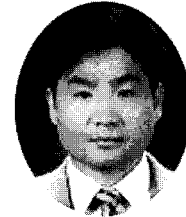


## 횡진동하는 보에 대한 4가지 진동이론



이 성 수\*

### 1. 서 론

번역기사로 소개하고자 하는 본 논문의 원고에서는 횡진동하는 보의 해석에 사용되는 4가지 보 모델에 대하여 전반적인 유도과정과 분석을 소개하고 있다. 4가지 모델은 Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear, Timoshenko 모델이다.

원고의 구성은 먼저, 각각의 보 모델에 대해 간단하게 역사적인 흐름과 개요를 살펴보고 있고, 두 번째로 Hamilton의 진동이론을 사용하여 각 모델에 대한 운동방정식과 경계조건을 유도하고 있다. 세 번째로, 양단자유, 양단고정, 양단힌지, 켄틸레버의 4가지 경계조건에 대한 진동수 식(Frequency Equation)을 구성하였다. 진동수 식의 기본식은 “표준파동계수”(Normalized Wave Numbers)의 함수로 표현된다. 네 번째로 고유치함수 또는 모드형상의 직교조건과 고유치함수의 확장(Eigenfunction Expansion)을 이용하여 가진응답을 구하는 과정을 소개한다. 그리고, 최종적으로 4가지 보 모델링에 대한 차이점을 확인하기 위하여 비세장보(Non-slender Beam)에 대한 수치적 예제를 제시하고 있다.

본 번역기사에서는 원문이 54쪽에 이르는 많은

분량이므로, 원문의 소개 차원에서 4가지 진동이론에 대한 개요와 각 이론에 의한 진동응답의 비교에 관한 내용을 발췌하여 정리하기로 한다. 원문의 1~5장 중에서 1장과 4장에 해당한다.

### 2. 보이론의 소개

횡진동하는 보의 편미분 운동방정식과 외력함수, 경계조건, 초기조건 등으로 수식화 될 수 있는 것으로 이에 대한 보진동이론은 이미 1921년 이전에 모두 소개된 것이다. 이후로, 비균질 초기-경계치(Non-homogeneous Initial-boundary-value Problem)에 대한 해석방법을 이해하고 이를 구하고자 하는 많은 노력이 진행되었다. 그러나, 이러한 연구는 해석모델의 부분적 보완을 제공하는 수준에서 진행되었고, 4가지 모델에 대해 편미분 지배방정식과 그 해에 대한 전반적인 분석을 제시하는 논문은 발표되지 않았다. 1953년에 이르러 Traill-Nash & Collar<sup>2)</sup>에 의해 완성도가 높은 연구가 제시되기는 하였는데, 이 논문 역시 4가지 모델의 여러 가지 경계조건에 대한 진동수 식의 유도과정만 발표하고 있다. 본 논문에서는, 각 모델의 편미분 운동방

\* 군산대학교 건축공학과 전임강사

정식을 전개하여 각각의 경계조건에 대한 진동수 식, 무차원의 파동계수(Wave Number)로 표현되는 진동수 식의 해석, 고유치함수 간의 직교조건 그리고, 고유치함수의 확장을 이용하여 비균질 초기-경계치에 대한 전체 해석을 구하고 있다.

공학적 응용이 용이하도록, 무차원 파동계수는 표로 정리하거나 세장비에 대한 함수그래프로 도시하여 주어진 형상과 물리적인 조건으로부터 고유진동수를 바로 구할 수 있도록 하였다. 그리고, 네가지 모델에 대한 무차원 파동계수와 고유진동수를 비교하여 제시함으로써, 보의 세장비가 증가함에 따라 Euler-Bernoulli 모델에 의한 값과 다른 모델에 의한 값의 차이가 단조감소하고 있음을 보여주고 있다. 또한, 각각의 모델간에 현저한 차이가 있음을 보여주는 비세장형 보에 대한 수치적 예제를 제시하고 있다.

4가지 모델에 대한 발전과정을 간단히 살펴보기로 한다.

보이론의 정확한 정식화에 관한 연구는 Pochhammer (1876)과 Chree(1889)에 의하여 일반적인 탄성방정식의 형태로 처음으로 연구되었다. 이들이 유도한 방정식은 강체 실린더의 진동을 해석하고 있는데, 이 식은 일반적인 적용에서 필요로 하는 것보다 너무 많은 내용을 담고 있으므로 문제 전체를 해석하기에는 실용적이지 못하였다. 즉, 횡변위에 대한 근사해석법으로도 충분하였다.

