조화함수가 될 수 없다. 다음 도움정리는 L^2 조화함수는 상수함수이어야 한다는 사실을 보여준다.

도움정리 4.1. *f가 리만다양체 (M, g)의 조화함수라고 하자. 만일*

$$\int_M f^2 \, dv_g < \infty$$

이면 f는 상수함수이다.

PROOF. 만일 M이 옹골다양체이면 호프정리에 의해 f는 상수함수이므로 M이 비옹골다양체라고 가정해도 된다. 가정에 의해

$$\Delta f = 0 \tag{9}$$

이고

$$\int_M f^2 < \infty. \tag{10}$$

한 점 p를 고정하고 반지름이 $2R > 0$인 측지공(geodesic ball) $B_p(2R)$을 생각하자. M이 완비(complete) 다양체이므로 다음 조건을 만족하는 절단함수(cut-off function) ξ가 존재한다:

$$\begin{aligned}
&0 \le \xi \le 1, \\
&B_p(R) \quad \text{에서} \quad \xi \equiv 1 \quad \text{이고} \quad M - B_p(2R) \quad \text{에서} \quad \xi = 0, \\
&|\nabla \xi| \le \frac{1}{R}.
\end{aligned}$$

식 (9)에 $\xi^2 f$를 곱하여 M 위에서 적분하면 부분적분법에 의해

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \xi^2 f \Delta f \\
&= -\int_M \xi^2 |\nabla f|^2 - 2\int_M \xi f \langle \nabla \xi, \nabla f \rangle.
\end{aligned}$$

따라서 코오시(Cauchy) 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_M \xi^2|\nabla f|^2 &\le 2\int_M |\xi f\langle\nabla\xi,\nabla f\rangle| \le 2\int_M \xi|f||\nabla\xi||\nabla f| \\ &\le \left(\int_{\mathrm{supp}(\xi)} f^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_p(2R)} \xi^2|\nabla\xi|^2|\nabla f|^2\right)^{1/2} \\ &\le \frac{1}{R}\left(\int_M f^2\right)^{1/2}\left(\int_{B_p(2R)} \xi^2|\nabla f|^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

그러므로

$$\int_{B_p(2R)} \xi^2|\nabla f|^2 \le \frac{1}{R^2}\int_M f^2. \tag{11}$$

이제 R을 무한대로 보내면 식 (11)에 의해 $|\nabla f| = 0$, 즉 f는 상수함수이다. □

따름정리 4.1. *리만다양체 M의 부피가 무한이면 0이 아닌 L^2 조화함수는 존재하지 않는다. 즉, $L^2H^0(M) = \{0\}$.*

다음에 비교적 간단한 형태의 리만다양체에서 정의된 L^2 조화미분형식의 존재성에 대하여 알아보자. $\mathbb{R}^n$의 극좌표를 $(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$으로 나타내자. 여기서 $(\theta_1, \cdots, \theta_{n-1})$는 $n-1$ 차원 단위구(unit sphere) S^{n-1}의 자연좌표이다. 이 자연좌표로부터 얻어지는 리만계량을 $ds^2_{S^{n-1}}$이라 할 때, $\mathbb{R}^n$의 평면리만계량(flat) $\mathrm{d}s^2$은

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 ds^2_{S^{n-1}} \tag{12}$$

으로 나타내어진다. 이제 n 차원 리만다양체 M이 $\mathbb{R}^n$과 미분동형이고 리만계량 g를

$$g = dr^2 + f(r)^2 ds^2_{S^{n-1}} \tag{13}$$

이라고 하자. 그러면 M의 부피형식(volume form) dv는 $dv = f(r)^{n-1}\,dr\,dv_{S^{n-1}}$이므로 M의 부피는

$$\int_M f(r)^{n-1}\,dr\,dv_{S^{n-1}} = \mathrm{vol}_{n-1}(S^{n-1})\int_0^\infty f(r)^{n-1}\,dr$$

으로 주어진다. 그러므로 $\int_0^\infty f(r)^{n-1}\,dr$이 유한이면 M의 부피는 유한이고 $\int_0^\infty f(r)^{n-1}\,dr$이 무한이면 M의 부피는 무한이 된다. 따라서 따름정리 4.1로부터 다음 사실이 성립한다.

$$L^2H^0(M) = L^2H^n(M) = \begin{cases} 0 & \left(\int_0^\infty f^{n-1}\,dr = \infty\text{일 때}\right), \\ \mathbb{R} & \left(\int_0^\infty f^{n-1}\,dr < \infty\right). \end{cases}$$

또한 다음 정리가 성립한다.

