

부유식 해양구조물에 작용하는 시간평균 파표류력에 관한 고찰

홍도천*

*한국해양연구원 해양개발시스템연구본부

On the Time-Mean Drift Force Acting on a Floating Offshore Structure in Waves

DO-CHUN HONG*

*Ocean Development System Laboratory, KORDI, Daejeon, Korea

KEY WORDS : Time-Mean Wave Drift Forces and Moments 시간평균 파표류력 및 모멘트, Far-Field Method 무한원방방법, Near-Field Formula 접수면압력 직접적분법, Non-Zero Time-Mean Momentum Flux 0이 아닌 시간평균 유체 모멘텀

ABSTRACT: Formulation of the far-field method for the prediction of time-mean hydrodynamic force and moment acting on a 3-D surface-piercing body in waves is reviewed. It is found that the inequality between the weight of the floating body and its buoyancy force permits the replacement of the fluid particles inside the control surface by the fluid particles outside the control surface. Under such circumstances, momentum exchanges across the control surface make the time-mean value of the time rate of the momentum of the fluid inside the control surface non-vanishing. It is a second-order quantity which is hard to calculate by the far-field method. The drift forces and moments on half-immersed ellipsoids are calculated by both the far-field method and the near-field method. The discrepancy between two numerical results is presented and discussed.

1. 서 론

규칙과 중에 계류된 3차원 부유체에 작용하는 시간평균 표류력 및 표류모멘트를 선형 포텐셜 이론을 사용하여 구하는 방법에는 유동의 모멘텀 보존법칙에 입각한 무한원방방법(far-field method)이 잘 알려져 있다(Maruo, 1960; Newman, 1967). 한편 부유체의 접수면에 작용하는 압력을 직접적분하여 표류력 및 모멘트를 구하는 방법(near-field method)도 개발된 바 있다(Pinkster and van Oortmerssen, 1977). 자유표면을 가로지르는 임의형상 부유체의 경우, 무한원방 방법과 접수면 압력 직접적분법의 양자에 의하여 계산된 시간평균 표류력 사이에 차이가 있는 바 본 논문에서 이의 발생원인에 대하여 이론적인 고찰과 아울러 비교 수치계산을 수행하였다.

2. 포텐셜 경계치 문제

부유체는 강체이고 유체는 비점성, 비압축성이며 자유표면 F , 부유강체의 접수면 S , 무한수심에 위치한 수평면 D , 그리고 무한원방에서 부유체를 에워싼 원통형 수직 수학경계면 R 로 이루어진 Σ 내의 공간 V 를 점하고 여기에 중력이 작용하고 있다. 직각좌표계 (x, y, z) 의 원점 O 가 평균위치에 있는 부유

체의 수신면 W 상에 있고 z 축은 수직상방을 가리킨다. S 상에서 V 를 향한 법선 벡터를 \vec{n} , 평균위치에서의 S 및 \vec{n} 을 S_0, \vec{n}_0 라 한다. 주파수 ω 와 미소진폭 a_0 를 가진 입사파가 무한원방에서 오며, 부유체는 ω 로 미소진폭 단순조화운동을 한다. 유동을 비회전이라 하면 유속은 Laplace방정식을 만족시키는 속도포텐셜 Φ 로부터 구할 수 있다. 부유체의 운동 $a_k(k=1, 2, 3)$ 는 각각 전후, 좌우 및 상하 동요이고 $a_k(k=4, 5, 6)$ 는 회전중심 O 에 대한 횡, 종 및 선수요이다. 속도포텐셜 Φ 는 입사파포텐셜 Φ_0 , 산란파 Φ_T 및 방사파 Φ_R 로 구성된다.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, t) &= \Phi_0 + \Phi_R + \Phi_T \\ &= \text{Re}\{(\Psi_0 + \Psi_R + \Psi_T)e^{-i\omega t}\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Psi_0 = -\frac{a_0 g}{\omega_0} e^{k_0[z + i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} \quad (2)$$

여기서 g 는 중력가속도, k_0 는 파수이고 β 는 x 축으로부터 잰 파랑의 입사각이다.

무한수심에서 자유표면 경계조건을 만족시키는 Green함수를 사용하여 S_0 를 포함한 유체영역 V 내 임의점의 포텐셜을 구할 수 있다(Hong, 1987). 포텐셜을 알면 접수면 S 에 작용하는 유

제1저자 홍도천 연락처: 대전광역시 유성구 장동 171

042-868-7588 dchong@kriso.re.kr

체압력 p 를 S_0 상 Φ 의 Taylor 급수전개로부터 Bernoulli 공식을 사용하여 구할 수 있다.

$$p = -\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gz\right) \quad (3)$$

부유체의 접수면에 작용하는 유체압력을 적분하여 시간평균 표류력 및 모멘트를 구할 수 있고 이는 접수면 압력 직접적분 방법으로 잘 알려져 있으며 이 과정은 부록에 자세히 소개되어 있다(Hong, 1998).

3. 무한원방 시간평균 표류력 및 모멘트

무한원방방법은 Σ 내의 공간 V 를 점하고 있는 유체 입자의 운동방정식과 모멘텀으로부터 시간평균 표류력 및 모멘트를 구하는 것이다. Σ 안에 있는 유체 입자의 집합 M_f 의 모멘텀에 대한 시간미분은 S , F , D 및 R 의 경계면 조건을 고려하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{I}}{dt} &= \frac{d}{dt} \iiint_{M_f} \vec{v} dm \\ &= \rho \iiint_V \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\tau - \rho \iint_{\Sigma} \vec{v} (\vec{v}_E \cdot \vec{n}) ds \end{aligned} \quad (4)$$

위에서 Σ 의 법선 벡터 \vec{n} 은 경계면에서 V 내부로 향하며 $\frac{d}{dt}$ 는 particle derivative, v_E 는 경계면의 속도이고 divergence theorem 및 비압축성 유체의 연속방정식이 사용되었다. 한편 D'Alembert의 원리에 의하면 M_f 의 운동의 매순간마다 M_f 에 가해진 힘과 M_f 의 관성력은 평형을 이루므로 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\iiint_{M_f} \frac{d\vec{v}}{dt} dm = \iiint_{M_f} \vec{F}_B dm + \iint_{\Sigma} p \vec{n} ds \quad (5)$$

여기서 \vec{v} 는 dm 의 속도, p 는 유체압력이고 \vec{F}_B 는 단위 유체질량에 작용하는 body force이다. (5)식을 (4)식에 대입하여 divergence theorem 및 비압축성 유체의 연속방정식을 사용하여 정리하면 M_f 의 모멘텀의 시간변화는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{I}}{dt} &= \rho \iint_{\Sigma} \left[\frac{p}{\rho} \vec{n} + \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n} - \vec{v}_E \cdot \vec{n}) \right] ds \\ &+ \iiint_{M_f} \vec{F}_B dm \end{aligned} \quad (6)$$

