

수평하중을 받는 골조의 거동

양재근*

1. 서론

최근 보와 기둥의 접합부 강성, 지점의 경계조건, 보와 기둥의 강성비, 가새 보강 유무, 기둥과 가새의 세장비 등을 변수로 다양한 하중을 받는 골조의 거동 특성에 관한 연구가 진행되고 있고, 또한 많은 식들이 제안되었다.

본 논문은 보강 안된 골조(Unbraced Frames)와 다양한 보강된 골조(Braced Frames) 중에서 지점 보강된 골조(Point Braced Frames)와 Knee-가새 골조(Knee-Braced Frames)를 중심으로 연구하여 각각의 골조가 정적 수평하중을 받을 때 나타나는 수평처짐과 부재의 좌굴에 대한 해석식을 제안하고자 한다. 다음으로 이러한 제안된 식을 이용하여 얻은 결과들을 상용 프로그램인 ABAQUS를^{1,2)} 이용한 2차원 유한요소 해석법에 의한 결과와 비교하여 제안된 해석식의 적용에 대한 타당성을 보이고자 한다.

2. 보강 안된 골조(Unbraced Frames)

보와 기둥은 강접되고, 기둥의 하단은 활절로 이상화된 그림 1과 같은 단층 단일 스패 골조가(single

story one bay frame) 수평하중을 받는 경우의 거동을 파악하고자 한다.

수평하중만이 작용하는 경우 골조의 수평처짐은³⁾ 아래의 식(1)과 같다.

$$\Delta_s = \Delta_{beam} + \Delta_{column} = -\left(\frac{P_H h^2 L}{12EI_b}\right) - \left(\frac{P_H h^3}{6EI_c}\right) \quad (1)$$

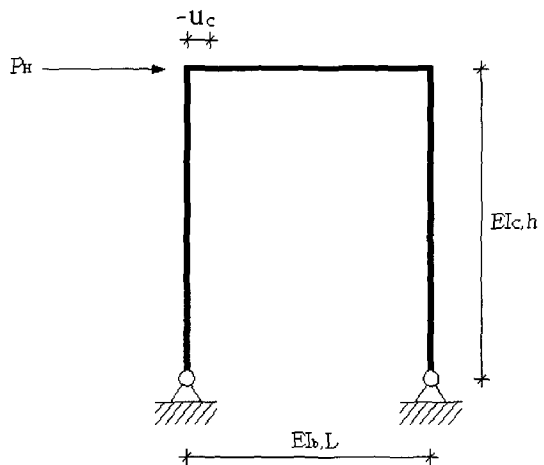


그림 1 보-기둥 강접되고, 지점이 활절인 골조

* 인하대학교 건축학부 조교수

여기서,

P_H : 작용 수평하중

E : 탄성계수

h : 골조의 높이

L : 골조의 스펠

I_b : 골조를 구성하는 보 부재의 단면 이차 모멘트

I_c : 골조를 구성하는 기둥 부재의 단면 이차 모멘트

하지만 식(1)은 보와 기둥이 강접되고, 기둥 부재의 축 방향 변형이 포함되지 않은 경우에만 적용 가능하다. 따라서 다양한 보-기둥 접합부 강성을 갖는 골조의 수평처짐을 구하기 위해서는 일반적인 해석모델 및 해석식의 제안이 필요하다.

그러므로 본 연구에서는 다양한 접합부 강성 및 지점조건을 갖는 골조의 수평처짐을 산정하기 위하여 그림 2의 해석모델을 이용한다. 본 해석모델은 전체 골조가 하나의 기둥 부재로 대체되고, 기둥의 상·하단은 골조의 지점과 보-기둥 접합부의 강성에 상응하는 강성을 갖는 회전·이동 스프링으로 이상화된다.

i) 평형방정식과 일반해:

$$EI u(r)'''' = 0 \quad (2)$$

$$u(r) = A_1 + A_2 r + A_3 r^2 + A_4 r^3 \quad (3)$$

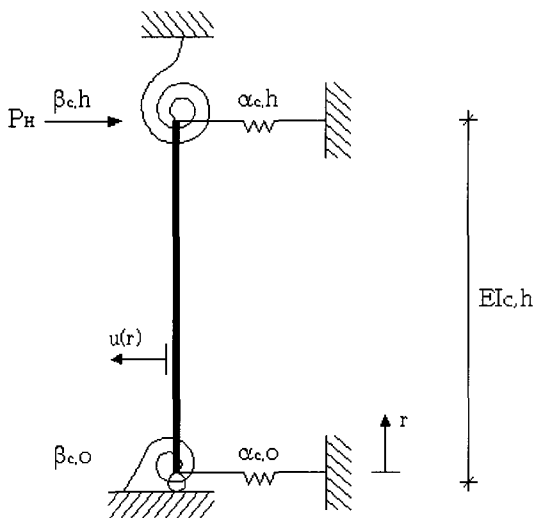


그림 2 골조의 수평처짐 산정을 위한 해석모델

ii) 경계조건:

$$EI u''(0) + \beta_{c,0} u'(0) = 0 \quad (1)$$

$$EI u'''(0) - \alpha_{c,0} u(0) = 0 \quad (2)$$

$$EI u''(h) - \beta_{c,h} u'(h) = 0 \quad (3)$$

$$EI u'''(h) + \alpha_{c,h} u(h) - P_H = 0 \quad (4)$$

여기서,

$\alpha_{c,0}$: 대체된 기둥 부재 하단의 이동 스프링의 강성

$\alpha_{c,h}$: 대체된 기둥 부재 상단의 이동 스프링의 강성

$\beta_{c,0}$: 대체된 기둥 부재 하단의 회전 스프링의 강성

$\beta_{c,h}$: 대체된 기둥 부재 상단의 회전 스프링의 강성

I : 대체된 기둥 부재의 단면 이차 모멘트

A_n : 일반해의 변수들, $n=1 \sim 4$

일반해를 얻기 위하여 경계조건 ①~④를 적용하고 이를 매트릭스 형태로 나타내면 식(4)와 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta_0 & 2 & 0 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -\beta_h & 2-2\beta_h h & 6h-3\beta_h h^2 \\ \alpha_h & \alpha_h h & \alpha_h h^2 & 6+\alpha_h h^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서,

