

Bubble Mesh기법을 이용한 적응적 EFG해석

An Adaptive Analysis in the Element-free Galerkin Method Using Bubble Meshing Technique

정 흥 진†

이 계 희*

최 창 근**

Chung, Heung-Jin

Lee, Gye-Hee

Choi, Chang-Koon

(논문접수일 : 2001년 5월 21일 ; 심사종료일 : 2002년 2월 4일)

요 지

본 연구에서는 Bubble Mesh 기법을 이용한 적응적 최적 절점생성기법을 제안하고 이를 Element-free Galerkin 방법에 적용하였다. 무요소방법에서 제안된 일반적인 적응적 절점배치방법의 경우 적분격자를 이용하기 때문에 그 절점의 분포가 평가된 오차를 정확히 반영하지 못하고 불균등한 세분화로 인해 주변 절점분포와 급격한 절점밀도의 차이를 보이게 되어 추가적인 해석오차를 유발한다. 본 연구에서는 평가된 오차의 분포와 적분격자를 따라 구성된 불균등한 초기절점배치를 최적삼각격자 구성기법인 Bubble Mesh 기법을 이용하여 최적화 시키는 적응적 절점구성기법을 제안하였다.

절점의 불균등한 배치에 따른 추가적인 오차의 발생현상을 보이기 위해 1차원 문제를 해석하였고 본 연구에서 제안된 Bubble Mesh 기법을 이용한 적응적 무요소해석법의 적용성을 보이기 위해 2차원 문제를 해석하였다.

핵심용어 : 무요소해석법, 오차평가기법, Bubble Mesh 기법, 적응적 해석법

Abstract

In this study an adaptive node generation procedure in the Element-free Galerkin (EFG) method using bubble-meshing technique is proposed. Since we construct the initial configuration of nodes by subdivision of background cell, abrupt changes of inter-nodal distance between higher and lower error regions are unavoidable. This unpreferable nodal spacing induces additional errors. To obtain the smooth nodal configuration, the nodal configurations are regenerated by bubble-meshing technique. This bubble meshing technique was originally developed to generate a set of well-shaped triangles and tetrahedra.

In order to evaluate the effect of abrupt changes of nodal spacing, one-dimensional problems with various nodal configurations were investigated. To demonstrate the performance of proposed scheme, the sequences of making optimal nodal configuration with bubble meshing technique are investigated for several problems.

Keywords : Bubble Mesh, Element-free Galerkin method, Adaptive analysis, Error Estimates, Meshfree Method

† 책임저자, 정회원 · 전주대학교 토목환경공학과 조교수
전화: 063-220-2755; Fax: 063-220-2669
E-mail: hjchung@jeonju.ac.kr

* 목포해양대학교 해양시스템공학부 전임강사

** 정회원 · 한국과학기술원 토목공학과 석좌교수

• 이 논문에 대한 토론을 2002년 6월 29일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

무요소법에서는 절점의 추가 및 삭제가 자유롭고 이에 따른 부가적인 요소망의 구성 및 수정이 필요없기 때문에 유한요소법에 비하여 적응적 해석에 적용하기가 간편하다.¹⁾ 이러한 무요소법의 특징을 이용한 적응적해석법은 여러 연구자들에 의해서 다양한 방법으로 제안되어왔다. 적응적 해석과정은 오차의 평가과정과 평가된 오차에 따라 절점의 분포를 자동으로 조정하는 과정으로 이루어 진다. Durate와 Oden²⁾은 내부와 Neumann경계에서의 잔차(residuals)를 이용한 오차평가법을 제안하였고, Liu 등³⁾은 wavelet 함수를 이용한 Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)에 형상경계탐색(edge detection)기법을 이용하여 오차를 간접적으로 평가하였다. Chung과 Belytschko¹⁾는 응력을 투영하는 방법으로 후처리한 후 오차를 평가하였고, Hausser-Combe와 Korn⁴⁾은 형상함수의 2차 미분항을 이용하여 보간시 발생하는 오차를 산정하였다. 위와 같이 다양한 오차평가방법이 제안되었으나 이에 따른 최적절점의 구성은 적분격자를 따라 절점을 생성시키거나 소거 시키는 방법이 대부분이었다. 최근에 Lee 등⁵⁾은 삼각형 및 사각형 적분격자를 이용한 적응적해석을 수행하였고 이를 균열의 진전해석에 응용하였다.

