

# 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 최저차 대칭 및 역대칭 고유진동수

## Lowest Symmetrical and Antisymmetrical Natural Frequencies of Shallow Arches on Two-Parameter Elastic Foundations

오 상 진<sup>†</sup>

서 종 원<sup>\*</sup>

이 병 구<sup>\*\*</sup>

Oh, Sang-Jin

Ser, Jong-Won

Lee, Byoung-Koo

(논문접수일 : 2001년 12월 12일 ; 심사종료일 : 2002년 6월 12일)

### 요 지

이 논문은 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 자유진동에 관한 연구이다. Pasternak가 제안한 두 개의 매개변수로 표현되는 지반모형을 채택하여 대상아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 양단회전 및 양단고정의 단부 조건을 갖는 두 종류의 아치선형을 유도된 지배방정식에 적용하여 Galerkin method로 해석함으로써 최저차 대칭 및 역대칭 고유진동수 방정식을 산출하였다. 아치높이, Winkler지반계수 및 전단지반계수가 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였으며, 아치선형이 고유진동수에 미치는 영향을 분석하였다.

**핵심용어** : 낮은 아치, 자유진동, Pasternak지반, 고유진동수, 진동수 방정식

### Abstract

This paper deals with the free vibrations of shallow arches resting on elastic foundations. Foundations are assumed to follow the hypothesis proposed by Pasternak. The governing differential equation is derived for the in-plane free vibration of linearly elastic arches of uniform stiffness and constant mass per unit length. Two arch shapes with hinged-hinged and clamped-clamped end constraints are considered in analysis. The frequency equations (lowest symmetrical and antisymmetrical frequency equations) are obtained by Galerkin's method. The effects of arch rise, Winkler foundation parameter and shear foundation parameter on the lowest two natural frequencies are investigated. The effect of initial arch shapes on frequencies is also studied.

**Keywords** : shallow arch, free vibration, Pasternak foundation, natural frequency, frequency equation

### 1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성은 구조공학, 기조공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취

급되어 이와 관련한 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련한 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로서 모형화할 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프라인 및 띠기초

<sup>†</sup> 정회원 · 담양대학 토목과 조교수

전화: 061-380-8502; Fax: 061-381-9100

E-mail: sjoh@damyang.damyang.ac.kr

<sup>\*</sup> (주)동아건설

<sup>\*\*</sup> 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

(strip footing) 등을 들 수 있다.

최근에도 다양한 조건을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 동적거동에 관한 연구<sup>1)~5)</sup>가 활발히 이루어지고 있지만, 이들 연구에서 다루어지고 있는 대상구조는 대부분 직선보이다. 하지만 실제 구조물에는 초기곡률을 갖는 곡선부가 존재하고 있어 이에 대한 연구결과가 필요하다. 그러나 Laura와 Maurizi<sup>6)</sup>가 고찰한 바와 같이 지반 위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 관한 유용한 연구결과는 부족한 실정이다.

문헌 [7-10]에서는 지반 위에 놓인 원호형 곡선부재에 면외하중이 작용하는 경우 정적거동특성에 관한 연구가 이루어졌으며, 문헌 [11-15]에서는 다양한 단부조건을 갖는 지반 위에 놓인 원호형 곡선부재의 면외 자유진동에 관한 연구가 수행되었다. 그리고 지반 위에 놓인 곡선부재의 면내거동에 관한 연구로서 Simitses<sup>16),17)</sup>는 Winkler형 지반 위에 놓인 낮은 아치의 정적안정영역을 제시하였다.

공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 일반적으로 이용하고 있는 지반모형은 Winkler모형이다. 이는 지반을 독립적인 스프링으로 표현한 간편한 모형이지만, 하중작용점의 처짐이 근접한 지역의 처짐에 영향을 미치지 못하는 단점을 가지고 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 즉 지반연속성(foundation continuity)을 고려하기 위하여 Pasternak는 전단변형만을 일으키는 비압축성 연직요소 즉, 전단층(shear layer)을 Winkler모형 위에 연결한 지반모형을 제안하였다.<sup>18)</sup>

이상에서 살펴본 바와 같이 많은 연구자들에 의해 탄성지반 위에 놓인 직선부재의 면내 및 곡선부재의 면외 자유진동에 대한 연구가 이루어졌지만, 탄성지반 위에 놓인 특히 지반연속성이 고려된 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 면내 자유진동에 대한 연구는 이루어지지 않았다.

이상과 같은 연구배경으로 본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 고유진동수를 구하고자 한다. 여기서 "낮은 아치"란 지간길이에 비해 높이가 상대적으로 낮은 곡선부재를 의미한다. 본 연구에서는 Pasternak가 제안한 두 개의 매개변수로 표현되는 지반모형을 택하여 대상구조의 면내 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 유도된 지배방정식에 양단회전 및 양단고정의 단부조건을 갖는 두 종류의 정현아치를 적용하고, Galerkin method를 이용하여 해석하였다. 해

석결과로서 아치높이, Winkler지반계수, 전단지반계수의 향으로 표현되는 고유진동수 방정식을 산출하여 제시하였다.