위에서

$$p=0, \quad (\vec{v} - \vec{v}_E) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } F \quad (7)$$

$$(\vec{v} - \vec{v}_E) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{on } S \quad (8)$$

$$\vec{v} = 0, \quad \vec{v}_E = 0 \quad \text{on } D \quad (9)$$

$$\vec{v}_E = 0 \quad \text{on } R \quad (10)$$

(7)-(10)식들을 (6)에 대입하여 정리하면 접수면 S 를 통하여 부유체에 작용하는 유체력 \vec{F}_S 가 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} \vec{F}_S &= - \iint_S p \vec{n} ds = - \frac{d\vec{I}}{dt} \Big|_S \\ &+ \rho \iint_R \left[\frac{p}{\rho} \vec{n} + \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \right] ds \\ &+ \iint_D p \vec{e}_3 ds + \iiint_{M_f} \vec{F}_B dm \end{aligned} \quad (11)$$

한편 표류력 \vec{F}_d 에는 부유 강체에 작용하는 중력이 포함되므로,

$$\vec{F}_d = \vec{F}_S + \vec{W}_G \quad (12)$$

(11)식 우변에 \vec{W}_G 를 더하고 $\vec{F}_B = -g \vec{e}_3$ 임을 고려하면 \vec{F}_d 의 시간평균 $\overline{\vec{F}_d}^t$ 는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} \overline{\vec{F}_d}^t &= - \overline{\iint_S p \vec{n} ds}^t + \vec{W}_G \\ &= - \overline{\frac{d\vec{I}}{dt}}^t + \rho \overline{\iint_R \left[\frac{p}{\rho} \vec{n} + \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \right] ds}^t \\ &+ \vec{e}_3 \iint_D \overline{p}^t ds - g \vec{e}_3 \overline{\iiint_{M_f} dm}^t - \vec{W}_G \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 V 내의 유체질량 M_f 의 시간평균이 M_0 이라면

$$\overline{\iiint_{M_f} dm}^t = M_0 \quad (14)$$

한편 무한수심에서 $p = -\rho gz$ 이므로

$$\iint_D \overline{p}^t ds = gM_0 + W_G \quad (15)$$

따라서 (13)식 우변의 셋째 항, 넷째 항 및 마지막 항의 시간평균은 상쇄된다. 그러나 $d\vec{I}/dt$ 의 시간평균은 소멸된다고 볼 수 없다. 유체질량 M_f 의 시간평균은 M_0 이나 M_f 를 구성하는 유체 입자의 일부 δM_f 는 자유표면을 가로지르는 부유체가 정적 평형상태보다 아래로 내려올 때 R 밖으로 나갈 수 있고, 부유체가 정적 평형상태보다 위로 올라갈 때는 R 밖의 유체 입자의 일부 $\delta M_f'$ 가 R 안으로 들어올 수 있기 때문이다. 이때 δM_f 및 $\delta M_f'$ 가 시간의 함수이고 이들 유체 입자의 속

도도 시간의 함수이므로 양자의 곱으로 표시되는 모멘텀의 시간변화율의 시간평균이 생기며 이것이 $d\vec{I}/dt$ 의 시간평균으로 귀착된다. 이것을 $\delta\vec{I}_T$ 로 표시하면 $\overline{F_d}^t$ 는 다음과 같이 된다.

$$\overline{F_d}^t = -\delta\vec{I}_T + \rho \overline{\iint_R [\frac{b}{\rho} \vec{n} + \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n})]} ds^t \quad (16)$$

(16)식의 의미는 $\delta\vec{I}_T$ 가 양일 때, 즉 V 내 유체 입자의 모멘텀의 순증가의 시간평균이 양이고 그 절대값이 (16)식의 두 번째 항의 절대값보다 크면 음의 시간평균 표류력 발생도 가능하다.

한편 시간평균 표류모멘트 계산에서도 같은 이유로 공간에 고정된 부유체의 회전중심 O 에 대하여 $\delta\vec{K}_T$ 가 발생한다.

$$\overline{M_d}^t = \overline{\iint_R [b(\vec{OM} \times \vec{n}) + \rho(\vec{v} \cdot \vec{n})(\vec{OM} \times \vec{v})]} ds^t - \delta\vec{K}_T, \quad i=1,2,3 \quad (17)$$

한편 Maruo(1960)와 Newman(1967)에 의하여 $\delta\vec{I}_T$ 를 제외한 $\overline{F_d}^t$ 의 x 성분인 f_1 과 y 성분인 f_2 그리고 $\delta\vec{K}_T$ 를 제외한 $\overline{M_d}^t$ 의 z 성분인 m_3 가 다음과 같이 구하여진 바 있다.

$$f_1 = -\rho \frac{k_0^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\theta) H^*(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{\rho}{2} \omega a_0 \cos \beta \text{Im}\{H(\beta)\} \quad (18)$$

$$f_2 = -\rho \frac{k_0^2}{8\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(\theta) H^*(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{\rho}{2} \omega a_0 \sin \beta \text{Im}\{H(\beta)\} \quad (19)$$

$$m_3 = -\rho \frac{k_0}{8\pi} \text{Im} \int_{-\pi}^{+\pi} H^*(\theta) \frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} d\theta - \rho \frac{a_0 \omega}{2k_0} \text{Re} \frac{\partial H(\beta)}{\partial \beta} \quad (20)$$

H 는 다음과 같은 Kochin function이다

$$H(\theta) = \iint_S \left(\frac{\partial \Psi_P}{\partial n} - \Psi_P \frac{\partial}{\partial n} \right) \times e^{k_0[z - i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} ds \quad (21)$$

위에서 Ψ_P 는 전체 포텐셜 Ψ 에서 Ψ_0 를 뺀 Ψ_R 과 Ψ_I 의 합인 무한원방식이다.

$$\Psi_P(r, \theta, z) = -\sqrt{\frac{k_0}{2\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{k_0(z+ir)}}{\sqrt{r}} H(\theta) + O(r^{-3/2}) \quad (22)$$

위에서 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 이고 $\theta = \arctan(y/x)$ 이다.

4. 비교 수치계산 및 토의

수치모형은 Fig. 1과 같이 절반이 물에 잠겨있는 타원체이며 수선면 타원의 장축 a 가 x 축, 단축 b 가 y 축과 일치되게 하였다. a 는 4m, b 는 2m이며 흘수에 해당하는 z 방향축 c 는 3m이다. Green적분방정식의 이산화할 위하여 접수면을 1300개의 평면요소로 분할하였다.