일반적으로 무요소방법에서 제안된 적응적 절점배치 방법의 경우 적분격자를 이용하기 때문에 그 절점의 분포가 평가된 오차를 자연스럽게 반영하지 못하며 불균등한 세분화로 인해 주변 절점분포와 급격한 절점밀도의 차이를 보이게 되어 추가적인 해석오차를 유발한다. 이 오차는 인접한 두 절점의 영향영역 크기의 급격한 차이에서 발생한다.

본 연구에서는 평가된 오차를 이용하여 구성된 불균등한 초기절점배치를 Bubble Mesh기법을 이용하여 최적화 시키는 적응적 절점발생기법을 제안하였다. 여기서 사용된 Bubble Mesh기법은 자연계에서 bubble이 주어진 영역내에서 서로 균형을 이루며 배치되는 현상이 잘 구성된 Voronoi diagram과 흡사한 것을 모사한 것이다. 이 때 구성된 bubble의 중심을 연결하면 찌그러짐이 최소화 된 최적삼각격자를 구성할 수 있다.⁶⁾ 본 연구에서는 Bubble Mesh 기법을 이용하여 갑자기 절점의 간격이 변하는 부분의 절점분포를 부드럽게 재구성하여 추가적인 오차의 발생을 막을 수 있다

는 개념을 적응적 무요소 방법에 적용한 것이다. 이 방법에서 bubble의 중앙에 위치하는 각 절점은 평가된 오차함수에 기초하여 bubble의 크기와 그에 따른 동적 특성을 갖는다. 이를 기초로 동적상사과정을 통해 각 절점의 최적 배치를 구성할 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 EFG (Element-free Galerkin) 방법에서 오차를 평가하는 방법을 살펴보고 3절에서는 Bubble Mesh 방법의 개요와 적응적 무요소해석법에의 적용방법을 설명하였다. 4절에서는 절점의 불균등한 배치에 따른 추가적인 오차의 발생을 보이기 위해 1차원 문제를 해석하였고 본 연구에서 제안된 Bubble Mesh 기법을 이용한 적응적 무요소해석법의 평가를 위해 2차원 문제에 적용하였다.

2. EFG 근사와 오차평가

EFG 방법에서 절점에서의 해 \mathbf{u}_l 를 구한 후 응력은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (1)$$

여기서 $\phi_I(\mathbf{x})$ 는 형상함수, \mathbf{D} 는 재료행렬, \mathbf{S} 는 미분 연산자, n 은 절점의 영향범위, Ω_x^a 내에 있는 절점의 갯수이다. 유한요소법⁷⁾에서와는 달리 무요소법에서는 형상함수의 도함수가 원 형상함수보다 더 높은 진동수 성분을 가지기 때문에 오차가 큰 곳에서는 응력이 가상적으로 진동하게 된다. 따라서 이러한 응력의 가상진동을 보다 낮은 차수의 형상함수를 사용하여 줄여주면 보다 정확한 응력분포를 산정할 수 있으며 이를 위하여 위에서 얻어진 응력을 다음과 같이 투영한다.¹⁾

$$\begin{aligned} \sigma^p(\mathbf{x}) &= \sum_K^l \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_I^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}_K) \mathbf{u}_I \right\} \\ &= \sum_K^l \psi_K(\mathbf{x}) \sigma^h(\mathbf{x}_K) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$ 는 절점에서의 응력이며 l 은 투영 응력의 영향영역내의 있는 절점의 수, $\psi_K(\mathbf{x})$ 는 투영을 위한 형상함수이다. 이 때 투영응력의 형상함수는 EFG 형상함수에 비하여 작은 영향영역을 사용한다. 결과적