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{c,0}}{EI}, \quad \alpha_h = \frac{\alpha_{c,h}}{EI}, \quad \beta_0 = \frac{\beta_{c,0}}{EI},$$

$$\beta_h = \frac{\beta_{c,h}}{EI}, \quad k^2 = \frac{P_H}{EI} \quad (5)$$

식(4)의 매트릭스를 풀면 식(3)의 변수들은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12(-\beta_0 + \beta_0 \beta_h h - \beta_h) / D \\ -6\alpha_0 h(-2 + \beta_h h) / D \\ 3\alpha_0 \beta_0 h(-2 + \beta_h h) / D \\ -2\alpha_0(-\beta_0 + \beta_0 \beta_h h - \beta_h) / D \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서,

$$D = (12\alpha_0\beta_0 - 4\alpha_0\alpha_h\beta_0h^3 - 12\alpha_0\beta_0\beta_hh) \\ + \alpha_0\alpha_h\beta_0\beta_hh^4 + 12\alpha_0\beta_h - 4\alpha_0\alpha_h\beta_hh^3 \\ + 12\alpha_0\alpha_hh^2 + 12\alpha_h\beta_0 - 12\alpha_h\beta_0\beta_hh + 12\alpha_h\beta_h)k^2 \quad (7)$$

따라서 다양한 접합부 강성과 지점조건을 갖는 골조의 수평처짐은 아래의 식(8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(r) = \frac{-12(-\beta_0 + \beta_0\beta_hh - \beta_h)}{D} \\ - \frac{6\alpha_0h(-2 + \beta_hh)}{D}r + \frac{3\alpha_0\beta_0h(-2 + \beta_hh)}{D}r^2 \\ - \frac{2\alpha_0(-\beta_0 + \beta_0\beta_hh - \beta_h)}{D}r^3 \quad (8)$$

그림 1의 보와 기둥은 강접되고, 지점은 활절로 이상화된 골조의 해석모델 기둥 부재의 이동·회전 스프링 강성값은 $\alpha_0 = \infty$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_h = 0$, $\beta_h = 12i/L$ 이다. 여기서 i 는 골조를 구성하는 보와 기둥의 단면 이차 모멘트 비($i = I_b/I_c$)이다. 이러한 강성값을 위의 식(6), 식(7)에 대입하면 변수 A_n ($n=1\sim4$)은 식(9)와 같고, 이들 변수를 식(8)에 대입하면 식(10)과 같은 수평처짐에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(h^2k^2/2) - (hk^2L/12i) \\ 0 \\ k^2/6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$u(r)|_{r=h} = \left(-\frac{h^2k^2}{2} - \frac{hk^2L}{12i} \right) r^2 + \frac{k^2}{6} r^3 \Big|_{r=h} \\ = -\frac{P_H h^3}{3EI} - \frac{P_H h^2 L}{12EI_b} \quad (10)$$

그런데 해석모델 기둥 부재의 단면 이차 모멘트, $I=2I_c$ 가 되므로 구하고자 하는 골조의 수평처짐은 최종적으로 식(11)과 같이 된다 (즉, 식(1)과 같은 수평처짐에 관한 식이 된다). 이 식에서 음의 부호는 처짐이 오른쪽 방향으로 발생함을 나타낸다.

$$\Delta_s = u(h) = -\frac{P_H h^3}{6EI_c} - \frac{P_H h^2 L}{12EI_b} \quad (11)$$

3. 보강된 골조(Braced Frames)

보강 안된 골조가 수평하중을 받을 때는 보와 기둥의 접합부 강성, 보와 기둥의 강성 비, 골조의 지점조건, 작용하중의 크기 등의 조합에 의해서 과대한 수평처짐이 발생할 수 있다. 또한 이러한 과대한 수평처짐은 골조의 안정성에 영향을 줄 수도 있다. 이를 방지하기 위하여 다양한 골조의 보강 시스템이 사용되고 있으며, 본 연구에서는 다음의 두 가지 구조 시스템만을 고찰하였다.

3.1 지점 보강된 골조(Point Braced Frames)

단일 스펠 골조의 우측 상단에 지점 보강된 골조의⁴⁾ 거동을 파악하기 위하여 그림 3(a)와 같이 지점을 스프링 요소로 이상화하였다. 그리고 스프링 부재의 강성 변화가 골조의 수평처짐에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 에너지법을 이용하였다.^{5)~7)}

i) 거동방정식과 일반해:

$$\Pi_P = U_b + \Omega = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^h EI_c (u'')^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^L EI_b (v'')^2 ds \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^h EI_c (u'')^2 dr + \frac{1}{2} K u_c^2 \right\} + \{ -P_H (-u_c) \} \quad (12)$$