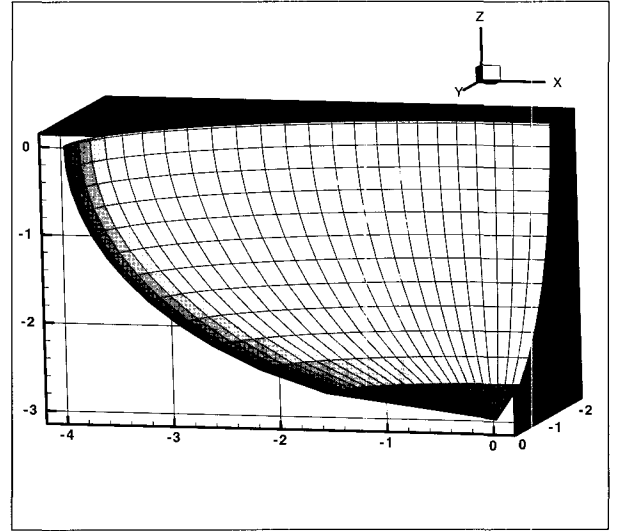


Fig. 1 Configuration of the ellipsoid (1/4 is discretized)

특성장을 $L = a$ 로 취한 무차원 값들이 Fig. 2-Fig. 7에 소개되었다. 무차원 운동진폭을 $A_k = \frac{|a_k|}{a_0}$, ($k=1,2,3$) 이고 $A_k = \frac{|a_k|L}{a_0}$, ($k=4,5,6$) 이다. 무한원방방법에 의한 x, y 방향 무차원 시간평균 표류력 및 선수요 모멘트를 각각 $F1 = \frac{f_1}{\rho g a_0^2 L}$, $F2 = \frac{f_2}{\rho g a_0^2 L}$ 및 $M3 = \frac{m_3}{\rho g a_0^2 L^2}$ 로 나타내었다. 부록에 소개된 바와 같은 접수면압력 직접적분 방법에 의한 x, y, z 방향 무차원 시간평균 표류력 및 모멘트를 각각 FX, FY, FZ 및 MX, MY, MZ 로 나타내어 이들을 비교하였다.

$$FX = \frac{\overline{F_E}^t \cdot e_1}{\rho g a_0^2 L} \quad (23)$$

$$FY = \frac{\overrightarrow{F_E}^t \cdot \overrightarrow{e_2}}{\rho g a_0^2 L} \quad (24)$$

$$FZ = \frac{\overrightarrow{F_E}^t \cdot \overrightarrow{e_3}}{\rho g a_0^2 L} \quad (25)$$

$$MX = \frac{\overrightarrow{M_E}^t \cdot \overrightarrow{e_1}}{\rho g a_0^2 L^2} \quad (26)$$

$$MY = \frac{\overrightarrow{M_E}^t \cdot \overrightarrow{e_2}}{\rho g a_0^2 L^2} \quad (27)$$

$$MZ = \frac{\overrightarrow{M_E}^t \cdot \overrightarrow{e_3}}{\rho g a_0^2 L^2} \quad (28)$$

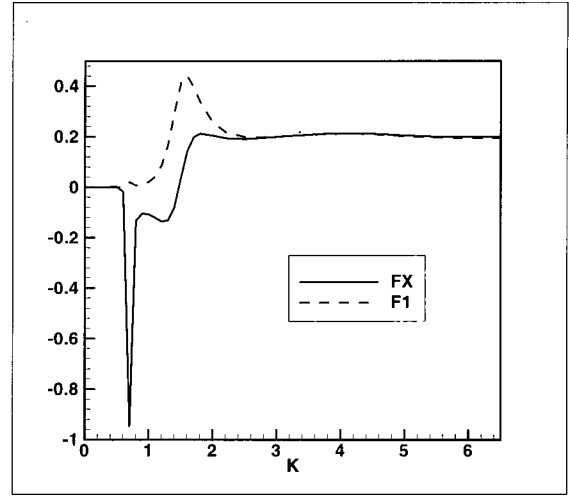


Fig. 4 Surge drift forces of the ellipsoid

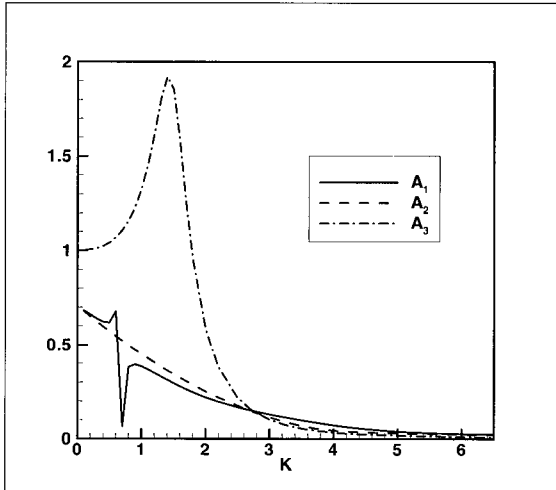


Fig. 2 Amplitude ratios of surge, sway and heave of the ellipsoid

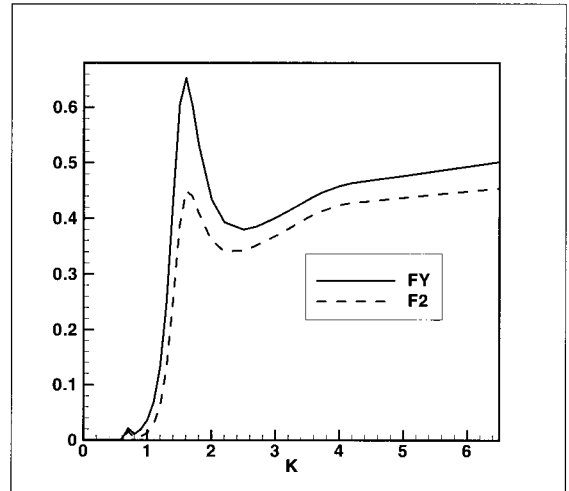


Fig. 5 Sway drift forces of the ellipsoid

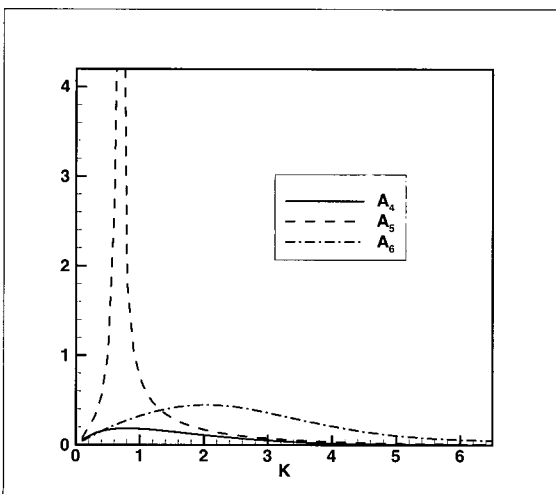


Fig. 3 Amplitude ratios of roll, pitch and yaw of the ellipsoid

계산은 파의 입사각 β 가 45도인 경우에 대하여 무차원 파수 $K = \omega^2 L/g$ 이 6.5까지 수행되었다.

Fig. 2 및 Fig. 3를 보면 상하동요 공진이 $K = 1.4$, 중요 공진이 $K = 0.7$ 에서 발생함을 알 수 있다.

Fig. 4에 무한원방 및 접수면압력 직접적분 방법에 의한 x 방향 표류력 $F1$ 및 FX 가 표시되었다. $0.6 < K < 3$ 구간에서 양자의 차이가 크며 $K = 0.7$ 에서 FX 의 최저값은 중요한 공진에 기인한 비현실적 값이다.