정리 4.1 ([12]). *M^n이 $\mathbb{R}^n$과 미분동형(diffeomorphic)이고 리만계량이*

$$ds^2 = dr^2 + f(r)^2 ds^2_{S^{n-1}}$$

이라고 하자. 그러면

(1) $L^2H^p(M) = \{0\}$ (단, $p \neq 0, \frac{n}{2}, n$).

(2) *n이 짝수이고* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dr}{f} = \infty$*이면*, $L^2H^{\frac{n}{2}}(M) = \{0\}$.

(3) *n이 짝수이고* $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dr}{f} < \infty$*이면*, $\dim L^2H^{\frac{n}{2}}(M) = \infty$.

M이 수면곡률이 -1인 쌍곡곡면인 경우에 식 (13)에 있는 함수 f는 $f(r) = \sinh r$이므로 정리 4.1를 적용하면 다음 따름정리를 얻는다.

따름정리 4.2. (1) *$M = \mathbb{R}^n$이 유클리드 공간이면 모든 $p = 0, \cdots, n$에 대하여*

$$L^2H^p(\mathbb{R}^n) = \{0\}.$$

(2) *$M = \mathbb{H}^n$이 쌍곡공간이면*

$$\begin{cases} L^2H^p(M) = \{0\} & (n \neq 2p) \\ L^2H^{\frac{n}{2}}(M) \neq \{0\} & (\text{단, } n\text{은 짝수}). \end{cases}$$

정리 4.1은 다음의 Hopf 가설과 매우 밀접하게 관련되어 있다.

가설 1 (Hopf). *M^{2m}이 $2m$차 옹골리만다양체이고 수면곡률 (sectional curvature)이 음수이면* $(-1)^m\chi(M) > 0$.

$\chi(M)$는 오일러특성수(Euler characteristic)를 나타낸다. M을 리만다양체라고 하고 Γ를 M의 등장사상군(isometry group)의 부분군으로 M/Γ가 옹골다양체라고 가정하자. 아티야(Atiyah)에 의하면 각각의 p차원 L^2 조화미분형식 공간 $L^2H^p(M)$에 0보다 크거나 같은 실수를 대응시키는 폰노이만(Von Neumann)차원 $\dim_\Gamma L^2H^p(M)$을 정의할 수 있다([3]). 이 실수를 p차 L^2 베티수(Betti number)라 부르고 $b^p(M;\Gamma)$라 나타낸다. 즉,

$$b^p(M;\Gamma) = \dim_\Gamma L^2H^p(M) < \infty.$$

그리고 베티수의 교대합을 M의 오일러특성수라고 부르고 $\chi(M;\Gamma)$로 나타낸다:

$$\chi(M;\Gamma) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b^p(M;\Gamma).$$

아티야의 결과에 의하면 다음 등식이 성립한다.

정리 4.2 ([3]). *위와 같은 가정하에서*

$$\chi(M;\Gamma) = \chi(M/\Gamma).$$

폰노이만 차원의 성질 중에서 가장 기초적인 성질은 $\dim_\Gamma L^2H^p(M) = 0$이기 위한 필요충분조건은 $L^2H^p(M) = \{0\}$인 것이다.

닫지욱(Dodziuk)과 싱거(Singer)는 호프의 가설과 아티야의 결과를 살펴보고 다음과 같은 가설을 제기하였다.

가설 2 ([10], [11]). [거짓가설] M^n이 단순연결(simply connected)집합이고 수면곡률 K가 $-a^2 \le K \le -1$, $a \ge 1$을 만족하면

$$\begin{cases} L^2H^p(M) = \{0\} & (p \ne \frac{n}{2}\text{일 때}), \\ \dim L^2H^{\frac{n}{2}}(M) = \infty & (n\text{이 짝수일 때}). \end{cases}$$

닫지욱-싱거의 가설이 사실이라고 가정하고 호프가설을 생각해보자. M^{2m}이 짝수차원의 옹골리만다양체로 수면곡률이 음수라고 하자. M의 보편덮개(universal covering) $\widetilde{M}$에 닫지욱-싱거 가설을 적용하면, 아티야의 결과(정리 4.2)에 의해

$$\chi(M) = (-1)^m \dim_{\pi_1(M)} L^2H^m(\widetilde{M}).$$

여기서 $\pi_1(M)$은 M의 기본군(fundamental group)을 나타낸다. 따라서

$$(-1)^m\chi(M) = \dim_{\pi_1(M)} L^2H^m(\widetilde{M}) > 0$$

가 되므로 호프가설을 증명하게 된다. 그러나 불행하게도 앤더슨(Anderson)의 다음 정리에 의하면 닫지욱-싱거 가설은 성립하지 않는다.