여기서,

Π_P : 전체 포텐셜 에너지

U_b : 변위 에너지

Ω : 작용하중에 의한 일

K : 스프링 부재의 강성

그리고,

$$u(r) = A_1 + A_2 r + A_3 r^2 + A_4 r^3 \quad (13)$$

$$v(s) = B_1 + B_2 s + B_3 s^2 + B_4 s^3 \quad (14)$$

ii) 경계조건:

$$u(0) = 0 \quad \text{---①}$$

$$EI_c u''(0) = 0 \quad \text{---②}$$

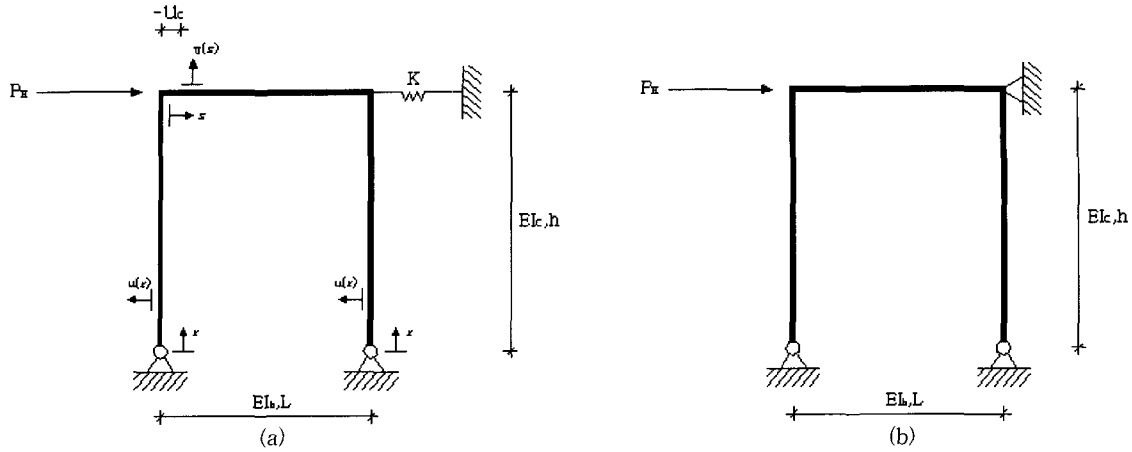


그림 3 지점 보강된 골조의 해석모델

$$\begin{aligned}
 u(h) &= -u_c & \text{---③} \\
 v(0) &= 0 & \text{---④} \\
 v(L) &= 0 & \text{---⑤} \\
 u'(h) &= v'(0) & \text{---⑥} \\
 u'(h) &= v'(L) & \text{---⑦} \\
 EI_c u''(h) &= EI_b v''(0) & \text{---⑧}
 \end{aligned}$$

경계조건 ①~⑧을 적용하여 매트릭스 형태로 나타내면 식(15)와 같고, 식(15)의 매트릭스를 풀면 변수 \$A_n\$과 \$B_n\$ (\$n=1\sim 4\$)은 식(16)과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & h & h^2 & h^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L & L^2 & L^3 \\
 0 & 1 & 2h & 3h^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 2h & 3h^2 & 0 & -1 & -2L & -3L^2 \\
 0 & 0 & 2EI_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 6EI_c h & 0 & 0 & -2EI_b & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4 \\
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -u_c \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4 \\
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 (I_c L + 3I_b h)u_c / h(I_c L + 2I_b h) \\
 0 \\
 -I_b u_c / h^2(I_c L + 2I_b h) \\
 0 \\
 I_c L u_c / h(I_c L + 2I_b h) \\
 -3I_c u_c / h(I_c L + 2I_b h) \\
 2I_c u_c / hL(I_c L + 2I_b h)
 \end{bmatrix}
 \quad (16)$$

이들 변수들을 이용하면 식(12)는 최종적으로 아래의 식(17)과 같이 정리될 수 있다.

$$\Pi_P = \frac{6E u_c^2 (2I_c I_b^2 h + I_b I_c^2 L)}{h^2 (I_c L + 2I_b h)^2} + \frac{1}{2} K u_c^2 + P_H u_c \quad (17)$$

평형조건을 만족시키기 위해서는 식(18)이 만족되어야 하고, 이를 정리하면 지점 보강된 골조의 수평처짐은 식(19)와 같이 된다.

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial u_c} = \frac{12E(2I_c I_b^2 h + I_b I_c^2 L)u_c}{h^2 (I_c L + 2I_b h)^2} + K u_c + P_H = 0 \quad (18)$$

$$u_c = -\frac{h^2 (I_c L + 2I_b h)}{12E I_c I_b + K h^2 (I_c L + 2I_b h)} P_H \quad (19)$$

지점 보강된 골조의 수평처짐은 식(19)에 나타

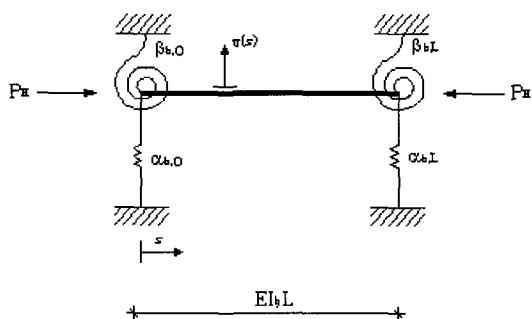


그림 4 지점 보강된 골조의 좌굴하중 산정을 위한 해석 모델

난 것처럼 하중 P_H 가 작용하기 시작할 때부터 발생하고, 하중 P_H 가 증가함에 따라 함께 증가한다. 따라서 지점 보강된 골조의 수평처짐은 스프링 부재의 강성이 무한대 ($K \rightarrow \infty$)로 증가하는 경우에만 과대 처짐 방지 효과가 커진다.