Fig. 5에 y 방향 표류력 $F2$ 및 FY 가 표시되었다. 상하동요 공진파수 $K = 1.4$ 부근에서 양자의 차이가 크다.

Fig. 6에 z 방향 표류모멘트 $M3$ 및 MZ 가 표시되었다. $K = 0.7$ 부근에서의 심한 변화는 중요한 공진에 기인한 것이다. $K = 1.4$ 부근에서의 값은 상하동요 공진의 영향이다.

Fig. 7에 접수면압력 직접적분 방법으로 구한 z 방향 표류력 및 x, y 방향 모멘트를 표시하였다.

무한원방법 및 접수면압력 직접적분 방법에 의한 계산결과를 보면 양자의 차이가 상존하며 특히 종동요 표류력 및 선수요 표류모멘트는 일부 구간에서 양자의 부호가 틀리는 등의 매우 큰 차이를 보인다. 이로 미루어 양자간의 차이가 두 방법에 내재하는 수치오차를 감안하더라도 근본적으로 $\delta \vec{I}_T$ 와 $\delta \vec{K}_T$ 에 기인한다고 판단된다.

한편 부록에 소개된 접수면압력 직접적분 방법에서 (A27a or b)식으로 표시된 $\overline{F_A^{(2)}}$ 및 (A41)식으로 표시된 $\overline{M_A^{(2)}}$ 의 시간평균이 수평방향 표류력 및 선수요 표류모멘트에 기여하는데 본 논문에서는 부록에 전개된 바와 같은 논리에 의하여 이의 기여분이 기존의 Pinkster의 식에서는 1배로 되어있는 것과 다르게 2배인 것으로 취하였다. 이로 말미암아 종동요 표류력이 음의 값이 되는 현상이 발생하였다.

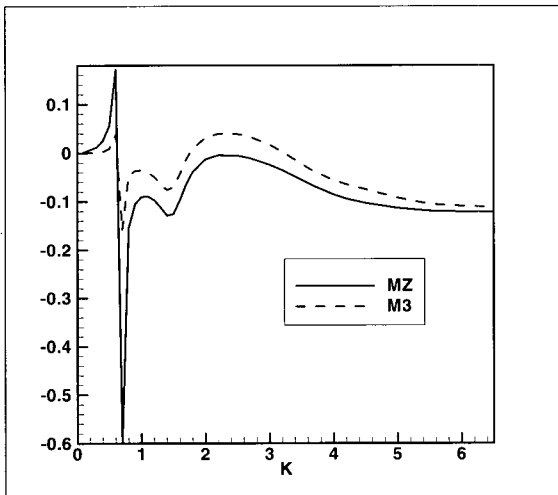


Fig. 6 Yaw drift moments of the ellipsoid

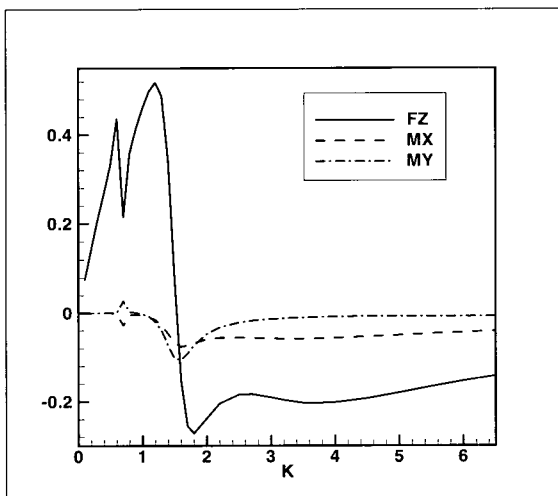


Fig. 7 Heave drift force and roll and pitch drift moments of the ellipsoid

표류력 비교계산에 많이 사용된 수치모형인 반구의 경우 $\overline{F_A^{(2)}}$ 및 $\overline{M_A^{(2)}}$ 의 기여가 없었던 바 그 이유는 이들이 부록에

표시된 바와 같이 부유체의 회전운동에 기인하는데 반구에서는 회전운동이 발생하지 않기 때문이다(홍도천 등, 1937). 특히 $\overline{F_A^{(2)}}$ 는 파 에너지 전파와는 무관하게 순전히 자유표면을 가로지르는 부유체의 회전운동에 의한 접수면 변동에 따른 부력 변화에 기인하므로 이에 의한 음의 표류력 발생이 파 에너지 보존법칙에 위배된다고 볼 수 없다.

5. 결 론

본 논문에서는 시간평균 표류력 및 모멘트를 구하는 무한원방법을 고찰하였고 접수면압력 직접적분 방법과의 비교 수치계산을 수행하였다. 이로부터 다음의 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 무한원방법은 $\delta \vec{I}_T$ 및 $\delta \vec{K}_T$ 가 0이라는 가정 아래에서 유효하나, 자유표면을 가로지르며 운동하는 부유체의 존재가 이 가정을 만족시킬 수 없으므로 개략적인 시간평균 표류력 산정법이며 수직방향 표류력 및 수평방향 표류모멘트를 구하는 실용적인 식은 발표된 바 없다.
- (2) 접수면압력 직접적분 방법에서는 선형 포텐셜의 섭동전개에 의하여 2nd-order 항을 구하고 이의 시간평균이 표류력 및 모멘트를 주므로 x, y, z 방향의 모든 시간평균 표류력 및 모멘트를 얻을 수 있다.
- (3) 본 계산예에서 보인 바와 같은 음의 표류력은 실험에 의하여 확인되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

홍도천, 홍사영, 이상무 (1987). "대형 해양구조물에 작용하는 파랑하중에 관하여", 한국해양공학회지, 제1권 제1호, pp 33-38.

Hong, D.C. (1987). "On the Improved Green integral equation applied to the water-wave radiation-diffraction problem", Journal of the Society of Naval Architect of Korea, Vol 24, No 1, pp 1-8.

Hong, D.C. (1998). "Contribution of hydrostatic pressure to the steady horizontal drift Forces and the vertical drift moment acting on a floating body in waves", International Journal of Ocean Engineering and Technology, Vol 1, No 1, pp 10-27.

Maruo, H. (1960). "The drift of a body floating in waves", Journal of Ship Research, Vol 4, No 3, pp 1-10.

Molin, B. (1983). "On second-order motion and vertical drift forces for three dimensional bodies in regular waves", Proceedings of the International Workshop on Ship and Platform Motions, University of California, Berkeley, pp 344-362.

Newman, J.N. (1967). "The drift force and moment on ships in waves, Journal of Ship Research", Vol 11, No 1, pp 51-60.

Ogilvie, T.F. (1983). "Second-order hydrodynamic effects on ocean platforms, Proceedings of the International Workshop on Ship and Platform Motions", University of California, Berkeley, pp 205-265.

Pinkster, J.A. and van Oortmerssen, G. (1977). "Computation of the first and second order wave forces on oscillating bodies in regular waves", Proc. 2nd Int. Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, University of California, Berkeley.