보이론을 연구하였던 초기의 연구자들은 보의 휨효과(Bending Effect)가 횡진동하는 보에 있어서 가장 중요한 요소로 이해하였다. Euler-Bernoulli 모델은 휨에 의한 변형에너지와 횡변위에 의한 운동에너지를 포함하고 있다. Euler-Bernoulli 모델의 역사는 18세기부터 시작된다. Jacob Bernoulli(1654-1705)는 탄성보 임의점에서의 곡률은 그 점의 휨모멘트에 비례한다는 사실을 처음으로 발견하였으며, Jacob의 조카인 Daniel Bernoulli(1700-1782)는 진동하는 보에 대한 편미분 운동방정식을 처음으로 정식화하였다. 그 후에, 여러 가지 하중조건에 대한 탄성보의 처짐형상을 연구하던 Leonhard Euler (1707-1783)는 Jacob Bernoulli의 이론을 이용하여 탄성 휨곡선에 대한 많은 이론을 발전시키게 되었

다. 이러한 과정으로 개발된 Euler-Bernoulli 보이론은 다양한 문제에 있어서 공학적으로 타당한 근사값을 구할 수 있고 그 이론이 간단하여 가장 일반적으로 사용되고 있다. Euler-Bernoulli 보이론은 종종 고전적 보이론(Classical Beam Theory), Euler 보이론, Bernoulli 보이론, 또는 Bernoulli-Euler 보이론으로 불리우기도 한다. 그러나, Euler-Bernoulli 보이론을 적용하여 구한 고유진동수는 약간 과대 해석되는 경향이 있고, 이러한 문제는 고차모드의 고유진동수에서 그 경향이 더욱 커지게 된다. 또한, 보의 세장비가 낮아질수록 고유진동수의 계산값은 정확도가 낮아지는 경향이 있다.

Rayleigh 보이론(1877)은 기존의 Euler-Bernoulli 이론에 단면의 회전효과(Rotation of the Cross-section)를 포함시킴으로서 고유진동수를 과대해석하는 경향을 개선하고자 하였다. 그러나, 개선의 정도는 부분적이고 미소한 것으로서 고유진동수는 Rayleigh 보이론에 의해서도 여전히 과대평가된다.

Shear 모델은 Euler-Bernoulli 모델에 전단비틀림(Shear Distortion) 효과를 추가하는 개념으로서, 순수전단모델(Pure Shear Model) 또는 단순전단보 모델(Simple Shear Beam)과는 구분하여야 한다. 순수전단모델에서는 전단비틀림과 회전관성만 고려하는 것이며, 단순전단보모델은 전단비틀림과 횡변위(Lateral Displacement)만을 고려하는 것이다.

순수전단모델과 단순전단보모델에서는 Euler-Bernoulli 모델에서의 가장 중요한 개념인 휨효과(Bending Effect)를 고려하지 않는 것으로서, Euler-Bernoulli 모델을 개선하고자 하는 목적과는 맞지 않는 방법이다. 그러나, 기존의 Euler-Bernoulli 모델에 전단비틀림 효과가 고려되는 Shear 모델을 사용하게 되면 이전의 단점이 크게 개선된다.

Timoshenko(1921, 1922)는 Euler-Bernoulli 모델에 전단효과와 회전효과를 모두 고려하는 보이론을 발표하였다. Timoshenko 보이론을 적용하게 되면 전단이나 회전효과가 커지게 되는 비세장보 또는 고차모드의 진동응답 해석이 보다 정확해진다. Timoshenko 이후로 Kruszewski(1949), Traill-Nash & Collar(1953), Dolph(1954), Huang(1961) 등의 여러 연구자들에 의하여 Timoshenko 보이론이 응용되어 다양한 경계조건에 대한 진동수 식과 모드

형상이 유도되었다.

Kruszewski는 켈틸레버보에 대한 3차모드까지의 역대칭 모드를 구하였고, 양단자유보에 대해서는 대칭과 역대칭의 3차모드를 구하였다.