$K = \infty$ 인 경우는 그림 3(b)와 같이 골조의 우측 상단이 회전단으로 지지된 것과 같고, 수평처짐이 발생하지는 않지만 좌굴이 발생할 우려가 있다. 그러므로 지점 보강된 골조의 안정성에 영향을 줄 수 있는 다양한 보-기둥 접합부 강성을 갖는 보 부재의 좌굴에 관한 연구가 필요하며, 이를 위하여 그림 4와 같이 보 부재의 양단에 이동·회전 스프링을 갖는 해석모델을 제안하여 좌굴하중을 구하였다.^{8)~10)}

i) 평형방정식과 일반해:

$$EI_b v''''(s) + P_H v''(s) = 0 \quad (20)$$

$$v(s) = A_1 \sin ks + A_2 \cos ks + A_3 s + A_4 \quad (21)$$

여기서,

$$k = \sqrt{\frac{P_H}{EI_b}}$$

ii) 경계조건:

$$EI_b v''(0) - \beta_{b,0} v'(0) = 0 \quad -①$$

$$EI_b v'''(0) + \alpha_{b,0} v(0) + P_H v'(0) = 0 \quad -②$$

$$EI_b v''(L) + \beta_{b,L} v'(L) = 0 \quad -③$$

$$EI_b v'''(L) - \alpha_{b,L} v(L) + P_H v'(L) = 0 \quad -④$$

경계조건 ①~④을 적용하여 매트릭스 형태로 나타내면 식(22)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \beta_0 k & k^2 & \beta_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & k^2 & \alpha_0 \\ \beta_L k \cos kL - k^2 \sin kL & -k^2 \cos kL - \beta_L k \sin kL & \beta_L & 0 \\ \alpha_L \sin kL & \alpha_L \cos kL & \alpha_L L - k^2 & \alpha_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서,

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{b,0}}{EI_b}, \quad \alpha_L = \frac{\alpha_{b,L}}{EI_b}, \quad \beta_0 = \frac{\beta_{b,0}}{EI_b}, \quad \beta_L = \frac{\beta_{b,L}}{EI_b}$$

식(22)가 해를 갖기 위해서는 $\det.(D) = 0$ 이어야 하고, 이를 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \det.(D) = & \sin kL [-(\alpha_0 + \alpha_L) k^6 + \{ \beta_0 \beta_L (\alpha_0 + \alpha_L) \\ & + \alpha_0 \alpha_L L \} k^4 + \{ \alpha_0 \alpha_L (\beta_0 + \beta_L - \beta_0 \beta_L L) \} k^2] \\ & + \cos kL [\{ (\alpha_0 + \alpha_L) (\beta_0 + \beta_L) \} k^5 \\ & - \{ \alpha_0 \alpha_L L (\beta_0 + \beta_L) \} k^3 - 2\alpha_0 \alpha_L \beta_0 \beta_L k] \\ & + 2\alpha_0 \alpha_L \beta_0 \beta_L k = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$K = \infty$ 인 그림 3(b)와 같은 지점 보강 골조의 보 부재의 이동·회전 스프링의 강성값은 $\alpha_0 = \alpha_L = \infty$, $\beta_0 = \beta_L = 6/L$ 로 이상화된다. 이 스프링 강성값들을 식(23)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\det.(D) = k \{ (-24kL + k^3 L^3) \sin kL - (12k^2 L^2 + 72) \cos kL + 72 \} = 0 \quad (24)$$

식(24)가 해를 갖기 위해서는 $k \neq 0$ 이어야 한다. 즉, 식(24)의 괄호 안의 식이 0이 되어야 하고, 이를 정리하면 다음과 같다.

$$kL = \sqrt{\frac{P_H L^2}{EI_b}} = 4.911 \quad (25)$$

$$P_H = \frac{4.911^2 EI_b}{L^2} = \frac{2.44 \pi^2 EI_b}{L^2} \quad (26)$$

따라서 구하고자 하는 지점 보강된 골조의 보 부재의 좌굴하중은 식(27)과 같이 된다.

$$P_{H,cr} = \frac{2.44\pi^2 E I_b}{L^2} \quad (27)$$

3.2 Knee 가새로 보강된 골조(Knee-Braced Frames)

골조의 수평처짐을 억제하기 위한 다른 구조적 방안 중의 하나는 가새로 보강한 집중 가새골조(Concentrically Braced Frames)와 편심 가새골조(Eccentrically Braced Frames)를 사용하는 것이다.^{11),12)} 본 연구에서는 비교적 개구부 및 출입구 등의 확보가 용이한 편심 가새골조의 하나인 Knee-가새골조(Knee-Braced Frames)의 거동에 관해서 고찰하였다.

그림 5의 보-기둥 및 보-가새 모두 강접되고, 지점은 활절로 이상화된 Knee 가새로 보강된 골조의 수평처짐을 에너지법을 이용하여 다음과 같이 구하였다.

i) 거동방정식과 일반해

$$\begin{aligned} \Pi_P = U_b + \Omega = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^h E I_c (u_1'')^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^L E I_b (v'')^2 ds \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{L_{br}} E I_{br} (w_1'')^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^{L_{br}} E I_{br} (w_2'')^2 dt \left. \right\} \\ & + \{-P_H(-u_c)\} \end{aligned} \quad (28)$$