으로 보면 위에서 얻어진 투영응력은 절점의 응력을 원래의 형상함수보다 작은 영향영역을 갖는 또 다른 변위 형상함수로 보간하는 것이다. 따라서 해석후 오차평가 방법에서 필요한 평탄화(smoothing)용 역행렬을 구하는 일반적인 방법과는 달리 계산결과를 단순히 투영하여 간단히 구현할 수 있다. 이후의 오차 평가에 있어서는 이 투영된 응력을 정확해로 가정한다. 따라서 임의의 점에서의 오차는 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (3)$$

이 응력의 오차를 에너지 놈(norm)을 이용하여 정량적으로 평가하면 주어진 국부영역 및 전체영역에서의 오차의 에너지 놈은 각각 다음과 같이 계산된다.

$$\|E_i\| = \left\{ \int_{\Omega_i} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (4)$$

$$\|E\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (5)$$

위에서 국부영역(일반적으로는 적분격자)에서의 오차의 값은 적응적 해석에서 그 영역의 절점밀도 또는 절점간격을 결정하는 척도로 이용하게 되며, 전체영역에서의 오차의 에너지 놈은 적응적 해석단계에서 해석결과의 정량적 평가를 위해 다음과 같이 상대오차를 계산하는데 이용된다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} \quad (6)$$

여기서 전체 에너지놈은

$$\|U\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (7)$$

로 계산된다.

3. Bubble Mesh 방법을 이용한 적응적 해석기법

3.1 Bubble Mesh방법의 개요

Bubble Mesh방법은 bubble(2차원에서는 원)을

주어진 영역에 가능한 한 많이 배치(packing) 하는 방법이라고 설명할 수 있다. 이들이 배치되는 형상에 대한 경우의 수는 여러 가지가 될 수 있고 각 경우에 따라 bubble사이에 틈새나 겹치는 부분이 필연적으로 발생한다. 이러한 틈새가 넓거나 겹치는 부분이 많을수록 최적의 bubble배치에서 멀어지게 되거나 현실성이 떨어지게 된다고 할 수 있다. 따라서 Bubble Mesh 방법의 목표는 이러한 bubble 사이의 틈새나 겹치는 부분을 최소화할 수 있도록 적절한 수의 bubble을 적절한 위치에 배치하는 것이다. 이러한 과정은 다음과 같은 과정을 통해 실현될 수 있다.⁶⁾

- 1) 계층적인 분할에 의하여 원하는 함수를 만족하는 초기배치를 결정
- 2) 각 bubble사이의 틈새나 겹침을 평가하여 각 bubble사이의 인력과 척력의 산정
- 3) 위의 힘들이 균형을 이루도록 적절한 동적 상사(dynamic simulation)의 반복수행 및 bubble수의 조절

위에서 언급한 힘의 균형을 위한 동적상사나 bubble 수의 조절 같은 과정을 원활히 수행하기 위해서는 적절한 초기 배치가 필수적이다. 이는 최적해를 얻기 위한 반복 계산의 수를 크게 줄여주고 수렴성을 증대 시킨다.

본 연구에서는 2절에서 설명한 오차 평가기법을 이용하여 얻어진 오차의 분포를 이용하여 초기배치를 결정하였다. 초기배치가 얻어졌으면 다음 단계로 bubble사이의 적절한 균형에 의한 최적배치가 가능하도록 인력과 척력을 정의해야 한다. 이상적인 최적배치는 인접한 두 bubble는 서로 닿아있고 두 bubble사이의 힘은 없는 상태이다. 이 때 두 bubble의 거리는 안정거리(stable distance, l_0)라 한다. 이 값은 인접한 두 bubble의 반지름의 합이다. 따라서 두 bubble이 이보다 가까우면 척력이 작용하고 이보다 멀면 인력이 작용한다. 이러한 힘은 원자간에 작용하는 van der Waals의 힘과 유사하다. 그림 1은 이러한 힘을 두 bubble사이의 거리에 대한 3차함수로 나타낸 것이다.

$$f(l) = \begin{cases} al^3 + bl^2 + cl + d & 0 \leq l \leq 1.5l_0 \\ 0 & 1.5l_0 < l \end{cases} \quad (8)$$

이 함수는 다음과 같은 경계조건을 만족시켜야 한다.