Traill-Nash & Collar는 등단면보(Uniform Beam)에 대하여 매우 완벽한 이론적 해석방법과 실험결과를 제시하였다. 이들이 제시한 논문의 첫 번째 부분에서, 켈틸레버, 양단자유, 힌지-자유단, 양단힌지, 양단고정, 고정-힌지단으로 구성되는 일반적인 여섯가지 경계조건에 대하여 모드형상과 진동수식을 정리하고 있으며, 두 번째 부분에서는 Euler-Bernoulli, Shear, Timoshenko 보이론으로 구한 수치적 해석결과와 함께 실험적으로 구한 결과를 비교하여 발표하였다. 이들의 연구에 사용한 보는 전단효과와 회전효과가 중요해지는 비세장보를 채택하였다. 이 논문에서는 3가지의 보이론으로 구한 1차, 2차의 고유진동수와 실험적으로 구한 1차, 2차의 고유진동수 값을 비교하여 그 차이를 분석하고 있다. 논문에서 제시하는 결과를 요약하면 표 1과 같다.

Huang(1961)은 6가지 경계조건의 모드형상에 대한 식과 진동수 식을 독자적으로 구하였다. 진동수 식의 해석과정은 단순보에 대한 것을 제외하고는 그 방법이 쉽지 않다. 진동수 식의 기본식을 구하였다고 하여도, 이들을 의미있는 방법으로 전개하는 과정도 매우 복잡하다. Traill-Nash & Collar(1953), Dolph(1954), Huang(1961), Abbas & Thomas(1977)은 각기 다른 방법으로 진동수 식의 기본식을 제시하고 있다.

Kruszewski, Traill-Nash & Collar, Huang은 모드형상과 고유진동수에 대한 수식만 정리하였고, 초기조건과 외력에 대한 보의 진동응답을 완전히 해석하지는 못하였다. 진동응답을 완전히 해석하기 위해서는 고유치함수의 직교조건에 대한 이해가 필요하다. Dolph(1954)와 Hermann(1955)는 독자적인 방법으로 Timoshenko 보의 직교조건을 정

리하였다. Dolph는 외력이 작용하지 않는 상태에서의 양단힌지보에 대한 초기-경계조건 문제의 해석하였다. 외력이 작용하는 경우에 대한 초기-경계값 문제의 해석이나 시간에 따라 변화하는 경계조건 문제의 해석에 사용되는 방법에 대해서는 논문에서 간단히 언급하고 있다. 외력과 초기조건을 받은 Timoshenko 보의 응답해석에 사용되는 일반적인 방법은 Reismann & Pawlik(1974)가 저술한 "Elastokinetics"에 정리되어 있다. 여기에서 이들은 고유치함수의 확장법(the Method of Eigenfunction Expansion)을 사용하고 있다.

Timoshenko 보이론에서의 가장 핵심적인 인자는 형상계수(Shape Factor)이다. 형상계수는 전단계수(Shear Coefficient) 또는 면적저감계수(Area Reduction Factor)라 불리기도 한다. 보단면에 걸쳐서 전단력이 일정한 상수값이 아니므로 형상계수가 중요한 인자로 의미를 갖게 된다. 형상계수는 프와송비, 진동수, 단면형상에 대한 함수로 표시되는데, 일반적으로 진동수에 의한 영향은 무시된다. Davies(1948), Mindlin & Deresiewicz(1954), Cowper(1966), Spence & Seldin(1970)은 프와송비와 단면형상의 함수로 형상계수를 계산하는 방법을 제안하였다.

보다 새롭고 우수한 보이론을 개발하고자 하는 지속적인 노력에도 불구하고 여전히 가장 일반적으로 광범위하게 사용되고 있는 보이론은 Euler-Bernoulli 보이론과 Timoshenko 보이론이다.

4가지 모델에서의 기본 가정은 다음과 같고, 이들 보이론을 간략히 정리하면 표 2와 같다.

1. 축방향의 길이에 비하여 나머지 다른 2축의 길이는 미소하다.
2. 사용되는 재료는 선형탄성이다.
3. 프와송 효과는 무시한다.
4. 단면은 대칭이고 중립축과 도심축은 일치한다.