## 2. 수학적 모형 및 고유진동수 방정식

그림 1은 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 제변수 및 진동형을 나타낸 것이다. 이 그림에서  $l$ 과  $H$ 는 각각 지간길이 및 아치높이,  $y(x)$ 는 변형전 아치축상 임의점의  $y$ 좌표,  $q$ 는 지반반력이다. 한편  $w(x, t)$ 는 변형전 아치축을 기준으로 측정된 진동변위로서 이를 조화진동식으로 표현하면 식(1)과 같으며, 이후  $w$ 로 표기한다.

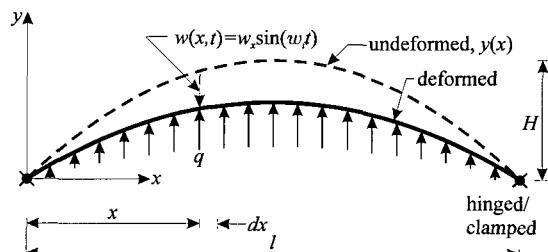


그림 1 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 제변수 및 진동형

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

식(1)에서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며,  $\omega_i$ 는 고유각진동수,  $t$ 는 시간,  $i$ 는 모드번호이다.

그림 1에 보인 아치가 면내에서 진동하게 되면 그림 2에 보인 바와 같이 부재 미소요소에는 진동변위에 의해 전단력  $V$ , 휨모멘트  $M$  및 추력  $N$ 이 발생하게 된다. 또한 질량을 가지고 있는 부재 미소요소에는 관성력

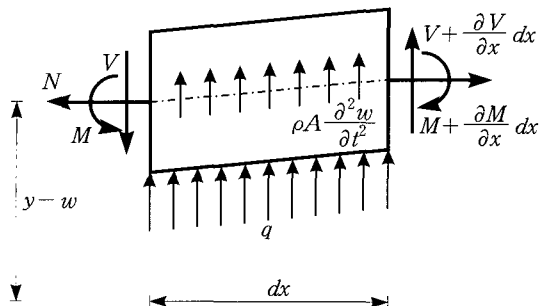


그림 2 부재 미소요소에 작용하는 힘들

$\rho A \partial^2 w / \partial t^2$ 가 발생하며, 진동변위와 반대방향으로 지반반력  $q$ 가 발생한다. 부재 미소요소에 작용하는 힘들의 동적 평형방정식을 세우면 식(2), 식(3)과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0 \quad (2)$$

$$V - \frac{\partial M}{\partial x} - N \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0 \quad (3)$$

식(2)에서  $\rho$ 는 부재재료의 단위체적당 질량,  $A$ 는 단면적이다.

Pasternak가 제안한 지반모형을 채용하는 경우 지반반력  $q$ 는 식(4)와 같이 표현된다.<sup>18)</sup>

$$q = Kw - G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

위의 식에서  $K$ 는 Winkler지반계수,  $G$ 는 전단지반계수(shear foundation modulus)이다. 한편 진동변위에 의한 추력  $N$ 은 식(5)와 같다.<sup>17)</sup>

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

식(5)에서  $E$ 는 재료의 탄성계수이다.

Bernoulli-Euler 보이론에 의한 휨-곡률사이의 관계식은 식(6)과 같다.

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6)$$

여기서  $I$ 는 단면2차모멘트이다. 식(6)을 식(3)에 대입하여  $\partial V / \partial x$ 를 구한 후 이를 식(4)와 함께 식(2)에 대입하고 정리하면 다음의 편미분방정식을 얻을 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + Kw - G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

무차원 형태의 지배미분방정식을 얻기 위하여 다음의 무차원 변수들을 이용한다.

$$\eta = \frac{w_x}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \delta = \frac{y}{l} \quad (8-10)$$

$$k = \frac{Kl^4}{\pi^4 EI}, \quad g = \frac{Gl^2}{\pi^2 EI} \quad (11,12)$$

식(1)과 식(5)를 식(7)에 대입하고, 식(8)~(12)의 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음의 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \left( \frac{l}{r} \right)^2 \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \int_0^1 \frac{d\delta}{d\xi} \frac{dw}{d\xi} d\xi + \pi^4 k \eta - \pi^2 g \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - C_i^2 \eta = 0 \quad (13)$$

식(13)에서  $r$ 은 식(14)에 보인 단면회전반경이고,  $C_i$ 는 무차원 고유진동수로서 그 내용은 식(15)와 같다.

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (14,15)$$

이상에서 식(13)은 전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식이다.

단부가 회전단( $\xi=0$  또는 1에서)인 경우 진동변위와 식(6)의 휨모멘트가 "0"이므로 무차원 변수를 사용하여 경계조건식을 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0 \quad (16,17)$$

고정단( $\xi=0$  또는 1에서)인 경우에는 진동변위와 단면회전각이 "0"이므로 무차원 경계조건식은 다음과 같다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (18,19)$$

본 연구에서는 해석 예로서 식(20)과 (21)의 선형식으로 표현되는 아치를 택하였다. 그림 3은 이 식들로 정의되는 아치 선형을 나타낸 것이며, 이후 식(20)의 선형을 shape 1, 식(21)의 선형을 shape 2로 표기한다.

$$y = H \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (20)$$

$$y = \frac{H}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \right] \quad (21)$$

식(20) 및 (21)을 무차원 변수를 이용하여 다시 쓰면 식(22), 식(23)과 같다.

$$\delta = h \sin(\pi \xi) \quad (22)$$

$$\delta = \frac{h}{2} [1 - \cos(2\pi \xi)] \quad (23)$$

위의 식들에서  $h$ 는 아치높이  $H$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이다.