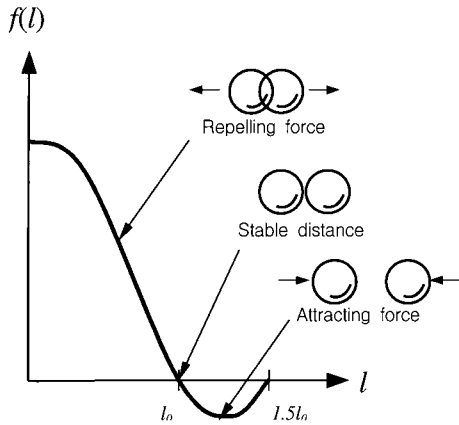


그림 1 Bubble간의 인력 및 척력

$$f(l_0) = f(1.5l_0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(l_0) = k_0 \quad (9)$$

여기서 k_0 는 안정거리에서의 인력과 척력에 대한 용수철 상수를 나타낸다.

이러한 bubble간의 힘은 bubble의 최적화되지 않은 배치를 물리적으로 불안정하게 만들어 각 bubble들이 주어진 함수에 따라 안정거리에 가까운 안정상태로 최적화될 수 있도록 한다.

이러한 과정은 각 bubble을 집중질량으로 보고 힘과 감쇠특성을 부여한 반복적인 동적 상사(dynamic simulation)과정을 통해 수행된다. 또한 bubble의 위치가 수정되어도 이러한 동적상사는 움직인 bubble이 자동적으로 새로운 최적의 위치로 이동하도록 한다. 이러한 동적상사를 위한 각 bubble의 운동방정식은 다음과 같다.

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i(t)}{dt^2} + c_i \frac{d \mathbf{x}_i(t)}{dt} = \mathbf{f}_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

여기서 m_i 는 질량을 나타내고, c_i 는 감쇠계수, 그리고 \mathbf{x}_i 는 대상영역에서의 bubble의 위치를 나타낸다. 초기 배치로부터 각 시간단계에 대한 위의 미분방정식을 풀어 최적의 배치를 얻기 위해 4차의 Runge-Kutta 방법이 사용되었다. 이러한 과정은 사용자가 정의한 수만큼의 시간단계에 대해 수행되거나 bubble의 배치가 균형을 이룰 때, 즉 bubble상호간의 작용력이 최소가 될 때까지 반복된다.

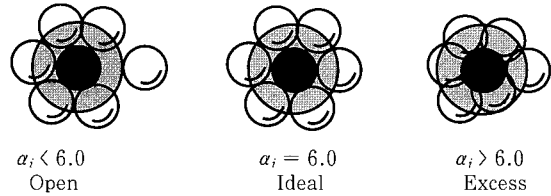


그림 2 중첩도의 예

한편 위의 과정에서 적절한 수의 bubble를 주어진 영역안에 배치하려면 bubble의 수를 최적의 상태로 조정하는 과정이 필요하다. 이러한 과정은 우선 배치된 bubble이 어느 정도의 밀도를 가지고 있는지를 파악해야 한다. 이러한 bubble의 밀도를 나타내는 계수로서 다음과 같은 중첩도(overlapping ratio)를 사용한다.

$$\alpha_i = \frac{2}{d(x_i)} \sum_{j=0}^n (d(x_i) + \frac{d(x_j) - \overline{d(x_i, x_j)}}{2}) \quad (11)$$

여기서 \mathbf{x}_i 는 기준 bubble의 위치, \mathbf{x}_j 는 인접한 주변의 bubble 위치를 각각 나타내고 n 은 인접한 bubble의 수를 나타낸다. 이론적으로 동일한 크기의 bubble이 최적의 상태로 배치되어 있는 이상적인 2차원 상태에서 중첩도의 값은 6.0이다. 그림 2는 bubble의 배치와 중첩도와의 관계를 나타내고 있다.