표 1 Traill-Nash & Collar(1953)이 구한 실험값과 해석값의 백분율 편차

Beam Models	First Natural Frequency	Second Natural Frequency
Euler-Bernoulli	+14% ~ +26%	+78% ~ +133%
Shear	0% ~ +3%	-1% ~ +6%
Timoshenko	-1% ~ 2%	-1% ~ +6%

표 2 4가지 보이론

Beam Model	Bending Moment	Lateral Displacement	Shear Deformation	Rotary Inertia
Euler-Bernoulli	✓	✓	×	×
Rayleigh	✓	✓	×	✓
Shear	✓	✓	✓	×
Timoshenko	✓	✓	✓	✓

- 중립축에 수직인 면은 휨변형 후에도 수직을 유지한다.
- 회전각은 미소하고, 미소회전각의 가정을 적용할 수 있다.

$$\frac{\rho}{k'G} = \frac{\rho}{k'} \frac{E^*I^*}{G^*L^{*4}} = \frac{\rho}{k'} \frac{E^*I}{G^*}$$

$$= \rho I \frac{2(1+\nu)}{k'} = \rho I \gamma^2$$

### 3. 4가지 보이론의 비교

3장은 원문의 4장에 해당하며 2장과 3장은 생략하였다. 2장에는 4가지 보이론에 대한 경계조건과 운동방정식을 정리하고 있으며, 3장에서는 각각에 대한 모드형상과 고유진동수 식을 유도하고 있다.

4가지 보이론에서의 차이점은 회전과 전단이라는 2가지 2차 효과의 포함여부이다. Euler-Bernoulli 모델은 이동과 휨이라는 1차 효과만 고려하고 있다. Rayleigh 모델은 1차 효과 외에도 2차 효과의 회전효과를 포함하고 있으며, Shear 모델은 전단효과를 포함하고 있고, Timoshenko 모델은 회전과 관성의 2가지 2차효과를 모두 포함하고 있다. 회전과 전단효과의 상대적인 중요성을 비교해보고, 모드형상과 고유진동수에서 이것이 어떻게 반영되는지를 살펴보기로 하자.

회전효과는  $\rho I$ 로 표현하고, 전단효과는  $\rho/k'G$ 로 표현할 수 있다. 전단은 회전에 대하여  $\gamma^2$ 배 이므로 이를 정리하면 다음과 같다.

프와송비  $\nu$ 는 재료의 성질에 따른 물리적 상수이고, 전단계수(형상계수)  $k'$ 은 프와송비와 단면형상에 따라 달라지는 값으로, 여러 가지 단면에 대한 전단계수를 정리하면 표 3과 같다. 일반적인 강재에서의 프와송비 약 0.3에 대한 전단계수는 박판각형강관에서의 0.436부터 원형단면의 0.886 범위에 있다. 이 값으로부터  $\gamma^2$ 을 구해보면, 그 값은 원형단면의 2.935에서 박판각형강관의 5.96에 이른다. 여기에서 일반적인 재료와 단면을 갖은 경우에 전단이 회전에 비하여 약 3~6배임을 확인할 수 있다.

전단이나 회전의 2차 효과가 중요해지는 상황을 분석해보자. 3장에서 정리한 표 4~8의 진동수 식을 살펴보면, Euler-Bernoulli 모델의 진동수 식은 부재의 물리적 성질이나 형상에 관계가 없음을 볼 수 있다. 따라서 파동계수  $a$ 는 여러 가지 물리적 성질이나 계수 등에 영향을 받지 않는다. 한편, Rayleigh 모델의 진동수 식에는  $a$ 와  $b$ 의 2가지 파동계수가 있고 이에 대한 함수로 표현되며,  $a$ 와  $b$ 는 세장비  $s$ 와 함수관계가 있다. Shear 모델과 Timoshenko

표 3 전단계수

단면	$k'$
Circle	$\frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$
Hollow Circle( $m = r_{\text{inner}}/r_{\text{outer}}$ )	$\frac{6(1+\nu)(1+m^2)^2}{(7+6\nu)(1+m^2)^2 + (20+12\nu)m^2}$
Rectangle	$\frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$
Thin-Walled Round Tube	$\frac{2(1+\nu)}{4+3\nu}$
Thin-Walled Square Tube	$\frac{20(1+\nu)}{48+39\nu}$

표 4 Euler-Bernoulli 모델에 의한 진동수 식과 파동계수

경계조건	Frequency Eq.	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
양단고정, 양단자유	$\cos a \cosh a - 1 = 0$	4.730	7.853	10.996	14.137	17.279
양단힌지, 양단이동	$\sin a \sinh a = 0$	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	$5\pi$
켄틸레버	$\cos a \cosh a + 1 = 0$	1.875	4.694	7.855	10.996	14.137