본 연구에서는 식(13)의 지배 미분방정식을 해석하기 위하여 고전적인 해석기법 중의 하나인 Galerkin method를 이용하였다. 조화진동의 진폭을 식(24)와 같이 나타낼 수 있다고 가정하면, 식(25)와 같이 Galerkin 방정식으로 나타낼 수 있다.<sup>19)</sup>

$$\eta(\xi) = \sum_{i=1}^j a_i \phi_i \quad (24)$$

$$\int_0^1 Q(\eta) \phi_i d\xi = \int_0^1 Q\left(\sum_i a_i \phi_i\right) \phi_i d\xi = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (25)$$

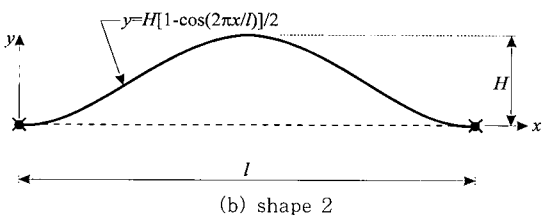
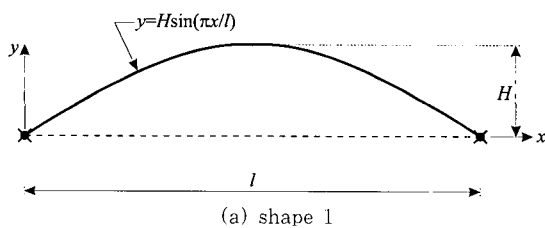


그림 3 아치 선형

식(25)에서  $Q(\eta)$ 의 내용은 식(26)과 같다.

$$Q(\eta) = \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \left(\frac{l}{r}\right)^2 \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \int_0^1 \frac{d\delta}{d\xi} \frac{d\eta}{d\xi} d\xi + \pi^4 k \eta - \pi^2 g \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - C_s^2 \eta \quad (26)$$

대상아치의 단부조건이 양단회전인 경우 식(16) 및 식(17)의 경계조건식을 만족하는 함수  $\phi_i$ 는 식(27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi_i = \sin(i\pi \xi) \quad (27)$$

그리고 양단고정인 경우 식(18) 및 (19)의 경계조건식을 만족하는 함수  $\phi_i$ 는 식(28)과 같이 가정한다.

$$\phi_i = \sin(\pi \xi) \sin(i\pi \xi) \quad (28)$$

그림 4는 양단회전과 양단고정인 경계조건을 만족하는 식(27) 및 (28)의  $i=1$  및  $i=2$ 에 대응하는  $\phi_i$ 를 나타낸 것이다.

본 연구에서는 근사적인 고유진동수 방정식을 얻기 위하여 각각의 해당 진동형에 대한 1개의 항만을 고려한 해를 얻었다. 먼저 식(22)의 선형을 갖는 양단회전 아치인 경우  $i=1$  및  $i=2$ 에 대한 식(27)을 식(25)에 대입하여 정리하면 식(29) 및 식(30)을 얻을 수 있다.

$$a_1 \left[ \pi^4 + \frac{1}{2} \pi^4 h^2 \left(\frac{l}{r}\right)^2 + \pi^4 k + \pi^4 g - C_s^2 \right] = 0 \quad (29)$$

$$a_2 [16\pi^4 + \pi^4 k + 4\pi^4 g - C_A^2] = 0 \quad (30)$$

식(29)와 식(30)에서  $C_S$ 는 대칭진동형을 갖는 최저차 고유진동수(lowest symmetrical frequency),  $C_A$ 는 역대칭진동형을 갖는 최저차 고유진동수(lowest antisymmetrical frequency)이며, 이 식들로부터  $C_S$ 와  $C_A$ 를 구하면 식(31)과 같다.