부 록

The near-field method

A solid body is oscillating in the free surface F of deep water under gravity and in the presence of plane progressive sinusoidal incident waves. With the usual assumptions of the incompressible fluid and irrotational flow without capillarity, the fluid velocity \vec{v} can be given by the gradient of a velocity potential Φ .

$$\vec{v} = \nabla \Phi \quad (A1)$$

The mean position of the floating body is assumed to be fixed by some externally applied mechanism. By making use of the perturbation analysis, Φ and the motions of the floating body can be developed in powers of ε which is, for example, as small as the wave slope:

$$\Phi = \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} + O(\varepsilon^3) + \dots \quad (A2)$$

$$\vec{a} = \varepsilon \vec{a}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{a}^{(2)} + O(\varepsilon^3) + \dots \quad (A3)$$

$$\vec{\theta} = \varepsilon \vec{\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{\theta}^{(2)} + O(\varepsilon^3) + \dots \quad (A4)$$

where the terms with superscripts (1) and (2) denote the first-order and the second-order quantities respectively and the powers of ε are to be absorbed into the real quantities. The potential and the floating body motions are expressed in the space-fixed reference frame (xyz) with the origin O in the waterplane W_0 of the body at its mean position and z axis vertically upwards. We denote the exact wetted surface of the body expressed in the space-fixed reference frame by S . The wetted surface of the body in its static equilibrium condition when it is floating in the undisturbed water surface $z = 0$ is denoted by S_0 . The origin O is

taken as the mean position of the center of the rotation of the body. The first-order, the second-order and the higher-order terms in (A2), (A3) and (A4) are assumed to be purely sinusoidal in time.

$$\vec{a}^{(1)} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} \vec{\theta}^{(1)} &= \theta_4 \vec{e}_1 + \theta_5 \vec{e}_2 + \theta_6 \vec{e}_3 \\ &= \theta_1 \vec{e}_1 + \theta_2 \vec{e}_2 + \theta_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (A6)$$

where a_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) denote amplitude of first-order surge, sway, heave, roll, pitch and yaw motions respectively. They can also be expressed as follows :

$$\begin{aligned} a_k &= a_k^* \cos \omega t + a_k^{**} \sin \omega t \\ &= \text{Re}\{ (a_k^* + i a_k^{**}) e^{-i\omega t} \}, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (A7)$$

where ω denotes the circular frequency of the first-order incident waves.

We need also another set of axes $(x'y'z')$, say the body-fixed reference frame, which coincides with the space-fixed reference frame when the body is in its mean position. We denote the exact wetted surface of the body expressed in this reference frame by S' .

The position vector of a point M on S' expressed in the body-fixed reference frame is as follows :

$$\vec{r}(M)' = x_M' \vec{e}_1' + y_M' \vec{e}_2' + z_M' \vec{e}_3', \quad M \text{ on } S' \quad (A8)$$

It can also be expressed in the space-fixed reference frame as follows :

$$\vec{r}(M) = x_M \vec{e}_1 + y_M \vec{e}_2 + z_M \vec{e}_3, \quad M \text{ on } S \quad (A9)$$

The latter can further be expressed as follows :

$$\begin{aligned} \vec{r}(M) &= \vec{r}_0(M) + \vec{a}^{(1)} + \vec{\theta}^{(1)} \times \vec{r}_0(M) \\ &\quad + Q \vec{r}_0(M) + O(\varepsilon^3) + \dots \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\vec{r}_0(M) = x_M' \vec{e}_1 + y_M' \vec{e}_2 + z_M' \vec{e}_3 \quad (A11)$$

The matrix Q on the right-hand side of (A10) denotes the rotation matrix which carries out angular transformation of a vector from its expression in the body-fixed reference frame into that in the space-fixed reference frame when $|\vec{\theta}|$ is small :

$$Q = \begin{vmatrix} -(a_5^2 + a_6^2)/2 & 0 & 0 \\ a_4 a_5 & -(a_4^2 + a_6^2)/2 & 0 \\ a_4 a_6 & a_5 a_6 & -(a_4^2 + a_5^2)/2 \end{vmatrix} \quad (\text{A12})$$

It should be noted that Q represents the reverse transformation of Q^T which carries out positive successive rotations of $O(\varepsilon)$ about x, y, z axes in that order.

The position vector $\vec{r}_0(M)$ defined by (A11) can be interpreted as the zeroth order expression of $\vec{r}(M)$ in the space-fixed reference frame.

Similarly, the perturbation expansion of a unit normal vector \vec{n} on S , directed into the fluid region, is

$$\vec{n} = \vec{n}_0 + \vec{\theta}^{(1)} \times \vec{n}_0 + Q \vec{n}_0 + O(\varepsilon^3) + \dots \quad (\text{A13})$$

where \vec{n}_0 denotes \vec{n} at its mean position directed into the fluid region from S_0 .

Now, we can express any quantity q on S by the perturbation expansion of its value q_0 on S_0 as follows:

$$\begin{aligned} q &= q_0 + (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \nabla q_0 \\ &= q_0 + \vec{A} \cdot \nabla q_0 + (Q \vec{r}_0) \cdot \nabla q_0 \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

where

$$A = \vec{a}^{(1)} + \vec{\theta}^{(1)} \times \vec{r}_0 \quad (\text{A15})$$

Thus, if q_0 is $O(\varepsilon)$, for example, $\vec{A} \cdot \nabla q_0$ is $O(\varepsilon^2)$ and $(Q \vec{r}_0) \cdot \nabla q_0$ is $O(\varepsilon^3)$.

The time averages of the second-order forces and moments on the floating body due to the second-order potential and body motions are null since they are assumed to be purely sinusoidal. Therefore they will not be evaluated here and only the quadratic terms of first-order quantities which are $O(\varepsilon^2)$ will be evaluated. Since the second-order potential and motions will not appear in the rest of the present analysis, the superscript (1) in the expressions of $\vec{a}^{(1)}$, $\vec{\theta}^{(1)}$ and $\Phi^{(1)}$ will be omitted in the sequel.

The first-order boundary value problem for Φ is solved by the improved Green integral equation (Hong, 1987).

The fore part of this presentation follows that of Ogilvie (Ogilvie, 1983).

Using Bernoulli's equation

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \quad (\text{A16})$$

where g denotes the gravitational acceleration, the force \vec{F}_F due to the fluid pressure p acting on the wetted surface of the body can be found :

$$\vec{F}_F = \vec{F}_S + \vec{F}_C \quad (\text{A17})$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_S &= \rho \int \int_{S_0} [(1 + \vec{A} \cdot \nabla + Q \vec{r}_0 \cdot \nabla) \\ &\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)] \\ &\quad (\vec{n}_0 + \vec{\theta} \times \vec{n}_0 + Q \vec{n}_0) ds \end{aligned} \quad (\text{A18})$$

Since the integral over S_0 can not involve the fluid pressure p above the mean water surface $z=0$, an integral of p denoted by \vec{F}_C over δS , the portion of S between the plane $z=0$ and the first-order free surface $z-\zeta=0$, should be added to \vec{F}_S so that their sum is equivalent to the integral of p over the entire wetted surface S valid to second order. The first-order wave elevation ζ can be obtained from the linearized free surface condition :

$$\zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{on } z=0 \quad (\text{A19})$$

Then the area δS which is $O(\varepsilon)$ can be expressed as follows:

$$\delta S = \int_C dl \int_0^\zeta dz \quad (\text{A20})$$

where C denotes the waterline of the body at its mean position.