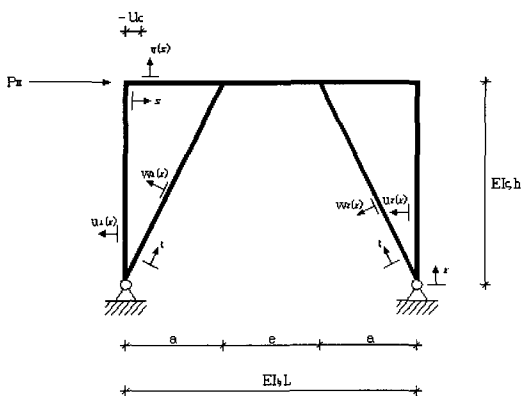


그림 5 보-기둥 및 보-가새 모두 강접되고 지점이 활절인 Knee-가새골조

그리고,

$$u_1(r) = A_1 + A_2 r + A_3 r^2 + A_4 r^3 \quad (29)$$

$$u_2(r) = B_1 + B_2 r + B_3 r^2 + B_4 r^3 \quad (30)$$

$$v(s) = C_1 + C_2 s + C_3 s^2 + C_4 s^3 \quad (31)$$

$$w_1(t) = F_1 + F_2 t + F_3 t^2 + F_4 t^3 \quad (32)$$

$$w_2(t) = G_1 + G_2 t + G_3 t^2 + G_4 t^3 \quad (33)$$

ii) 경계조건:

$$u_1(0) = 0 \quad (1)$$

$$E I_c u_1''(0) = 0 \quad (2)$$

$$u_2(0) = 0 \quad (3)$$

$$E I_c u_2''(0) = 0 \quad (4)$$

$$w_1(0) = 0 \quad (5)$$

$$E I_{br} w_1''(0) = 0 \quad (6)$$

$$w_2(0) = 0 \quad (7)$$

$$E I_{br} w_2''(0) = 0 \quad (8)$$

$$v(0) = 0 \quad (9)$$

$$v(L) = 0 \quad (10)$$

$$u_1(h) = -u_c \quad (11)$$

$$u_1'(h) = v'(0) \quad (12)$$

$$u_2(h) = -u_c \quad (13)$$

$$u_2'(h) = v'(L) \quad (14)$$

$$E I_c u_1''(h) = E I_b v''(0) \quad (15)$$

$$E I_c u_2''(h) = E I_b v''(L) \quad (16)$$

$$w_1(L_{br}) = -u_c \quad (17)$$

$$w_2(L_{br}) = -u_c \quad (18)$$

$$v'(a) = w_1'(L_{br}) \quad (19)$$

$$v'(a+e) = w_2'(L_{br}) \quad (20)$$

경계조건 ①~⑨를 적용하면 식 (29)~식 (33)의 일부 변수들을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$A_1 = A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = F_1 = F_3 = G_1 = G_3 = 0 \quad (34)$$

그리고, 경계조건 ⑩~⑳를 적용하여 매트릭스 형태로 정리하면 식(35)와 같다.

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h & h^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 3h^2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h & h^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3h^2 & -1 & -2L & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6hE I_c & 0 & 0 & 0 & -2E I_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 6hE I_c & 0 & -2E I_b & -6LE I_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{br} & L_{br}^3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{br} & L_{br}^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2a & 3a^2 & -1 & -3L_{br}^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2(a+e) & 3(a+e)^2 & 0 & 0 & -1 & -3L_{br}^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_2 \\
A_4 \\
B_2 \\
B_4 \\
C_2 \\
C_3 \\
C_4 \\
F_2 \\
F_4 \\
G_2 \\
G_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
-u_c \\
0 \\
-u_c \\
0 \\
0 \\
0 \\
-u_c \\
-u_c \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \quad (35)$$

식(35)를 이용하여 식(29)~식(33)의 나머지 변수들을 구하면 다음과 같다.

$$B_4 = -\frac{I_b(3I_c L + 2I_b h)u_c}{h^2(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (39)$$

$$A_2 = -\frac{3(I_c^2 L^2 + I_b I_c h L - 2I_b^2 h^2)u_c}{h(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (36)$$

$$C_2 = \frac{3I_c L(2I_b h - I_c L)u_c}{h(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (40)$$

$$A_4 = \frac{I_b(3I_c L - 2I_b h)u_c}{h^2(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (37)$$

$$C_3 = \frac{3I_c(3I_c L - 2I_b h)u_c}{h(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (41)$$

$$B_2 = -\frac{3(-I_c I_b h L + I_c^2 L^2 - 2I_b^2 h^2)u_c}{h(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (38)$$

$$C_4 = -\frac{6I_c^2 u_c}{h(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (42)$$

$$F_2 = \frac{3(I_c^2 L_{br} L^2 - 2I_c L_{br} I_b h L - 6I_c^2 L_{br} L a + 4I_c I_b L_{br} a h + 6I_c^2 L_{br} a^2 - 3I_c^2 L^2 h + 4I_b^2 h^3)u_c}{2h L_{br}(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (43)$$

$$F_4 = -\frac{(3I_c^2 L_{br} L^2 - 6I_c L_{br} I_b h L - 18I_c^2 L_{br} L a + 12I_c I_b L_{br} a h + 18I_c^2 L_{br} a^2 - 3I_c^2 L^2 h + 4I_b^2 h^3)u_c}{2h L_{br}^3(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \quad (44)$$

$$G_2 = \frac{3u_c}{2h L_{br}(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \times \left\{ \begin{aligned} & I_c^2 L_{br} L^2 - 2I_c I_b L_{br} h L - 6I_c^2 L_{br} L e - 6I_c^2 L_{br} L a + 4I_c I_b L_{br} a h \\ & + 4I_c I_b L_{br} e h + 6I_c^2 L_{br} e^2 + 12I_c^2 L_{br} a e + 6I_c^2 L_{br} a^2 - 3I_c^2 L^2 h + 4I_b^2 h^3 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$G_4 = -\frac{u_c}{2h L_{br}^3(3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)} \times \left\{ \begin{aligned} & 3I_c^2 L_{br} L^2 - 6I_c I_b L_{br} h L - 18I_c^2 L_{br} L e - 18I_c^2 L_{br} L a + 12I_c I_b L_{br} a h \\ & + 12I_c I_b L_{br} e h + 18I_c^2 L_{br} e^2 + 36I_c^2 L_{br} a e + 18I_c^2 L_{br} a^2 - 3I_c^2 L^2 h + 4I_b^2 h^3 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