$$C_S = \pi^2 \sqrt{1 + k + g + \frac{1}{2} \lambda^2} \quad (31a)$$

$$C_A = \pi^2 \sqrt{16 + k + 4g} \quad (31b)$$

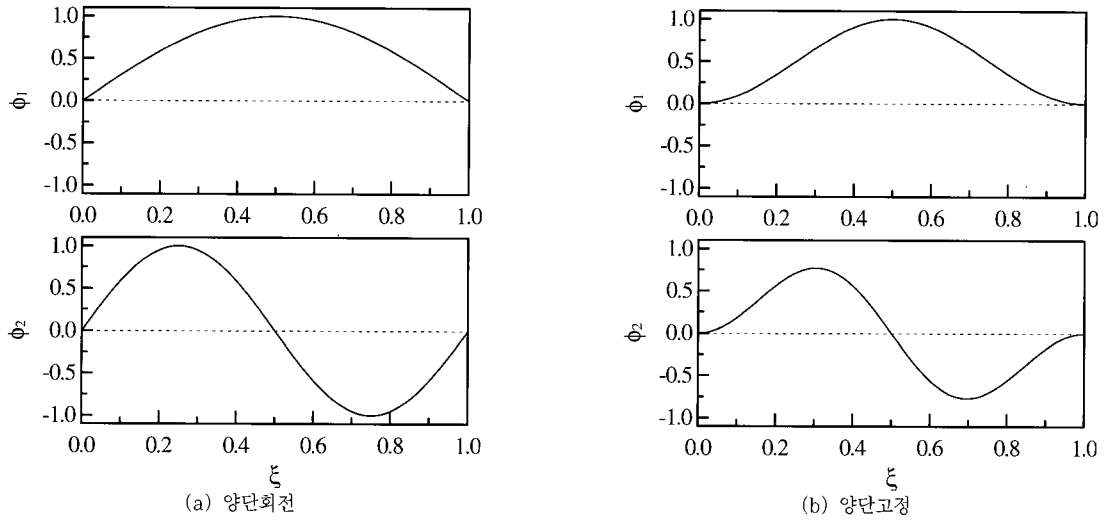


그림 4 진동형  $\phi_i$

식(31a)에서  $\lambda$ 의 내용은 식(32)에 나타난 바와 같으며, 이는 아치높이를 다시 정의하기 위한 무차원 변수이다.

$$\lambda = H/r \tag{32}$$

마찬가지로 식(25)와 (28)을 이용하면 식(33)과 같이 식(22)의 선형을 갖는 양단고정 아치에 대한 고유진동수 방정식이 얻어진다.

$$C_S = \pi^2 \sqrt{\frac{16}{3} + k + \frac{4}{3}g + \frac{128}{27\pi^2} \lambda^2} \tag{33a}$$

$$C_A = \pi^2 \sqrt{41 + k + 5g} \tag{33b}$$

이상에서 식(31)과 (33)은 각각 shape 1의 선형을 갖는 양단회전 및 양단고정 아치의 무차원 고유진동수 방정식이다.

다음으로 식(23), 식(25), 식(27)을 이용하면 shape 2의 선형을 갖는 양단회전 아치의 고유진동수 방정식이 다음 식과 같이 구해진다.

$$C_S = \pi^2 \sqrt{1 + k + g + \frac{16}{9\pi^2} \lambda^2} \tag{34a}$$

$$C_A = \pi^2 \sqrt{16 + k + 4g} \tag{34b}$$

또한 식(23), 식(25), 식(28)을 이용하면 shape 2의 선형을 갖는 양단고정 아치에 대한 무차원 고유진동수 방정식을 식(35)와 같이 구할 수 있다.

$$C_S = \pi^2 \sqrt{\frac{16}{3} + k + \frac{4}{3}g + \frac{2}{3} \lambda^2} \tag{35a}$$

$$C_A = \pi^2 \sqrt{41 + k + 5g} \tag{35b}$$

이상에서 식(34)와 식(35)는 각각 shape 2의 선형을 갖는 양단회전 및 양단고정 아치의 무차원 고유진동수 방정식이다.

### 3. 해석 예 및 고찰

#### 3.1 결과검증

본 연구결과를 검증하기 위하여 문헌 [2, 20]의 결과와 표 1에 비교하였다. 이 표에서  $\lambda=0$ 은 직선보에 대한 결과로서 본 연구결과와 문헌의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다. 특히 양단회전의 단부조건을 갖는 경우 본 연구결과와 문헌의 결과는 일치함을 알 수 있는데, 이는 본 연구에서 가정한 양단회전의 단부조건에 대한 함수  $\phi_i$ 가 정확해이기 때문이다.

또한 탄성지반 위에 놓인 아치문제에 대해서는 본

표 1 본 연구와 문헌의 고유진동수 비교

조 건		비 교	무차원 고유진동수		비 고
			$C_1$	$C_2$	
양단회전	$\lambda=0$ , $k=0.5$ , $g=2$ .	본 연구 문헌[2] 차이(%)*	18.46 (S)** 18.46 (S) 0.00	48.85 (A) 48.85 (A) 0.00	직선보
	$\lambda=0$ , $k=2$ , $g=0$ .	본 연구 문헌[20] 차이(%)	17.09 (S) 17.09 (S) 0.00	41.87 (A) 41.87 (A) 0.00	직선보
	$\lambda=10$ , $k=2$ , $g=0$ .	본 연구 SAP90 차이(%)	41.87 (A) 40.87 (A) 2.39	71.85 (S) 70.90 (S) 1.32	아 치 shape 1
	$\lambda=3$ , $k=3$ , $g=0$ .	본 연구 SAP90 차이(%)	23.40 (S) 23.80 (S) 1.71	43.02 (A) 42.91 (A) 0.26	아 치 shape 2
양단고정	$\lambda=0$ , $k=0.5$ , $g=2$ .	본 연구 문헌[2] 차이(%)	28.77 (S) 28.10 (S) 2.33	70.83 (A) 68.97 (A) 2.63	직선보
	$\lambda=0$ , $k=4.5$ , $g=0$ .	본 연구 문헌[20] 차이(%)	30.95 (S) 30.64 (S) 1.00	66.57 (A) 65.24 (A) 2.00	직선보
	$\lambda=5$ , $k=2$ , $g=0$ .	본 연구 SAP90 차이(%)	43.41 (S) 43.16 (S) 0.58	64.72 (A) 62.60 (A) 3.28	아 치 shape 1
	$\lambda=3$ , $k=1$ , $g=0$ .	본 연구 SAP90 차이(%)	34.66 (S) 34.30 (S) 1.04	63.96 (A) 62.07 (A) 2.95	아 치 shape 2

\* 차이(%) =  $|1 - \text{문헌}/\text{본연구}| \times 100$   
 \*\* S : 대칭진동형, A : 역대칭진동형

연구결과와 구조해석용 범용 프로그램인 SAP90의 결과를 비교하였다. SAP90해석에서는 대상아치를 100개의 직선보 요소로 모형화하였다. 아치문제에 있어서도 본 연구결과와 SAP90의 결과는 비교적 잘 근접함을 알 수 있다. 이상에서 본 연구결과와 타문헌의 결과 비교를 통하여 본 연구결과와의 타당성을 검증할 수 있다.