표 5 Rayleigh 모델에 의한 진동수 식

경계조건	Frequency Equation
양단자유	$(b^6 - a^6) \sin a \sinh b + 2a^3 b^3 \cos a \cosh b - 2a^3 b^3 = 0$
양단고정	$(b^2 - a^2) \sin a \sinh b - 2ab \cos a \cosh b + 2ab = 0$
양단힌지 또는 양단이동	$\sin a \sinh b = 0$
켄틸레버	$(b^2 - a^2) ab \sin a \sinh b + (b^4 + a^4) \cos a \cosh b + 2a^2 b^2 = 0$

표 6 Shear 모델에 의한 진동수 식

경계조건	Frequency Equation
양단자유	$(b^2 - a^2) \sin a \sinh b - 2ab \cos a \cosh b + 2ab = 0$
양단고정	$(b^6 - a^6) \sin a \sinh b + 2a^3 b^3 \cos a \cosh b - 2a^3 b^3 = 0$
양단힌지 또는 양단이동	$\sin a \sinh b = 0$
켄틸레버	$(b^2 - a^2) ab \sin a \sinh b + (b^4 + a^4) \cos a \cosh b + 2a^2 b^2 = 0$

표 7 Timoshenko 모델에 의한 진동수 식 ( $a < a_c$  인 경우)

경계조건	Frequency Equation
양단자유	$\frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + \gamma^2 ab - ab)(a^2 + b^2 - \gamma^2 ab + ab)}{2ab(b^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 + \gamma^2 b^2)} \sin a \sinh b - \cos a \cosh b + 1 = 0$
양단고정	$\frac{(a^2 - b^2)(\gamma^2 a^2 + \gamma^2 b^2 + \gamma^2 ab - ab)(\gamma^2 a^2 + \gamma^2 b^2 - \gamma^2 ab + ab)}{2ab(b^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 + \gamma^2 b^2)} \sin a \sinh b - \cos a \cosh b + 1 = 0$
양단힌지	$\sin a \sinh b = 0$
켄틸레버	$(a^2 - b^2) \sin a \sinh b - ab \frac{(a^4 + a^4 \gamma^4 + 4\gamma^2 a^2 b^2 + b^4 \gamma^4 + b^4)}{(b^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 + \gamma^2 b^2)} \cos a \cosh b - 2ab = 0$

표 8 Timoshenko 모델에 의한 진동수 식 ( $a > a_c$  인 경우)

경계조건	Frequency Equation
양단자유	$\frac{(a^2 + \bar{b}^2)[(a^2 - \bar{b}^2)^2 + (a\bar{b}\gamma^2 - a\bar{b})^2]}{2a\bar{b}(-\bar{b}^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 - \gamma^2 \bar{b}^2)} \sin a \sinh \bar{b} - \cos a \cosh \bar{b} + 1 = 0$
양단고정	$\frac{(a^2 + \bar{b}^2)[(\gamma^2 a^2 - \gamma^2 \bar{b}^2)^2 + (\gamma^2 a\bar{b} - a\bar{b})^2]}{2a\bar{b}(-\bar{b}^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 - \gamma^2 \bar{b}^2)} \sin a \sinh \bar{b} - \cos a \cosh \bar{b} + 1 = 0$
양단힌지	$\sin a \sinh \bar{b} = 0$
켄틸레버	$(a^2 + \bar{b}^2) \sin a \sinh \bar{b} - a\bar{b} \frac{(a^4 + a^4 \gamma^4 - 4\gamma^2 a^2 \bar{b}^2 + \bar{b}^4 \gamma^4 + \bar{b}^4)}{(-\bar{b}^2 + \gamma^2 a^2)(a^2 - \gamma^2 \bar{b}^2)} \cos a \cosh \bar{b} - 2a\bar{b} = 0$