정리 4.3 ([1]). *$n \ge 2$, $0 < p < n$이고 $a \ge 1$, $a > |n-p|$라 하자. 그러면 수면곡률 K가 $-a^2 \le K \le -1$을 만족하는 단순연결 완비리만다양체 M이 존재하여*

$$\dim L^2H^p(M) = \infty$$

을 만족한다.

앤더슨은 곡률이 $-a^2$인 쌍곡공간 $\mathbb{H}^{2p}(-a^2)$과 곡률이 1인 단위구 $S^{n-2p}(1)$의 휘어진곱다양체(warped product manifold)

$$M = \mathbb{H}^{2p}(-a^2) \times_f S^{n-2p}(1)$$

을 생각하고 함수 $f : \mathbb{H}^{2p}(-a^2) \to \mathbb{R}^+$을 적당히 선택하여 곡률조건 $-a^2 \le K \le -1$을 만족시키지만 쌍곡공간 $\mathbb{H}^{2p}(-a^2)$의 성질을 이용하여 $L^2H^p(M)$이 무한차원임을 보였다.

정리 4.3에서 앤더슨이 제시한 다양체 $M = \mathbb{H}^{2p}(-a^2) \times_f S^{n-2p}(1)$ 는 단순열결이지만 축약가능한 (contractible) 공간은 아니다. 또한 다양체 M의 등장사상군 $\mathrm{Isom}(M)$은 상공간(quotient space) M/Γ가 옹골집합이 되는 부분군 Γ가 존재하지 않는다는 것이 알려져 있다. 그러므로 앤

더슨의 정리가 호프의 가설을 반증하는 예는 되지 않는다. 이러한 사실로부터 그로모프는 닫지욱-싱거의 가설에 대하여 다음과 같은 가설을 제기하였다.

가설 3 ([17]). *M^{2m}을 $2m$ 차원 리만다양체로 축약가능한 공간이라고 하자. 만일 등장사상군의 부분군 중에서 상공간이 옹골집합이 되는 부분군이 존재하면 $p \neq m$일 때,*

$$L^2H^p(M) = \{0\}.$$

4차원 경우를 생각해보자. M^4을 옹골리만다양체로 수면곡률이 $K < 0$라고 하자. $\widetilde{M}$을 M의 보편덮개라고 하면 곡률의 가정 $K < 0$에 의해 $\widetilde{M}$은 축약가능한 공간이 된다 (실제로 까르땅-아다마드 (Cartan-Hadamard) 정리에 의해 $\widetilde{M}$은 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$과 미분동형이다). 특히, 무한 부피를 갖는다. 따라서 도움정리 4.1과 포앵카레 쌍대성질 (7)에 의해

$$L^2H^0(\widetilde{M}) = L^2H^4(\widetilde{M}) = \{0\}$$

이고

$$L^2H^1(\widetilde{M}) = L^2H^3(\widetilde{M})$$

이다. 따라서 만일 $\widetilde{M}$ 위에 일차 L^2 조화미분형식이 없다는 사실을 보이면

$$(-1)^2\chi(M) = \dim_{\pi_1(M)} L^2H^2(\widetilde{M}) \geq 0$$

이 성립한다. 즉, 호프가설을 4 차원인 경우에 부분적으로 증명을 한 셈이 된다.

참고 4.1. *복소다양체(complex manifold)에서도 L^2 조화미분형식을 생각할 수 있다. [17]에서 그로모프는 n-복소차원 쾰러다양체 (Kähler manifold) M의 쾰러형식(Kähler form) ω가 $d-$ 일 때, 레프쉐쯔(Lefschetz) 연산자 $L^k : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+2k}(M)$, $L^k(\eta) = \omega^k \wedge \eta$를 이용하여 $n \neq \frac{n}{2}$이면 $L^2H^p(M) = \{0\}$임을 증명하였다. p차 미분형식 ω가 $d-$유계라는 것은 $(p-1)$차 미분형식 η가 존재하여 $\omega = d\eta$이고*

$$\|\eta\|_{L^\infty} = \sup_{x \in M} \|\eta(x)\|_g < \infty$$

를 만족하는 경우를 말한다. 여기서 g는 쾰러계량(Kähler metric)을 나타낸다.