### 3.2 아치높이에 따른 고유진동수

그림 5와 6은 각각 shape 1과 2인 양단회전 아치, 그림 7과 8은 양단고정 아치의 무차원 고유진동수와 아치높이  $\lambda$ 의 관계를 나타낸 것으로 각 그림의 (a)~(d)는 각각 Winkler지반계수  $k=0, 2, 5, 7$ 에 대한 결과이다. 이 그림들에서 ○, ●로 표시된 값은  $g=0$  즉, 지반연속성을 고려하지 않은 경우, □, ■는  $g=1$ , △, ▲는  $g=3$ 에 대한 결과로서 ○, □, △는 대칭진동형,

●, ■, ▲는 역대칭진동형에 대한 고유진동수를 나타내고 있다.

이 그림들에서 다른 조건이 동일한 경우 아치높이  $\lambda$ 가 증가함에 따라 대칭모드의 최저차 고유진동수는 증가하지만 역대칭모드의 최저차 고유진동수는 일정함을 알 수 있다. 이는 식(31)과 식(33)~(35)에서 알 수 있는 바와 같이 역대칭모드인 경우 고유진동수 방정식에 아치높이  $\lambda$ 항이 포함되어 있지 않기 때문이다. 그러므로  $\lambda$ 가 일정값에 도달하는 경우 두 곡선의 교차점이 나타나게 되는데, 이 점에서는 1개의 고유진동수에 대하여 대칭과 역대칭 즉 두 개의 진동형이 존재할 수 있다. 따라서 이 점을 지나기 전에는 대칭모드의 최저차 고유진동수가 제1고유진동수이며, 이 점을 지난 후에는 역대칭모드의 최저차 고유진동수가 제1고유진동수가 된다.

그림 5~8에서 지반연속성을 고려하는 경우 고유진

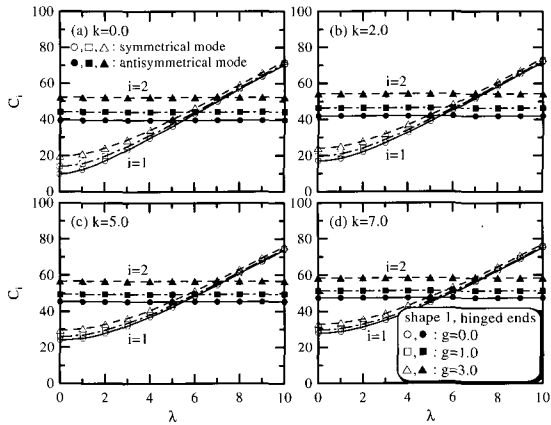


그림 5  $C_i$ - $\lambda$ 관계(shape 1, 양단회전)

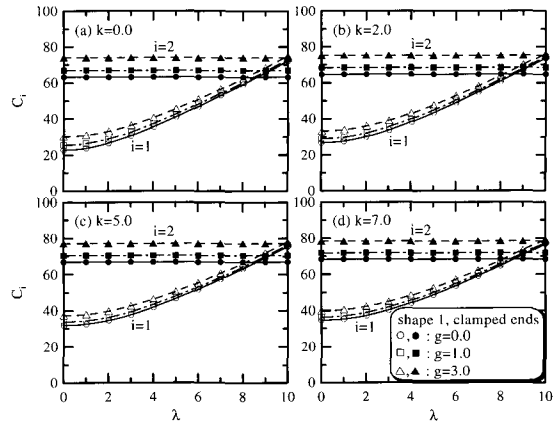


그림 7  $C_i$ - $\lambda$ 관계(shape 1, 양단고정)

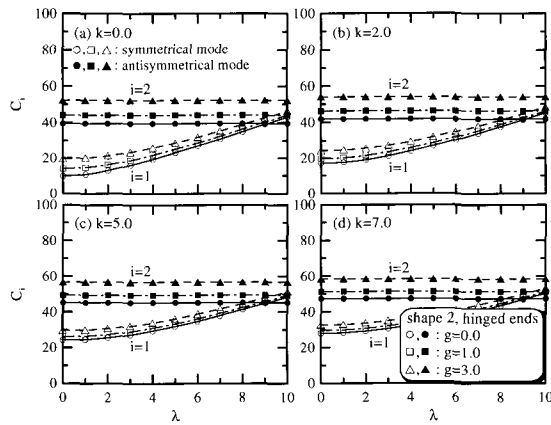


그림 6  $C_i$ - $\lambda$ 관계(shape 2, 양단회전)

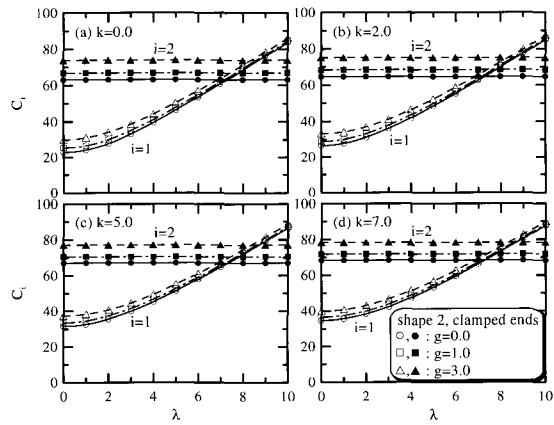


그림 8  $C_i$ - $\lambda$ 관계(shape 2, 양단고정)

동수는 항상 증가하며, 대칭모드인 경우  $\lambda$ 가 작을수록 영향이 큼을 알 수 있다. 그러나 역대칭모드인 경우에는  $\lambda$ 에 관계없이 지반연속성의 영향이 일정함을 알 수 있다.