3.2 Bubble Mesh방법의 적응적 해석법 적용

앞에서 언급했듯이 Bubble Mesh 방법은 원래 최적의 유한요소체는 산정을 위해 개발된 방법이다. 따라서 이를 EFG방법에 적용하기 위해서는 추가적인 고려가 필요하다. 이중에서 bubble의 초기배치와 각 bubble의 크기를 결정하는 오차함수가 가장 먼저 고려되어야 한다. 이 때 오차함수와 bubble의 면적은 역비례적인 관계를 가진다. 즉 오차가 큰 부분에 작은 bubble이 위치하므로써 단위면적당 많은 수의 bubble이 배치되게 된다. 따라서 자동적으로 오차가 큰 영역에 작은 특성길이(characteristic length)를 가지는 h -적응적 해석이 이루어지게 된다. 2차원에서 오차의 크기에 반비례 해서 bubble의 면적이 결정된다는 개념을 사용하면, 오차함수와 bubble의 지름과의 관계는 다음 식에 의해서 정할 수 있다.

$$d_i \sqrt{e_i} = h \quad (12)$$

여기서 e_i 는 영역내에서의 평균오차이고 d_i 는 bubble의 지름이다. h 는 전체 해석모델에서 bubble의 크기에 대한 기준값이고 일정한 값을 유지하여야 한다. 따라서 bubble의 지름은 오차의 재귀함수이다. 그러므로 bubble의 크기를 결정하는 과정에서 반복적인 계산이 요구된다. 이 때 계산되어진 bubble의 지름은 미리 정의된 최대 지름과 최소 지름을 초과하지 않도록 수정된다. 이 때 최소 지름과 최대 지름의 비를 해석의 해상도계수(RF : Resolution Factor)라 한다.

Bubble의 초기배치는 앞서서도 언급했듯이 적분격자의 위치에 따라서 이루어진다. 임의의 격자의 세분화 여부는 격자의 각 절점에 위치한 bubble사이의 거리를 검사해 결정한다. 만일 어떤 격자를 세분화할 필요가 있다면 그 격자는 4개로 세분화 된다. 이 과정은 모든 bubble의 지름이 주어진 조건에 만족할 때까지 반복된다. 이때 초기 bubble의 좌표는 적분격자의 좌표와 동일하다. 그러나 동적상사가 수행되면 bubble의 위치는 적분격자의 좌표와 서로 독립적으로 결정된다. 따라서 적분격자에 따른 적응적해석을 수행하는 다른 방법보다 적분격자에 독립적인 절점을 가진 무요소법의 기본개념에 충실할 수 있게 된다.

최대 bubble의 크기와 최소 bubble의 크기는 해석의 해상도에 따라 결정된다. 만일 최소 지름을 정의하지 않으면 균열의 선단 같은 특이점에서 해석이 불가능해진다. 균열의 선단에서 응력의 기울기는 이론적으로 무한대이기 때문에 bubble의 지름은 0에 가깝게 되며 무한대의 수인 bubble을 배치하여야 한다. 이 정도는 아니더라도 지나치게 많은 수의 bubble를 사용하게 되면 해석의 효율성이 떨어지게 된다.

동적상사의 기본식에 대한 계수는 기존의 연구⁶⁾에서 그 값을 취했다. 그리고 그 밖의 추가적인 계수의 값은 수치실험을 통해 경험적으로 결정하였으나 이 부분에 대한 추가적인 연구가 요구된다.