Now, extending the fluid region to the surface $z-\zeta=0$, we can express \vec{F}_C as follows:

$$\begin{aligned} \vec{F}_C &= - \int \int_{\delta S} p \vec{n} ds \\ &= - \int_C \vec{n}_0 dl \int_0^\zeta p dz \end{aligned} \quad (\text{A21})$$

The pressure p in the inner integral is to be expanded in accordance with (14). Since δS is $O(\varepsilon)$, perturbation expansion of p to first order will be sufficient.

Here, in order to simplify the perturbation expansion of p on C , we assume that S_0 intersects the plane $z=0$ at a right angle. It follows that

$$\begin{aligned}
 p &= p(M) + \overline{A(M)} \cdot \frac{\partial p(M)}{\partial z} \vec{e}_3 + \dots \\
 &= -\rho g z_M - \rho g A_3 - \rho \frac{\partial \Phi(M)}{\partial t} + O(\varepsilon^2) \\
 &= -\rho g [z_M + A_3 - \zeta] + O(\varepsilon^2) + \dots,
 \end{aligned} \tag{A22}$$

M on C

where

$$\begin{aligned}
 A_3(M) &= [\vec{a} + \vec{\theta} \times \overline{r_0(M)}] \cdot \vec{e}_3 \\
 &= a_3 + y_M \theta_1 - x_M \theta_2, \quad M \text{ on } C
 \end{aligned} \tag{A23}$$

Now the inner integral on the right-hand side of (A21) can be evaluated as follows:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\zeta p \, dz &= -\rho g \int_0^\zeta [z - (\zeta - A_3)] \, dz \\
 &= -\rho g \left[\frac{\zeta^2}{2} - \zeta(\zeta - A_3) \right]
 \end{aligned} \tag{A24}$$

The quantity in parentheses on the right-hand side of (A24) represents the relative wave height ζ_R :

$$\zeta_R = \zeta - A_3 \tag{A25}$$

Substituting (A24) together with (A25) into (A21), we obtain the following expression for \vec{F}_C :

$$\vec{F}_C = -\frac{\rho g}{2} \int_C \zeta_R^2 \vec{n}_0 \, dl + \frac{\rho g}{2} \int_C A_3^2 \vec{n}_0 \, dl \tag{A26a}$$

where the vertical component of \vec{n}_0 is null since we have assumed that S_0 intersects the plane $z=0$ at a right angle.

It can also be expressed as follows :

$$\vec{F}_C = \rho g \int_C \left(\zeta A_3 - \frac{\zeta^2}{2} \right) \vec{n}_0 \, dl \tag{A26b}$$

Further, by denoting the second term on the right-hand side of (A26b) by $\overline{F_A^{(2)}}$, we have

$$\vec{F}_C = -\frac{\rho g}{2} \int_C \zeta_R^2 \vec{n}_0 \, dl + \overline{F_A^{(2)}} \tag{A26c}$$

where

$$\overline{F_A^{(2)}} = \frac{\rho g}{2} \int_C A_3^2 \vec{n}_0 \, dl \tag{A27a}$$

$\overline{F_A^{(2)}}$ can further be expressed as follows by making use of Stokes's theorem :

$$\begin{aligned}
 \overline{F_A^{(2)}} &= \frac{\rho g}{2} \int_C A_3^2 \vec{n}_0 \, dl \\
 &= \vec{\theta} \times [-\rho g (S_W a_3 + W_y \theta_1 - W_x \theta_2) \vec{e}_3] \\
 &= -\rho g (S_W a_3 + W_y \theta_1 - W_x \theta_2) (\theta_2 \vec{e}_1 - \theta_1 \vec{e}_2)
 \end{aligned} \tag{A27b}$$

where W_x and W_y denote moments of the waterplane area

$$W_x = \int \int_{W_0} x \, ds \tag{A28}$$

$$W_y = \int \int_{W_0} y \, ds \tag{A29}$$

and S_W the area of the mean waterplane.

It should be noted that, in the analyses of Pinkster as well as Ogilvie, the presence of $\overline{F_A^{(2)}}$ in (A26a,b,c) is neglected while Molin(1983) has found exactly the same expression as (A26b) (Pinkster, 1977; Ogilvie, 1983; Molin, 1983).

Next, neglecting third-order terms, we obtain the following expression for \vec{F}_S :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_S &= \rho g \int \int_{S_0} z \vec{n}_0 \, ds \\
 &+ \rho \int \int_{S_0} \left[(g A_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) \vec{n}_0 + g z \vec{\theta} \times \vec{n}_0 \right] \, ds \\
 &+ \rho \int \int_{S_0} \left\{ [g(Q \vec{r}_0) \cdot \vec{e}_3 + \vec{A} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right. \\
 &\left. + \frac{1}{2} v^2 \right] \vec{n}_0 + (g A_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) \vec{\theta} \times \vec{n}_0 + g z Q \vec{n}_0 \right\} \, ds
 \end{aligned} \tag{A30}$$

The first integral in (A30) is the zeroth-order buoyancy force $\vec{F}_B^{(0)}$ on S_0 :

$$\vec{F}_B^{(0)} = \rho g V \vec{e}_3 \tag{A31}$$

where V denotes the displacement of the body at its mean position.

The second integral in (A30) is the first-order hydrodynamic force $\vec{F}_H^{(1)}$ on S_0 :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_H^{(1)} &= \rho \int \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{n}_0 \, ds \\
 &- \rho g (S_W a_3 + W_y \theta_1 - W_x \theta_2) \vec{e}_3
 \end{aligned} \tag{A32}$$

The third integral in (A30) is the second-order hydrodynamic force $\vec{F}_H^{(2)}$ on S_0 :

$$\begin{aligned}
\overline{F_H^{(2)}} &= \rho \int \int_{S_0} \left[\frac{1}{2} v^2 + \vec{A} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] \vec{n}_0 ds \\
&+ \vec{\theta} \times \left[\rho \int \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{n}_0 ds \right] \\
&+ \vec{\theta} \times \left[-\rho g (S_w a_3 + W_y \theta_1 - W_x \theta_2) \vec{e}_3 \right] \\
&- \rho g (\theta_1 \theta_3 W_x + \theta_2 \theta_3 W_y) \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{A33a}$$