그림 5~8에서 동일한 전단지반계수  $g$ 를 갖는 경우 대칭모드와 역대칭모드 곡선의 교차점은  $k$ 에 관계없이 모두 일정함을 알 수 있다. Shape 1의 양단회전 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=5.477$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=6$ ,  $g=3$ 인 경우  $\lambda=6.928$ , shape 2의 양단회전 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=9.125$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=9.996$ 에서 두 곡선이 교차함을 알 수 있다( $g=3$ 인 경우  $\lambda=11.54$ 에서 교차하므로 이 그림에 나타나지 않음). 또한 Shape 1의 양단고정 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=8.617$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=9.049$ ,  $g=3$ 인 경우

$\lambda=9.857$ , shape 2의 양단고정 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=7.314$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=7.681$ ,  $g=3$ 인 경우  $\lambda=8.367$ 에서 두 곡선이 교차함을 알 수 있다.

한편 그림 5와 6을 비교하면 나머지 조건이 동일한 경우 shape 1의 선형을 갖는 아치가 shape 2의 선형을 갖는 아치에 비해 대칭진동형에 대응하는 고유진동수  $C_3$ 가 더 큼을 알 수 있다. 이러한 결과는 shape 1의 선형이 양단회전 아치인 경우 최대의 최저차 고유진동수를 갖는 최적형상에 근접하기 때문이다.<sup>21)</sup> 그러나 그림 7과 8을 비교하면 나머지 조건이 동일한 경우 shape 2의 선형을 갖는 아치가 shape 1의 선형을 갖는 아치에 비해 대칭진동형에 대응하는 고유진동수  $C_3$ 가 더 큼을 알 수 있다. 이러한 결과 역시 문헌 [21]에서 교차된 바와 같이 shape 2의 선형이 양단고정 아치인

경우 최대의 최저차 고유진동수를 갖는 최적형상에 근접하기 때문이다.

### 3.3 지반강성에 따른 고유진동수

그림 9와 10은 각각 shape 1과 2인 양단회전 아치의 무차원 고유진동수와 Winkler지반계수  $k$ 의 관계를 나타낸 것으로 각 그림의 (a)~(d)는 각각  $\lambda=0, 4, 8, 10$ 에 대한 결과이다. 이 그림들에서의 기호는 앞서 그림 5~8에서 설명한 바와 같다. 이 그림에서 Winkler지반계수  $k$ 가 증가하는 경우 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있다.

이 그림들에서 아치높이  $\lambda$ 가 증가하는 경우  $\square, \circ, \triangle$ 로 표시된 대칭진동형에 대한 고유진동수는 증가하지만,  $\blacksquare, \bullet, \blacktriangle$ 로 표시된 역대칭진동형에 대한 고

유진동수는 일정한 값을 나타내고 있다. 따라서 앞서 그림 5~8에서 고찰한 바와 같이 shape 1의 선형을 갖는 양단회전 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=5.477$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=6$ ,  $g=3$ 인 경우  $\lambda=6.928$ 보다 큰 아치높이  $\lambda$ 에 대해서는 역대칭진동형이 제1고유진동수, 대칭진동형이 제2고유진동수가 된다. 또한 shape 2의 선형을 갖는 양단회전 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=9.125$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=9.996$ 보다 큰 아치높이  $\lambda$ 에 대해서는 역대칭진동형이 제1고유진동수, 대칭진동형이 제2고유진동수가 된다( $g=3$ 인 경우에는  $\lambda=11.54$ 에서 교차하므로  $\lambda=0\sim 10$ 에서는 대칭모드에 대한 최저차 고유진동수가 항상 제1고유진동수이다).

그림 11과 12는 각각 shape 1과 2인 양단고정 아치의 무차원 고유진동수와 Winkler지반계수  $k$ 의 관계를 나타낸 것으로 각 그림의 (a)~(d)는 각각  $\lambda=0, 6,$

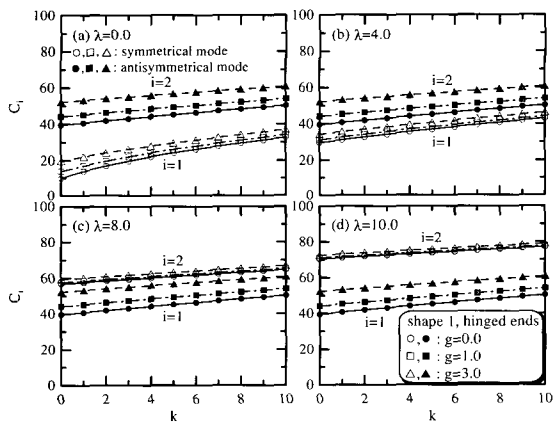


그림 9  $C_i-k$ 관계(shape 1, 양단회전)