또한 뒤틀림벡터다발(twisted vector bundle)과 접속(connection), 그리고 미분연산자의 텐서곱인 뒤틀림연산자를 이용하여 중간차원인 $\frac{n}{2}$차원인 경우 L^2 조화미분형식이 존재함을 증명하였다. 즉,

$$L^2H^{\frac{n}{2}}(M) \neq \{0\}.$$

제 5 절 극소초평면과 L^2 조화미분형식

이 절에서는 유클리드공간 $\mathbb{R}^{n+1}$의 극소초평면에서 정의된 L^2 조화미분형식의 존재성에 대하여 알아본다. 극소초평면의 기하학적 성질 또는 위상학적 성질은 그동안 많은 수학자들이 연구하여 왔다 ([5], [8], [19], [24]). 여기서는 L^2 조화미분형식에 국한하여 극히 제한된 내용만을 다루기로 한다.

$f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$을 M의 등장매입사상(isometric immersion)이라고 하고 ξ를 단위법벡터장(unit normal vector field)이라고 하자. M의 접벡터장(tangent vector field) X에 대하여 제2기본형식 (second fundamental form) A는

$$AX = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top$$

로 정의된다. 여기서 $(\bar{\nabla}_X \xi)^\top$는 $\bar{\nabla}_X \xi$의 접공간의 성분을 나타낸다. 제2기본형식의 대각합(trace)을 평균곡률(mean curvature)이라고 부르고 H로 나타낸다. $H \equiv 0$일 때, M을 극소 (minimal)다양체라고 부른다. 변분이론(variational theory) 입장에서 극소다양체를 알아보자. $D \subset M$을 유계인 영역(domain)이고 경계 ∂D가 매끄럽다(smooth)고 하자. $\epsilon > 0$에 대하여

$$F : (-\epsilon, \epsilon) \times D \to \mathbb{R}^{n+1}$$

을 $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$의 변분이라고 하자. 즉, $-\epsilon < t < \epsilon$인 t에 대하여 $F_t = F(t, \cdot)$가 매입사상이고 $F_0 = f$, 그리고 D의 경계 ∂D에서 F_t와 f의 함수값이 같다고 하자. $\dfrac{\partial}{\partial t}$를 $(-\epsilon, \epsilon) \times D$의 자연벡터장(canonical vector field)이라하고 수직단면(normal section) V를

$$V = F_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

라 정의하자. dv_t를 함수 F_t에 의해 유도된 D의 부피형식(volume form)이라 하면 부피 $\mathcal{A}(t)$는

$$\mathcal{A}(t) = \int_D dv_t$$

이고 $t = 0$에서 부피의 변화율은

$$\mathcal{A}'(0) = -\int_D \langle H\xi, V \rangle \, dv_0$$

으로 주어진다. 그러므로 M이 극소다양체일 필요충분조건은 임의의 유계영역 D와 수직변분 V에 대하여 $\mathcal{A}'(0) = 0$을 만족하는 것이다. 한편, 극소초평면 M^n이 각각의 유계영역 D와 수직변분 V에 대하여

$$\mathcal{A}''(0) \geq 0 \tag{14}$$

을 만족할 때, M을 안정(stable) 극소초평면이라고 부른다. 식 (14)는 $\phi \in C_0^1(M)$에 대하여 부등식

$$\int_M |A|^2\phi^2 \leq \int_M |\nabla\phi|^2$$

을 만족하는 것과 동치가 된다. 실제로 M을 품고 있는 광역공간 (ambient space)이 유클리드 공간 $\mathbb{R}^{n+1}$이면

$$\mathcal{A}''(0) = \int_D (|\nabla^\perp V|^2 - |A|^2\,|V|^2)\,dv$$

로 주어진다 ([19], [28]). 여기서 $\nabla^\perp$는 법벡터다발(normal bundle) $TM^\perp$에서 정의된 법접속(normal connection)이다. 함수 $\phi \in C_0^1(M)$에 대하여 $V = \phi\xi$라 하면 $\nabla^\perp\xi = 0$이므로 $|\nabla^\perp V|^2 = |\nabla\phi|^2$이 된다.