We see that the sum of the second and the third terms on the right-hand side of (A33a) is the vector product of $\overline{F_H^{(1)}}$ and $\vec{\theta}$. We see also that the third term is exactly same as $\overline{F_A^{(2)}}$. Thus we have

$$\begin{aligned}
\overline{F_H^{(2)}} &= \rho \int \int_{S_0} \left[\frac{1}{2} v^2 + \vec{A} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] \vec{n}_0 ds \\
&+ \vec{\theta} \times \overline{F_H^{(1)}} - \rho g (\theta_1 \theta_3 W_x + \theta_2 \theta_3 W_y) \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{A33b}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F_H^{(2)}} &= \rho \int \int_{S_0} \left[\frac{1}{2} v^2 + \vec{A} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] \vec{n}_0 ds \\
&+ \vec{\theta} \times \left[\rho \int \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{n}_0 ds \right] + \overline{F_A^{(2)}} \\
&- \rho g (\theta_1 \theta_3 W_x + \theta_2 \theta_3 W_y) \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{A33c}$$

The total external force $\overline{F_E}$ applied to the floating body is

$$\overline{F_E} = \overline{F_F} + \overline{F_G} \tag{A34}$$

where $\overline{F_G}$ is the gravity force applied to the mass of the floating body :

$$\overline{F_G} = -\rho g V \vec{e}_3 \tag{A35}$$

We see that it just cancels out with the zeroth-order buoyancy force $\overline{F_B^{(0)}}$. Then taking the time-mean value of $\overline{F_E}$ and noting that the contribution of $\overline{F_H^{(1)}}$ is null, the steady drift force applied to the floating body can be found as the sum of (A26a or b or c) and (A33a or b or c):

$$\overline{F_E}^t = \overline{F_C}^t + \overline{F_H^{(2)}}^t \tag{A36}$$

and

$$\begin{aligned}
\overline{F_H^{(2)}}^t &= -\frac{\rho g}{2} \int_C \overline{\zeta_R^2}^t \vec{n}_0 dl + \overline{F_A^{(2)}}^t \\
&+ \rho \int \int_{S_0} \frac{1}{2} v^2 \vec{n}_0 ds \\
&+ \rho \int \int_{S_0} \overline{\left[\vec{A} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right]}^t \vec{n}_0 ds \\
&+ \overline{\vec{\theta} \times \left[\rho \int \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{n}_0 ds \right]}^t + \overline{F_A^{(2)}}^t \\
&- \rho g \left(\overline{\theta_1 \theta_3}^t W_x + \overline{\theta_2 \theta_3}^t W_y \right) \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{A37}$$

where the superbar followed by t denotes time averaging over a period T of the first-order motion.

We see that there is a double contribution of $\overline{F_A^{(2)}}$ while there is only a single contribution of $\overline{F_A^{(2)}}$ in the near-field formulas of Pinkster and Ogilvie since $\overline{F_A^{(2)}}$ in (A25a,b,c) is neglected as stated previously. In the near-field formulas of Molin, there is also a single contribution of that term since he has neglected the $\overline{F_A^{(2)}}$ in (A33a,b,c).

We proceed calculations on the moment due to the fluid pressure p , with respect to the origin 0 of the space-fixed reference frame :

$$\overline{M_F} = \overline{M_S} + \overline{M_C} \tag{A38}$$

$$\begin{aligned}
\overline{M_S} &= \rho \int \int_{S_0} (\vec{r}_0 + \vec{A} + Q \vec{r}_0) \times \\
&\left\{ \left[(1 + \vec{A} \cdot \nabla + Q \vec{r}_0 \cdot \nabla) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + gz \right) \right] (\vec{n}_0 + \vec{\theta} \times \vec{n}_0 + Q \vec{n}_0) \right\} ds
\end{aligned} \tag{A39}$$

and

$$\begin{aligned}
\overline{M_C} &= -\frac{\rho g}{2} \int_C \zeta_R^2 \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 dl \\
&+ \frac{\rho g}{2} \int_C A_3^2 \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 dl
\end{aligned} \tag{A40}$$

Let us denote the second term on the right-hand side of (A40) by $\overline{M_A^{(2)}}$. It can also be expressed as follows by making use of Stokes's theorem :

$$\begin{aligned}
\overline{M_A^{(2)}} &= \frac{\rho g}{2} \int_C A_3^2 \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 dl \\
&= \rho g \left[(W_x a_3 + W_{xy} \theta_1 - W_{xx} \theta_2) \theta_1 \right. \\
&\left. + (W_y a_3 + W_{yy} \theta_1 - W_{xy} \theta_2) \theta_2 \right] \vec{e}_3
\end{aligned} \tag{A41}$$

where W_{xx} , W_{yy} and W_{xy} denote moments of inertia of the waterplane area defined as follows :

$$W_{xx} = \int \int_{W_0} x^2 ds \tag{A42}$$

$$W_{yy} = \int \int_{W_0} y^2 ds \tag{A43}$$

$$W_{xy} = \int \int_{W_0} xy ds \tag{A44}$$

As for $\overline{M_S}$, neglecting third-order terms, we obtain the following expression:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_S &= \rho g \int_{S_0} z \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 ds \\
&+ \rho \int_{S_0} [(gA_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 \\
&+ gz \overrightarrow{r}_0 \times (\overrightarrow{\theta} \times \overrightarrow{n}_0) + gz \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{n}_0] ds \\
&+ \rho \int_{S_0} \left\{ [\overrightarrow{A} \cdot \nabla (\frac{\partial \Phi}{\partial t}) + \frac{1}{2} v^2] \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 \right. \\
&+ (gA_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial t}) \overrightarrow{r}_0 \times (\overrightarrow{\theta} \times \overrightarrow{n}_0) + (gA_3 \\
&+ \frac{\partial \Phi}{\partial t}) \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{n}_0 + gz \overrightarrow{A} \times (\overrightarrow{\theta} \times \overrightarrow{n}_0) \left. \right\} ds + \overrightarrow{M}_Q
\end{aligned} \tag{A45}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_Q &= \rho g \int_{S_0} \{ [(Q \overrightarrow{r}_0) \cdot \overrightarrow{e}_3] \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 \\
&+ z [(Q \overrightarrow{r}_0) \times \overrightarrow{n}_0 + \overrightarrow{r} \times (Q \overrightarrow{n}_0)] \} ds
\end{aligned} \tag{A46}$$

The first integral in (A45) is the zeroth-order buoyancy moment $\overrightarrow{M}_B^{(0)}$ on S_0 :

$$\overrightarrow{M}_B^{(0)} = \rho g V \overrightarrow{r}_C \times \overrightarrow{e}_3 \tag{A47}$$

where \overrightarrow{r}_C denotes the position vector of the center of buoyancy of the body at its mean position.

$$\overrightarrow{r}_C = x_C \overrightarrow{e}_1 + y_C \overrightarrow{e}_2 + z_C \overrightarrow{e}_3 \tag{A48}$$

The second integral in (A45) is the first-order hydrodynamic moment $\overrightarrow{M}_H^{(1)}$ on S_0 :

$$\overrightarrow{M}_H^{(1)} = \overrightarrow{M}_P^{(1)} + \overrightarrow{M}_B^{(1)} \tag{A49}$$

$$\overrightarrow{M}_P^{(1)} = \rho \int_{S_0} \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 ds \tag{A50}$$

and $\overrightarrow{M}_B^{(1)}$ is the first-order buoyancy moment on S_0 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_B^{(1)} &= \rho g V [(x_C \theta_3 - z_C \theta_1 + a_2) \overrightarrow{e}_1 + (y_C \theta_3 \\
&- z_C \theta_2 - a_1) \overrightarrow{e}_1 - \rho g [(W_y a_3 + W_{yy} \theta_1 \\
&- W_{xy} \theta_2) \overrightarrow{e}_1 - (W_x a_3 + W_{xy} \theta_1 - W_{xx} \theta_2) \overrightarrow{e}_2]
\end{aligned} \tag{A51}$$