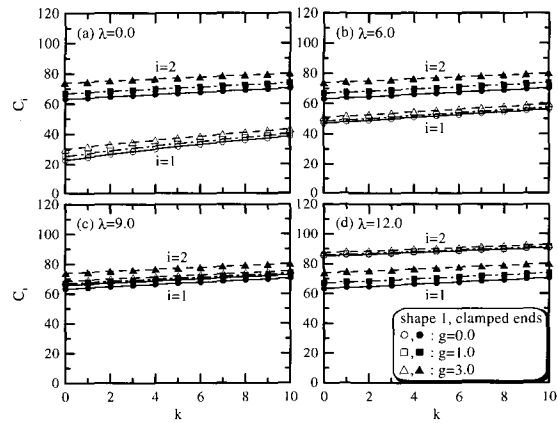


그림 11  $C_i-k$ 관계(shape 1, 양단고정)

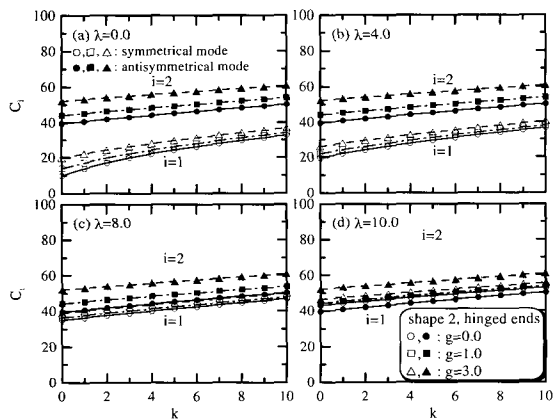


그림 10  $C_i-k$ 관계(shape 2, 양단회전)

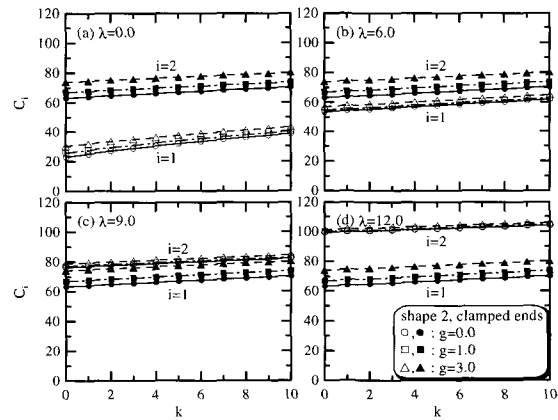


그림 12  $C_i-k$ 관계(shape 2, 양단고정)



9, 12에 대한 결과이다. 이 그림들에서 기호의 내용은 그림 9 및 10과 같으며, Winkler지반계수에 따른 무차원 고유진동수의 변화는 전반적으로 그림 9 및 10에서와 같다. 여기에서도 shape 1의 선형을 갖는 양단 고정 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=8.617$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=9.049$ ,  $g=3$ 인 경우  $\lambda=9.857$ 보다 큰 아치높이  $\lambda$ 에 대해서는 역대칭진동형이 제1고유진동수, 대칭진동형이 제2고유진동수가 된다. 또한 shape 2의 선형을 갖는 양단고정 아치에서는  $g=0$ 인 경우  $\lambda=7.314$ ,  $g=1$ 인 경우  $\lambda=7.681$ ,  $g=3$ 인 경우  $\lambda=8.367$ 보다 큰 아치높이  $\lambda$ 에 대해서는 역대칭진동형이 제1고유진동수, 대칭진동형이 제2고유진동수가 된다.

### 3.4 대칭 및 역대칭모드의 최저차 고유진동수가 동일한 아치높이

식(31)과 식(33)~(35)의 고유진동수 방정식에서 아치높이  $\lambda$ 가 증가하는 경우  $C_S$ 는 증가하지만,  $C_A$ 는  $\lambda$ 와 무관함을 알 수 있다. 따라서 아치높이가 증가하여 일정값에 도달하면  $C_S=C_A$ 인 경우가 존재함을 예측할 수 있다. 이는 1개의 고유진동수에 대하여 대칭 및 역대칭 진동형 즉, 2개의 진동형이 존재할 수 있음을 의미한다. 이와 같이  $C_S=C_A$ 인 경우는 물리적으로 중요한 의미를 갖는다.

Shape 1의 선형을 갖는 양단회전 및 양단고정 아치의 고유진동수 방정식 식(31)과 (33)으로부터  $C_S=C_A$ 가 되는 아치높이식을 산출하면 다음과 같다.

$$\text{양단회전} : \lambda = \sqrt{30 + 6g} \quad (36)$$

$$\text{양단고정} : \lambda = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}} \sqrt{107 + 11g} \quad (37)$$

또한 shape 2의 선형을 갖는 양단회전 및 양단고정 아치의 고유진동수 방정식 식(34)와 (35)로부터  $C_S=C_A$ 가 되는 아치높이식을 구하면 다음과 같다.

$$\text{양단회전} : \lambda = \frac{3\pi}{4} \sqrt{15 + 3g} \quad (38)$$

$$\text{양단고정} : \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{107 + 11g} \quad (39)$$