이들 변수들을 이용하면 식(28)은 최종적으로 아래의 식(47)과 같이 정리될 수 있다.

$$\Pi_P = \frac{E u_c^2 \chi}{2 L_{br}^3 h^2 (3 I_c^2 L^2 - 4 I_b^2 h^2)^2} + P_H u_c \quad (47)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \chi = & 12 I_c I_b^2 L_{br}^3 h (3 I_c L - 2 I_b h)^2 + 12 I_c I_b^2 L_{br}^3 h (3 I_c L + 2 I_b h)^2 + 36 I_c^2 I_b L_{br}^3 L (3 I_c^2 L^2 + 4 I_b^2 h^2) \\ & + 3 I_{br} (4 I_b^2 h^3 + 12 I_c I_b L_{br} h a - 6 I_c I_b L_{br} L h - 3 I_c^2 L^2 h + 18 I_c^2 L_{br} a^2 - 18 I_c^2 L_{br} L a + 3 I_c^2 L_{br} L^2) \\ & + 3 I_{br} \left\{ \begin{aligned} & 18 I_c^2 L_{br} a^2 - 18 I_c^2 L_{br} L a + 3 I_c^2 L_{br} L^2 + 36 I_c^2 L_{br} e a - 18 I_c^2 L_{br} L e + 18 I_c^2 L_{br} e^2 - 3 I_c^2 L^2 h \\ & + 12 I_c I_b L_{br} h a - 6 I_c I_b L_{br} L h + 12 I_c I_b L_{br} h e + 4 I_b^2 h^3 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (48)$$

평형조건을 충족시키기 위해서는 식(49)가 성립되어야 하고, 이를 이용하면 Knee-가새골조의 수평처짐은 식(50)과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial u_c} = \frac{E u_c \chi}{L_{br}^3 h^2 (3 I_c^2 L^2 - 4 I_b^2 h^2)^2} + P_H = 0 \quad (49)$$

$$u_c = - \frac{L_{br}^3 h^2 (3 I_c^2 L^2 - 4 I_b^2 h^2)^2}{E \chi} P_H \quad (50)$$

Knee-가새골조에 수평하중, PH가 작용하는 경우는 가새 부재에 압축력이 발생하고, 이러한 압축력의 영향으로 가새 부재에 좌굴이 발생할 수 있다. 가새 부재의 좌굴하중도 식(23)을 이용하여 산정할 수 있다. 단, 식(23)의 적용에 있어서 $L \rightarrow L_{br}$, $I_b \rightarrow I_{br}$, $\alpha_{b,0} \rightarrow \alpha_{br,0}$, $\alpha_{b,L} \rightarrow \alpha_{br,Lbr}$, $\beta_{b,0} \rightarrow \beta_{br,0}$, $\beta_{b,L} \rightarrow \beta_{br,Lbr}$ 로 대체하고, $\alpha_0 = \infty$, $\alpha_{Lbr} = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_{Lbr} = \infty$ 인 강성값을 대입하면 아래와 같은 식(51)을 얻을 수 있다.

$$\det .(D) = k^5 \cos kL = 0 \quad (51)$$

식(51)이 해를 갖기 위해서는 $k \neq 0$ 이어야 한다. 즉, $\cos kL = 0$ 을 만족하여야 하고, 이를 정리하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$k L_{br} = \sqrt{\frac{P L_{br}^2}{E I_{br}}} = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (52)$$

$$P = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 E I_{br}}{4 L_{br}^2} \quad (53)$$

따라서, 구하고자 하는 가새 부재의 좌굴하중은 식(54)과 같이 된다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{br}}{4 L_{br}^2} \quad (54)$$

4. 실례 적용

먼저 전 절에서 유도한 식들을 이용하여 보강안된 골조(Unbraced Frames) 및 보강된 골조(Braced Frames)의 수평처짐과 좌굴하중을 구하고, 다음으로 이를 상용 프로그램인 ABAQUS를 사용한 유한요소 해석에 의한 해석결과와 비교하여 유도된 식들의 적용에 따른 타당성을 검증하였다. 이를 위하여 아래와 같은 부재를 선택하였다.

- 보 부재, H414×405×18×28의 단면성능:
 $I_{b,x} = 92,800 \text{cm}^4$, $A_b = 294.5 \text{cm}^2$
- 기둥 부재, H428×407×20×35의 단면성능:
 $I_{c,x} = 119,000 \text{cm}^4$, $A_c = 360.7 \text{cm}^2$
- 가새 부재, TS350×350×12의 단면성능:
 $I_{br} = 29,800 \text{cm}^4$, $A_{br} = 158.5 \text{cm}^2$
- 작용 수평하중, PH=800kN
- 강재의 탄성계수, E=199,947MPa
- 골조의 스펠, L=6.0m
- 골조의 높이, h=3.5m
- Knee-가새골조 연결보의 길이, e=1.66m
- Knee-가새골조 보 부재의 길이, a=(L-e)/2=2.17m
- Knee-가새골조 가새 부재의 길이, $L_{br} = 4.118 \text{m}$