4. 수치 실험 예제

절점의 불균등한 배치에 따른 추가적인 오차의 발생을 보이기 위해 1차원 문제를 해석하였고 본 연구에서 제안된 Bubble Mesh 기법을 이용한 적응적 무요소해

석법의 평가를 위해 2차원 문제(외팔보, L형평판)에 적용하였다.

4.1 1차원 예제

1차원 문제로서 균일한 탄성 막대를 고려하였다. 하중이 모델에 균일하게 작용하고 있다면 지배미분방정식은

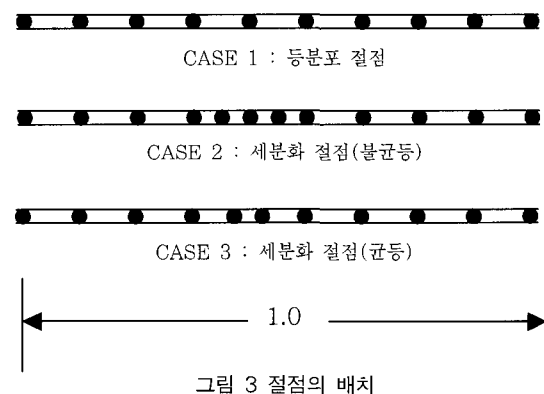
$$AEu_{,xx} + q = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (13)$$

이 되고 경계조건을

$$u(0) = 0 \text{ 과 } u_{,x}(1) = 0 \quad (14)$$

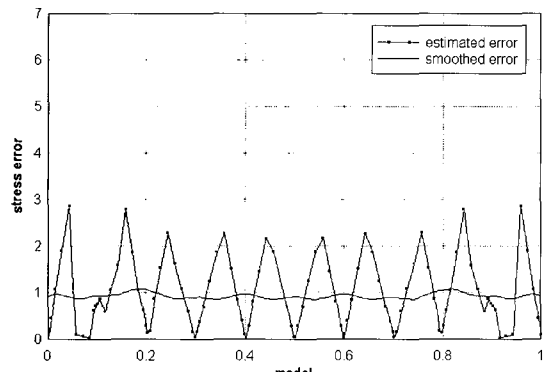
이라 한다. 여기서 단면적 $A = 1.0$, 탄성계수 $E = 1.0$ 이고 분포하중은 $q(x) = 100$ 으로 하였다. 절점의 분포에 따른 해석결과와의 변화를 보기위해 그림 3과 같은 세가지 절점분포에 대하여 해석하였고 오차평가기법을 이용하여 오차를 구하였다.

CASE 2의 경우는 모델의 중간에 절점의 간격이 1/2로 변하는 구간을 둔 것이고 CASE 3의 경우는 3/4과 2/3으로 변하는 상대적으로 균등한 절점분포를 보여준다. 한편 응력의 기울기가 전 영역에서 일정하므로 균등한 절점분포를 갖는 CASE 1의 경우에는 오차의 변화가 거의 없지만(그림 4(a)) CASE 2의 경우에는 절점의 수가 더 늘었음에도 불구하고 오차의 수준이 더욱 높아진 것을 확인 할 수 있다(그림 4(b)). CASE 3의 경우는 중앙부에서 오차의 수준이 약간 줄어드는 현상을 볼 수 있었다(그림 4(c)). 이러한 추가오차의 발생은 급격한 절점간격의 변화로 인접한 두 절점의 영향

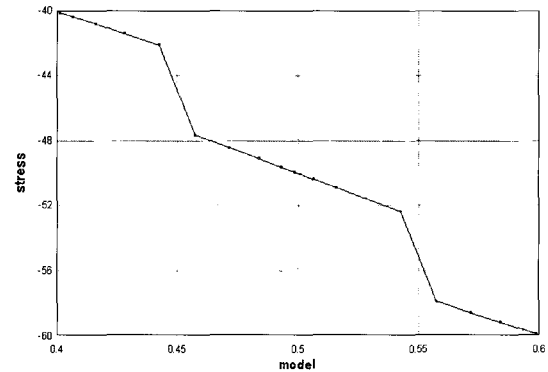


영역(여기서는 영향구간)에 차이가 생겨서 발생하는 것으로 추정된다. 한 절점에 대한 영향영역은 그 절점에서 가장 인접한 절점들에 의해서 결정되기 때문에 절점의 간격이 1/2로 줄었을 경우에 영향영역도 같은 비율로 줄어들게 되며 이에 따라 해석의 조건이 급격히 달라지게 된다. 한편 그림 4에서는 오차분포의 비교를 위해 식(3)에