유클리드공간의 안정극소초평면에 관해 알려진 사실 중 우리의 주제와 관련된 정리를 몇 가지 언급해 보자.

정리 5.1 ([9], [15]). *M^n이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 안정 극소초평면이고 $\int_M |A|^2 < \infty$이면 M은 유클리드초평면 $\mathbb{R}^n$이 된다.*

정리 5.2 ([4], [27]). *M^n이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 안정 극소초평면이고 $\int_M |A|^n < \infty$이면 M은 유클리드초평면 $\mathbb{R}^n$이 된다.*

유클리드초평면 $\mathbb{R}^n$ 위에는 L^2 조화형식이 존재하지 않는다는 것을 4절에서 언급하였다. 따라서 위의 두 정리를 살펴볼 때, $\mathbb{R}^{n+1}$의 안정극소초평면 위에 L^2 조화형식이 존재하는지에 대한 질문을 할 수 있다. 다음 정리에 의하면 유클리드공간의 안정극소초평면 위에는 일차 L^2 조화미분형식이 존재하지 않는다.

정리 5.3 ([23]). *M^n이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 안정극소초평면이면, $L^2H^1(M) = \{0\}$.*

정리 5.4 ([29]). *M^4이 $\mathbb{R}^5$의 안정극소초평면이면 모든 $p \geq 0$에 대하여 $L^2H^p(M) = \{0\}$.*

다음에는 안정극소초평면이 아닌 단순히 극소초평면인 경우 L^2 조화미분형식의 존재성에 대하여 알아보자. 이 경우에는 조화함수의 존재성과 마찬가지로 주어진 극소초평면의 위상구조에 영향을 받는다. 특히, 다양체의 무한대에서의 위상구조인 끝영역(end)의 구조나 성질에 의해 L^2 조화미분형식의 존재성이 결정될 수 있다. 이와 관련하여 조화함수에 대하여 다음 성질이 성립한다.

정리 5.5 ([6]). *$\mathbb{R}^{n+1}$의 극소초평면 M이 두 개 이상의 끝영역을 가지면 M 위에는 유계이고 상수가 아닌 조화함수 f가 존재하여*

$$\int_M |\nabla f|^2\,dv < \infty$$

을 만족한다.

이 경우에 $\omega = \mathrm{d}f$라 정의하면 ω는 0이 아닌 L^2 조화미분형식이 된다. 그러므로 $\mathbb{R}^{n+1}$의 극소초평면 M의 끝영역이 두 개 이상이면 M은 0이 아닌 일차 L^2 조화미분형식이 존재한다. 즉, $L^2H^1(M) \neq \{0\}$. 정리 5.5와 쉔-야우(Schoen-Yau, [25])의 결과를 이용하면 $\mathbb{R}^{n+1}$의 안정극소초평면은 끝영역이 반드시 하나이어야 함을 알 수 있다 ([6]). 결과적으로 안정극소초평면이 아닌 $\mathbb{R}^{n+1}$의 극소초평면 M이 일차 L^2 조화미분형식을 갖지 않기 위해서는 또 다른 조건이 필요하다.

$n \geq 3$일 때, 유클리드공간의 극소초평면은 소볼레프(Sobolev) 부등식이 성립한다. 즉, M^n이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 극소초평면이면 차원 n에만 종속되어진 상수 $C = C(n) > 0$가 존재하여 $\phi \in C_0^1(M)$에 대하여

$$\left(\int_M \phi^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int_M |\nabla \phi|^2$$

을 만족한다. 호프만-스프럭(Hoffman-Spruck)에 의하면 상수 C를

$$C = C_s = \frac{4^{2(n+1)}}{\omega_n^{n/2}} \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^2$$

로 선택할 수 있다 ([18]).

정리 5.6 ([32]). *$M \subset \mathbb{R}^{n+1}$이 극소초평면이라고 하자. 만일 $n \geq 3$이고*

$$\int_M |A|^n \, dv < \left(\frac{1}{C_s}\right)^{n/2}$$

이면 $L^2H^1(M) = \{0\}$이고 따라서 $M = \mathbb{R}^n$이다.

앤더슨에 의하면 차원에만 종속되어진 충분히 작은 양의 상수 $\epsilon = \epsilon(n) > 0$이 존재하여 만일 M이 $\mathbb{R}^{n+1}$의 극소초평면이고 $\int_M |A|^n \, dv < \epsilon$이면 M은 유클리드 초평면 $\mathbb{R}^n$이 된다 ([2]). 위의 정리 5.6은 앤더슨의 정리에서 ϵ에 대한 정보를 제공한다.