4.1 보강 안된 골조의(Unbraced Frames) 수평처짐

그림 1과 같은 보와 기둥은 강점으로 접합되고, 지점은 활절로 이상화된 수평하중을 받는 골조의 수평처짐은 식(1) 혹은 식(11)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \Delta_{beam} + \Delta_{column} = -\left(\frac{P_H h^2 L}{12EI_b}\right) - \left(\frac{P_H h^3}{6EI_c}\right) \\ &= -\left(\frac{800 \times 10^3 \times 3.5^2 \times 6.0}{12 \times 199947 \times 10^6 \times 0.000928}\right) \\ &\quad - \left(\frac{800 \times 10^3 \times 3.5^3}{6 \times 199947 \times 10^6 \times 0.00119}\right) \\ &= -0.0264^m - 0.024^m = -0.0504m \end{aligned} \quad (55)$$

따라서,

$$\Delta_s = -5.04 \text{ cm} \quad (56)$$

상용 프로그램인 ABAQUS 부재 요소 중에서 B23(2-node cubic beam)요소를 사용하여 골조의 좌측 상단의 수평처짐을 구하면 아래와 같고, 변형된 골조는 그림 6과 같다.

$$\Delta_s = -5.17 \text{ cm} \quad (57)$$

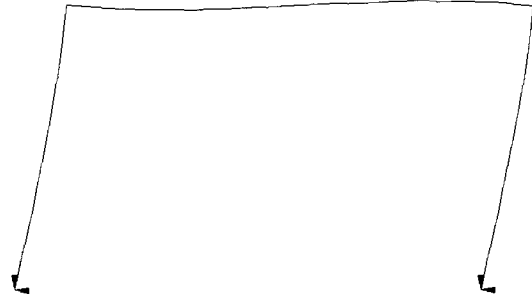


그림 6 보-기둥 강접되고 지점이 활절인 골조의 변형된 모습

따라서, 두 결과들을 비교하면 아래와 같이 2.51%의 오차를 보이므로 제안된 식(11)은 사용하기에 타당하다.

$$error = \left| \frac{-5.17 - (-5.04)}{-5.17} \right| \times 100 (\%) = 2.51 \% \quad (58)$$

4.2. 지점 보강된 골조(Point Braced Frames)의 수평처짐 및 좌굴하중

지점 보강된 골조의 수평처짐은 스프링 강성 K의 값에 따라서 변화하며, 표 1은 K=0부터 K=10¹¹로 변화할 때 수평처짐의 변화를 나타낸다. 표 1에서 보듯이 K=10⁷에서 K=10⁸로 변화할 때에 수평처짐이 급격히 감소하고, 식(19)를 사용한 경우의 수평

표 1 지점 보강된 골조의 수평처짐

K	$u_c = -\frac{h^2(I_c L + 2I_b h)}{12EI_c I_b + K h^2(I_c L + 2I_b h)} P_H$ (cm)	ABAQUS(cm)	% 오차
0	5.0434	5.1685	2.42
101	5.0434	5.1685	2.42
102	5.0434	5.1684	2.42
103	5.0431	5.1681	2.42
104	5.0402	5.1652	2.42
105	5.0118	5.1358	2.41
106	4.7443	4.8598	2.38
107	3.0933	3.1721	2.48
108	0.6905	0.6873	0.47
109	0.0788	0.0782	0.77
1010	0.0080	0.0079	1.27
1011	0.0008	0.0008	0

처짐은 ABAQUS를 사용한 경우의 수평처짐과 비교할 때에 최대 2.48%의 오차를 보인다.

지점 보강된 골조에 사용된 보 부재의 좌굴하중은 식(27)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_{H,cr} = \frac{2.44\pi^2 EI_b}{L^2} \quad (59)$$

$$= \frac{2.44\pi^2 \times 199947 \times 10^6 \times 0.000928}{6^2} = 124,122,335.7 \text{ N}$$

즉,

$$P_{H,cr} = 124,122.3 \text{ kN} \quad (60)$$

또한, ABAQUS의 “*BUCKLE” 옵션을 사용하여 K=10¹¹인 경우의 지점 보강된 골조의 첫 번째 eigenvalue를 구하면, λ₁=158.27을 얻을 수 있다. 이를 이용하면 좌굴하중은 식(61)과 같이 구할 수 있다. 그림 7은 K=10¹¹인 경우의 지점 보강된 골조의 좌굴된 모양을 나타낸다.

$$P_{H,cr} = \lambda_1 P_H = 158.27 \times 800 = 126,616 \text{ kN} \quad (61)$$

따라서, 식(60)과 식(61)에 나타난 두 값을 비교하여 보면 아래와 같이 1.97%의 오차를 보인다. 따라서 제안된 식(23)은 사용하기에 타당하다.

$$error = \left| \frac{126,616 - 124,122}{126,616} \right| \times 100 (\%) = 1.97 \% \quad (62)$$

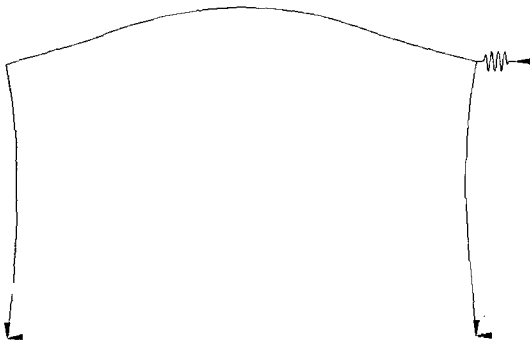


그림 7 지점 보강된 골조의 좌굴된 모습

4.3 Knee-가새골조의 수평처짐 및 가새 부재의 좌굴하중

수평하중을 받는 Knee-가새골조의 수평처짐은 식(50)과 같이 보, 기둥 및 가새 부재의 강성비, 작용하중의 크기, 연결보와 스패의 길이비, 골조의 높이 등에 영향을 받는다. 본 연구에서는 연결보의 길이, e=1.66m인 Knee-가새골조의 수평처짐을 산정하였다.