The sum of the third term and the fourth term denoted by \overrightarrow{M}_Q on the right-hand side of (A45) reduces to $\overrightarrow{M}_H^{(2)}$, the second-order hydrodynamic force on S_0 :

$$\overrightarrow{M}_H^{(2)} = \overrightarrow{M}_P^{(2)} + \overrightarrow{M}_B^{(2)} \tag{A52}$$

where

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_P^{(2)} &= \rho \int_{S_0} [\overrightarrow{A} \cdot \nabla (\frac{\partial \Phi}{\partial t}) + \frac{1}{2} v^2] \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 ds \\
&+ \rho \overrightarrow{\theta} \times \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{n}_0 ds \\
&+ \rho \overrightarrow{a} \times \int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \overrightarrow{n}_0 ds
\end{aligned} \tag{A53}$$

and

$$\overrightarrow{M}_B^{(2)} = \overrightarrow{M}_{B1}^{(2)} + \overrightarrow{M}_{B2}^{(2)} + \overrightarrow{M}_{B3}^{(2)} + \overrightarrow{M}_{B4}^{(2)} \tag{A54}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{B1}^{(2)} &= -\rho g \theta_3 [(W_x a_3 + W_{xy} \theta_1 - W_{xx} \theta_2) \overrightarrow{e}_1 \\
&+ (W_y a_3 + W_{yy} \theta_1 - W_{xy} \theta_2) \overrightarrow{e}_2] \\
&+ \rho g [(W_x a_3 + W_{xy} \theta_1 - W_{xx} \theta_2) \theta_1 \\
&+ (W_y a_3 + W_{yy} \theta_1 - W_{xy} \theta_2) \theta_2] \overrightarrow{e}_3
\end{aligned} \tag{A55a}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{B2}^{(2)} &= -\rho g (S_w a_3 + W_y \theta_1 \\
&- W_x \theta_2) (a_2 \overrightarrow{e}_1 - a_1 \overrightarrow{e}_2)
\end{aligned} \tag{A55b}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{B3}^{(2)} &= -\rho g [\theta_1 \theta_3 (W_{xy} \overrightarrow{e}_1 - W_{xx} \overrightarrow{e}_2) \\
&+ \theta_2 \theta_3 (W_{yy} \overrightarrow{e}_1 - W_{xy} \overrightarrow{e}_2)]
\end{aligned} \tag{A55c}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M}_{B4}^{(2)} &= \rho g V \left\{ [x_C \theta_1 \theta_2 - \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_3^2) y_C] \overrightarrow{e}_1 \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta_3^2) x_C \overrightarrow{e}_2 \right\}
\end{aligned} \tag{A55d}$$

The $\overrightarrow{M}_B^{(2)}$ can be interpreted as the second-order buoyancy moment on S_0 .

The total external moment \overrightarrow{M}_E applied to the floating body is

$$\overrightarrow{M}_E = \overrightarrow{M}_F + \overrightarrow{M}_G \tag{A56}$$

where \overrightarrow{M}_G is the gravity moment with respect to the origin of the space-fixed reference frame applied to the mass of the floating body :

$$\overrightarrow{M}_G = \overrightarrow{r}_G \times \overrightarrow{F}_G + \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{F}_G + (Q \overrightarrow{r}_G) \times \overrightarrow{F}_G \tag{A57}$$

where r_G denotes the position vector of the center of gravity of the body at its mean position.

$$\vec{r}_G = x_G \vec{e}_1 + y_G \vec{e}_2 + z_G \vec{e}_3 \quad (\text{A58})$$

The first term in (A57) is the zeroth-order gravity moment and it cancels out with $\overline{M_B^{(0)}}$ since

$$x_C = x_G \quad \text{and} \quad y_C = y_G.$$

The second term in (A57) is the first-order gravity moment $\overline{M_G^{(1)}}$ and the sum of $\overline{M_B^{(1)}}$ and $\overline{M_G^{(1)}}$ is the first-order restoring moment $\overline{M_R^{(1)}}$ as follows :

$$\begin{aligned} \overline{M_R^{(1)}} = & -\rho g V [(z_C - z_G) \theta_1 \vec{e}_1 + (z_C - z_G) \theta_2 \\ & \vec{e}_2] - \rho g [(W_y a_3 + W_{yy} \theta_1 - W_{xy} \theta_2) \vec{e}_1 \\ & - (W_x a_3 + W_{xy} \theta_1 - W_{xx} \theta_2) \vec{e}_2] \end{aligned} \quad (\text{A59})$$

The third term in (A57) is the second-order gravity moment $\overline{M_G^{(2)}}$

$$\begin{aligned} \overline{M_G^{(2)}} = & -\rho g V \left\{ [x_G \theta_1 \theta_2 - \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_3^2) y_G] \vec{e}_1 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta_3^2) x_G \vec{e}_2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A60})$$

We see that $\overline{M_G^{(2)}}$ cancels out with $\overline{M_{B1}^{(2)}}$ since $x_C = x_G$ and $y_C = y_G$.

Then $\overline{M_E}$ becomes as follows:

$$\overline{M_E} = \overline{M_P^{(1)}} + \overline{M_R^{(1)}} + \overline{M_C} + \overline{M_P^{(2)}} + \overline{M_R^{(2)}} \quad (\text{A61})$$

The $\overline{M_R^{(2)}}$ on the right-hand side of (A61) is the resultant moment of $\overline{M_C^{(2)}}$ and $\overline{M_B^{(2)}}$ reduced as follows :

$$\overline{M_R^{(2)}} = \overline{M_{B1}^{(2)}} + \overline{M_{B2}^{(2)}} + \overline{M_{B3}^{(2)}} \quad (\text{A62})$$

Then taking the time-mean value of $\overline{M_E}$ and noting that the contributions of the first-order moments are null, the steady drift moment $\overline{M_E}^t$ applied to the floating body can be found as follows :

$$\overline{M_E}^t = \overline{M_C}^t + \overline{M_P^{(2)}}^t + \overline{M_R^{(2)}}^t \quad (\text{A63})$$

where $\overline{M_C}^t$, $\overline{M_P^{(2)}}^t$ and $\overline{M_R^{(2)}}^t$ can be obtained from the time averages of (A40), (A53) and (A62) respectively.

It should be noted that $\overline{M_A^{(2)}}$, the second term on the right-hand side of (A40) is identical with the vertical component of $\overline{M_{B1}^{(2)}}$ as shown in (A55a). Thus there is also a double contribution of $\overline{M_A^{(2)}}$.

2002년 2월 22일 원고 접수

2002년 4월 26일 최종 수정본 채택