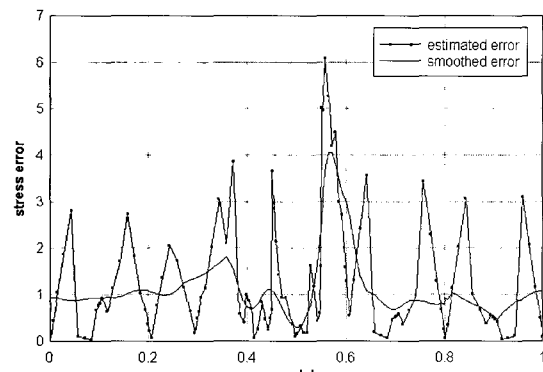
의해 계산된 오차(estimated error)와 이를 평탄화한 오차(smoothed error)를 동시에 도시하였다. 계산된 오차의 경우 매우 큰 진동현상을 보이는데 이는 원래의 응력분포가 진동하기 때문이다. 2차원 문제에서도 동일한 현상을 볼 수 있는데 이는 초기절점분포를 왜곡하는 요인이 될 수 있다.



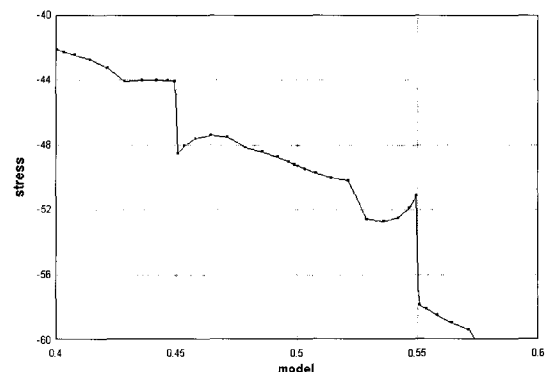
(a) CASE 1



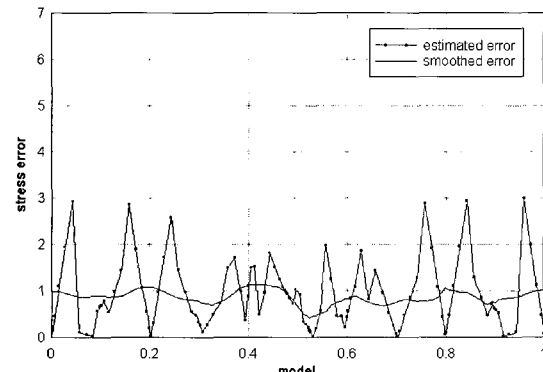
(a) CASE 1(중양부 확대)



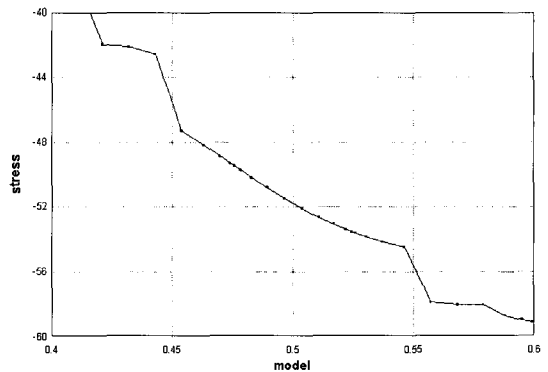
(b) CASE 2



(b) CASE 2(중양부 확대)



(c) CASE 3



(c) CASE 3(중양부 확대)

그림 4 평가된 오차의 분포

그림 5 응력의 분포

그림 5에서는 각 CASE 별로 모델의 중간부의 응력의 분포를 보였다. CASE 2의 경우 응력의 진동이 비교적 심한 것을 볼 수 있다. 이상과 같은 수치실험 결과에서 알 수 있듯이 절점이 적절히 배치되지 못한 경우 절점의 증가에도 불구하고 해의 정확성이 오히려 떨어질 수도 있다는 것을 볼 수 있다.