$$u_c = -\frac{L_{br}^3 h^2 (3I_c^2 L^2 - 4I_b^2 h^2)^2}{E\chi} P_H$$

$$= -\frac{4.118^3 \times 3.5^2 \times (3 \times 0.00119^2 \times 6^2 - 4 \times 0.000928^2 \times 3.5^2)^2}{199947 \times 10^6 \times (7.6349 \times 10^{-9})} \times (800 \times 10^3) = -0.0055 \text{ m} \quad (63)$$

따라서,

$$u_c = -0.55 \text{ cm} \quad (64)$$

또한, ABAQUS 부재요소 중 B23을 사용하여 Knee-가새골조의 수평처짐을 구하면 식(65)와 같다. 두 값을 비교하면 식(66)과 같이 40.56%의 오차를 보인다. 그림 8은 수평하중을 받아 변형된 Knee-가새골조를 나타낸다.

$$u_c = -0.3913 \text{ cm} \quad (65)$$

$$error = \left| \frac{-0.3913 - (-0.55)}{-0.3913} \right| \times 100 (\%) = 40.56 \% \quad (66)$$

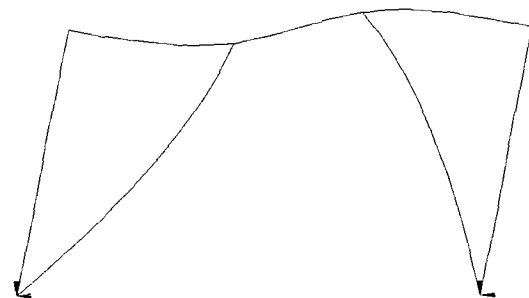


그림 8 수평하중을 받아 변형된 Knee-가새골조

보-기둥 및 보-가새 강접되고, 지점은 활절로 이상화된 Knee-가새골조의 가새 부재의 좌굴하중은 식(61)을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{br}}{4 L_{br}^2} = \frac{\pi^2 \times 199947 \times 10^6 \times 0.000298}{4 \times 4.118^2} = 8,669,162.3 \text{ N} \quad (67)$$

즉,

$$P_{cr} = 8,669.2 \text{ kN} \quad (68)$$

또한, ABAQUS를 이용하여 가새 부재의 첫 번째 eigenvalue를 구하면, $\lambda_1=11.233$ 을 얻을 수 있고, 이를 이용하여 압축력을 받는 가새 부재의 좌굴하중을 식(69)와 같이 구할 수 있다. 그림 9는 가새 부재가 좌굴된 모양을 나타낸다.

$$P_{cr} = \lambda_1 P = 11.233 \times 800 = 8,986.4 \text{ kN} \quad (69)$$

따라서, 두 값을 비교하면 아래와 같이 3.53%의 오차를 보이므로 제안된 식(54)는 보-가새 강접된, 압축력을 받는 가새 부재의 좌굴하중을 산정하는데 이용할 수 있다.

$$\text{error} = \left| \frac{8,986.4 - 8,669.2}{8,986.4} \right| \times 100 (\%) = 3.53 \% \quad (70)$$

5. 결 론

본 연구에서는 단일 스펠 골조, 지점 보강된 골조 그리고 Knee-가새골조가 수평하중을 받을 때 나타나는 각각의 수평처짐과 좌굴에 관한 해석식을 제안하고, 제안된 식들의 적용에 대한 타당성을 고찰하였다. 본 연구를 통하여 얻은 결론을 정리하면 다음과 같다.

- 1) 다양한 보-기둥 접합부 및 지점 조건을 갖는 보강 안된 골조 (Unbraced Frames)의 수평처짐을 산정하기 위하여 제안된 해석식 (8)은 적용하기에 타당하다.
- 2) 수평하중을 받는 지점 보강된 골조(Point Braced Frames)의 수평처짐을 산정하기 위하여 제안된 해석식 (19)는 적용하기에 타당하며, 또한 보 부재의 좌굴하중 산정을 위하여 제안된 해석식 (24)도 적용하기에 타당하다.
- 3) Knee-가새골조(Knee-Braced Frames)의 수평처짐을 산정하기 위하여 제안된 해석식 (50)은 적용하기에는 비교적 큰 오차를 보이기 때문에 보다 정확한 해석식의 제안이 필요하다. 하지만 가새 부재의 좌굴하중 산정을 위하여 제안된 해석식 (51)은 적용하기에 타당하다.

감사의 글

이 연구는 2000년도 (주)포항종합제철의 사외위탁과제 연구결과의 일부임

참 고 문 헌

1. ABAQUS Theory Manual, Version 5.8, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., 1998
2. ABAQUS User's Manual, Vols. I, II & III, Version 5.8, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., 1998
3. R. Englekirk, *Steel Structures: Controlling Behavior Through Design*, John Wiley & Sons, New York, 1994
4. C. G. Salmon and J. E. Johnson, *Steel Structures: Design and Behavior*, 4th ed., Harper Collins, New York, 1995
5. I. H. Shames and C. L. Dym, *Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1985
6. R. D. Cook, D. S. Malkus, and M. E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1989
7. K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, New Jersey, 1996
8. G. J. Simitses, *An Introduction to the Elastic Stability of Structures*, Prentice-Hall, New Jersey,

- 1976
9. A. Chajes, *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, New-Jersey, 1974
 10. W. F. Chen and E. M. Lui, *Structural Stability: Theory and Implementation*, Elsevier Science, New York, 1987
 11. B. S. Smith and A. Coull, *Tall Building Structures: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1991
 12. M. Bruneau, C.-M. Uang, and A. Whittaker, *Ductile Design of Steel Structures*, McGraw-Hill, New York, 1998 