참고 문헌

[1] M. T. Anderson, *L^2 harmonic forms and a conjecture of Dodziuk-Singer*, Bull. of AMS. **13** (1985), no. 2, 163–165.

[2] ———, *The compactification of a minimal submanifold in Euclidean space by the Gauss map*, Preprint.

[3] M. F. Atiyah, *Elliptic Operators, Discrete Groups and Von Neumann Algebras*, Société Mathématique de France Astérisque **32-33** (1976), 43–72.

[4] P. Bérard, *Remarques sur l'équation de J. Simons, Differential Geometry* (A symosium in honor of M. DoCarmo on his 60th birthday), Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. **52** (1991), 47–57.

[5] E. Bombieri (edt), *Seminar on Minimal Submanifolds*, Ann. of Mathematics Studies **103**, Priceton University Press, 1983.

[6] H-D Cao, Y. Shen, and S. Zhu, *The structure of stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^{n+1}$, Math. Res. Lett. **4** (1997), 637–644.

[7] J. Cheeger and M. Gromov, *L_2-cohomology and group cohomology*, Topology **25** (1986), 189–215.

[8] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II, *Miniaml surfaces*, Courant Lecture Notes **4**, CIMS, 1999.

[9] M. DoCarmo and C. K. Peng, *Stable complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *are planes*, Bull. of AMS. **1** (1979), 903–905.

[10] J. Dodziuk, *L^2 harmonic forms on complete manifolds*, Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press **102** (1982), 291–302.

[11] ———, *De Rham-Hodeg theory for L^2-cohomology of infinite coverings*, Topology **16** (1977), 157–165.

[12] ———, *L^2 harmonic forms on rotationally symmetric Riemannian manifolds*, Proc. of AMS. **77** (1979), 395–400.

[13] G. DeRham, *Varietes differentiables, formes, conrantes, formes harmoniques*, 2nd, ed., Actualite Sci. Indust., no. 122a, Hermann, Paris, 1960.

[14] H. Donnely and F. Xavier, *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **106** (1984), 169–185.

[15] D. Fischer-Colbrie and R. Schoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*, Comm. Pure and Appl. Math. **33** (1980), 199–211.

[16] M. Gaffney, *A spectial Stokes theorem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **60** (1954), 140–145.

[17] M. Gromov, *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 263–292.

[18] D. Hoffman and J. Spruck, *Sobolev and Iosperimetirc inequalities for Reimannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1975), 715–727.

[19] H. B. Lawson, *Lectures on Minimal Submanifolds*, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1980.

[20] P. Li, *Lecture Notes in Deometric Analysis*, Research Institute of Mathematics, GARC and Seoul National University, 1993, no. 6.

[21] ———, *Curvature and Function Theory on Reimannian Manifolds*, Preprint, 1997.

[22] J. Lott, *L^2 cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifolds*, GAFA(Geometric And Functional Analysis) **7** (1997), 81–119.

[23] R. Miyaoka, *Harmonic 1-forms on a complete stable minimal hypersurfaces*, Geometry and Global Analysis (Sendai 1993), Tohoku Univ., 1993, pp. 289–293.

[24] R. Osserman, *A Survey of Manimal Surfaces*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1969.

[25] R. Schoen and S-T. Yau, *Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds of nonnegative Ricci curvature*, Comm. Math. Helv. **51** (1976), 333–341.

[26] ———, *Lectures on Defferential Geometry, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology*, vol. 1, International Press, 1994.

[27] Y-B. Shen and X-H Zhu, *On stable minimal hypersurfaces in* $\mathbb{R}^{n+1}$, Amer. Jour. of Math. **120** (1998), 103–116.
[28] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **88** (1968), 62–105.
[29] S. Tanno, *L^2 harmonic forms and stability of minimal hypersurfaces*, Jour. of Math. Soc. Japan **48** (1996), 761–768.
[30] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott, Foresman and Company, 1971.
[31] H. Wu, *The Bochner Technique in Differential Geometry*, Preprint.
[32] G. Yun, *Total scalar curvature and L^2 harmonic one forms on a miniaml hypersurface in Euclidean space*, will appear in Geometriae Dedicata.

명지대학교 이과대학 수학과
경기도 용인시 남동 산 38-2
449-728
E-mail: gabjin@wh.myongji.ac.kr