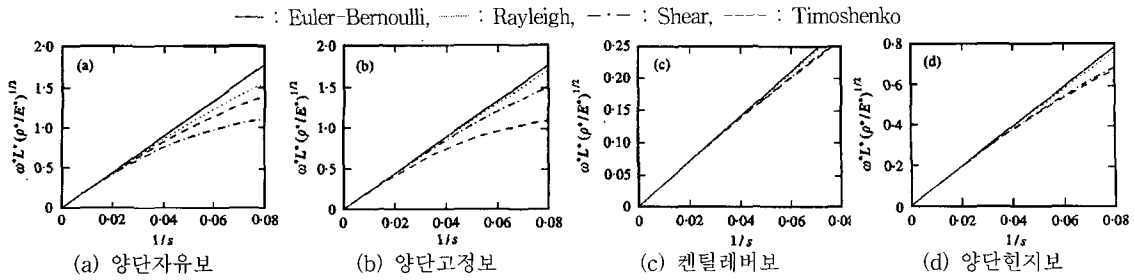


그림 1 1차 고유진동수에 대한 진동수 곡선

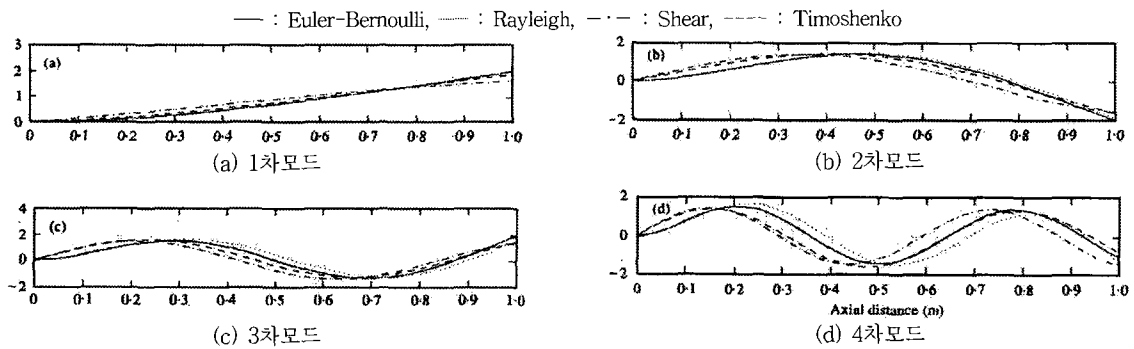


그림 2 캔틸레버보의 1차~4차 모드형상

모델의 진동수 식은  $s$ 와  $\gamma(\gamma^2=2(1+\nu)/k')$ 와 관계가 있다. 따라서, 파동계수는 부재의 형상과 물리적인 성질에 모두 영향을 받게 된다.

파동계수에 대한  $s$  또는  $\gamma$ 의 영향은 3장에서 제시하는 그림 5~8, 그림 13~16, 그림 21에서 살펴볼 수 있다.(원문 참조) 대체적으로,  $s$ 가 감소하고  $\gamma$ 가 증가함에 따라 파동계수는 Euler-Bernoulli 모델에 의한 것과 편차가 커지게 된다. 그러나,  $\gamma^2$ 의 범위는 보다 제한적이므로(일반적인 강재와 단면에 대하여,<sup>3~6</sup>) 파동계수는 세장비와 긴밀한 함수 관계가 됨을 알 수 있다.

그림 1은 4가지 모델에 의하여 1차 고유진동수를 구한 수치적 예제를 정리한 것이다. 고유진동수는  $L\sqrt{\rho^*/E^*}$ 를 곱하여 구할 수 있고, 여기에서  $\gamma=2.205$ 가 사용되었다. Euler-Bernoulli 모델에 의한 고유

진동수는 실선의 직선이다. 그림 1에서, Euler-Bernoulli 모델에 의해 구한 고유진동수는 세장비가 감소함에 따라 무한히 증가하고, 다른 3가지 모델로 구한 값은 어느 한계값에 수렴하고 있음을 볼 수 있다. 그림 2는  $s=9.1192$ ,  $\gamma=2.205$ 인 경우의 캔틸레버 보에 대한 1차~4차 모드형상이다. 그림을 살펴보면, Euler-Bernoulli 모델과 Rayleigh 모델을 사용하여 구한 모드형상이 서로 유사하고, Shear 모델과 Timoshenko 모델에 의해 구한 모드형상이 서로 유사하다. 이것으로부터 유추해볼 때, 진단에 의한 영향이 회전에 의한 영향보다 훨씬 더 크게 작용하고 있음을 알 수 있다.

즉, 세장비가 큰( $s > 100$ ) 경우에는 Euler-Bernoulli 모델을 사용하고, 세장비가 작은 경우에는 Shear 모델 또는 Timoshenko 모델을 적용해야 한다.