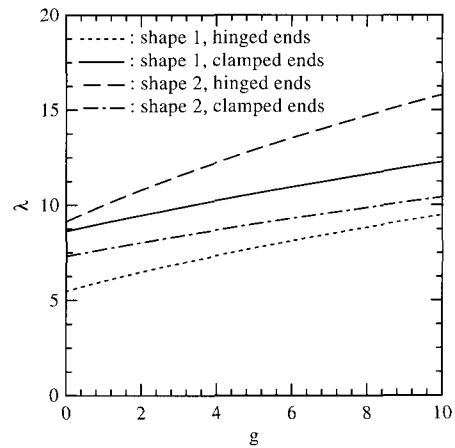


그림 13 대칭 및 역대칭모드의 최저차 고유진동수가 동일한 아치높이

식(36)~(39)로부터  $C_S=C_A$ 가 되는 아치높이식은 전단지반계수  $g$ 의 함수로 표현됨을 알 수 있으며, Winkler지반계수  $k$ 와는 무관함을 알 수 있다.

그림 13은 식(36)~(39)를 그림으로 나타낸 것으로 전단지반계수  $g$ 가 증가할수록 대칭 및 역대칭모드의 최저차 고유진동수가 같아지는 아치높이가 증가함을 알 수 있다. 그리고 양단회전인 경우에는 shape 2, 양단고정인 경우에는 shape 1이 대칭 및 역대칭모드의 최저차 고유진동수가 동일한 아치높이가 됨을 알 수 있다.

또한 대칭 및 역대칭모드의 최저차 고유진동수가 같은 아치높이는 전단지반계수  $g$ 에 관계없이 항상(shape 2, 양단회전), (shape 1, 양단고정), (shape 2, 양단고정), (shape 1, 양단회전)의 순서로 됨을 알 수 있다.

## 4. 결 론

이 논문은 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 자유진동에 관한 연구로서 여기서 얻어진 결과는 다음과 같다.

- 1) 두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반 위에 놓인 낮은 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 유도된 미분방정식에 양단회전 및 양단고정의 단부조건을 갖는 두 종류의 정현아치를 적용하여 Galerkin method로 해석하였다.

- 2) 대칭 및 역대칭 진동형에 대한 최저차 고유진동수 방정식을 산출하여 식(31) 및 식(33)~(35)에 제시하였다.
- 3) 본 연구와 타문헌의 결과를 비교하여 산출된 고유진동수 방정식을 검증하였다.
- 4) 대칭 및 역대칭 진동형의 최저차 고유진동수가 동일한 아치높이식을 산출하여 식(36)~(39)에 제시하였다.
- 5) 해석을 통해 얻어진 결과를 가지고 무차원 고유진동수와 아치높이, Winkler지반계수, 전단지반계수 사이의 관계를 분석하였다.

### 참 고 문 헌

1. S. Kukla, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, 1991, pp.259~265
2. 이병구, "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석", 한국강구조학회 논문집, 제6권 제3호, 1994, pp.107~115
3. T. Yokoyama, "Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Computers and Structures*, Vol. 61, 1996, pp.995~1007
4. M. A. De Rosa and M. J. Maurizi, "The Influence of Concentrated Masses and Pasternak Soil on the Free Vibrations of Euler Beams-Exact Solution," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, 1998, pp.573~581
5. 신영재, 김재호, 황정기, "Differential Transformation에 의한 가변 2 파라미터 탄성기초에 설치된 보의 진동해석", 한국소음진동공학회 논문집, 제11권, 제8호, 2001, pp.357~363
6. P. A. A. Laura and M. J. Maurizi, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, 1987, pp.6~9
7. E. Volterra, "Bending of Circular Beam Resting on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 19, 1952, pp.1~4
8. E. Volterra, "Deflection of Circular Beams Resting on an Elastic Foundation obtained by the method of Harmonic Analysis," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 20, 1953, pp.227~237
9. D. E. Panayotounakos and P. S. Theocaris, "Circular Beam on Elastic Foundation," *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, 1979, pp.839~853
10. E. Volterra and J. H. Gains, *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, 1971
11. D. E. Panayotounakos and P. S. Theocaris, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 47, 1980, pp.139~144
12. T. M. Wang and W. F. Brannen, "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, 1982, pp.241~246
13. M. S. Issa, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, 1988, pp.291~301
14. 이병구, 오상진, 이재만, "탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동", 한국전산구조공학회 논문집, 제11권, 제2호, 1998, pp.273~280
15. 이병구, 박광규, 오상진, "두 개의 매개변수로 표현되는 탄성지반위에 놓인 원호형 곡선보의 자유진동", 한국전산구조공학회 논문집, 제12권 제4호, 1999, pp.661~669
16. G. J. Simitzes, "Snapping of Low Pinned Arches on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 40, No. 3, 1973, p.741
17. G. J. Simitzes, *An Introduction to the Elastic Stability of Structures*, Prentice-Hall, 1976
18. A. P. S. Selvadurai, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier, 1979
19. W. F. Chen and E. M. Lui, *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier, 1987

20. B. A. Abbas and J. Thomas, "Dynamic Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, 1978, pp.33~44

21. R. H. Plaut and N. Olhoff, "Optimal Forms of Shallow Arches with Respect to Vibration and Stability," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 11, No. 1, 1983, pp.81~100