4.2 외팔보 예제

이 예제는 bubble mesh에 의한 최적화 과정을 보기 위한 문제이다. 문제의 경계 및 하중조건은 그림 6에서 보는 바와 같다. 이 예제에서 해상도 계수는 2.0이다. 그림에서 제시된 결과는 150단계의 동적상사를 수행한 결과이고 bubble 갯수의 조절은 매 30번째의 단계에서 1회씩 수행되었다.

오차가 큰 영역은 지점부이기 때문에 이 부분에 많은 수의 절점을 배치하여야 한다. 2장에서 설명한 오차평가 기법을 이용하여 초기절점분포를 구하였다(그림 7(b) 참조). Bubble mesh 방법에 의하여 얻어진 최종 절점 배치는 그림 7(a)에서 보는 바와 같다. 그림 8은 최적화 과정을 나타내고 있는데 동적상사의 반복계산에 따라 bubble의 위치가 최적화되는 결과를 보여주고 있다. 초기절점분포를 나타내는 그림 8(a)의 경우 bubble의

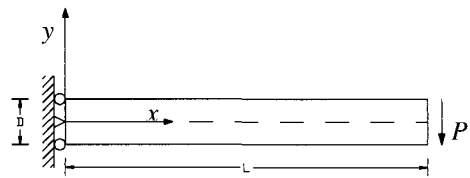
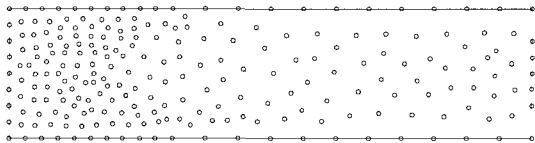
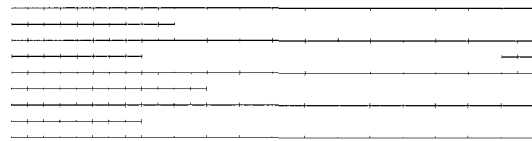


그림 6 외팔보 예제

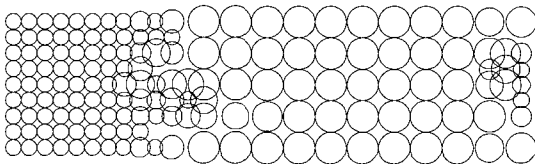


(a) Nodal arrangement

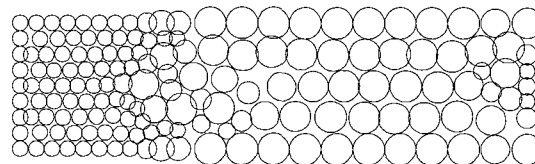


(b) Integration cell

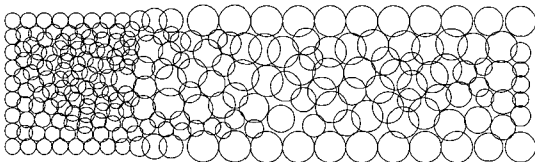
그림 7 최종 단계의 절점배치와 적분격자



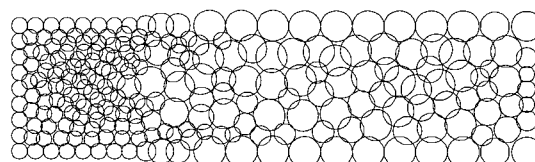
(a) Initial state



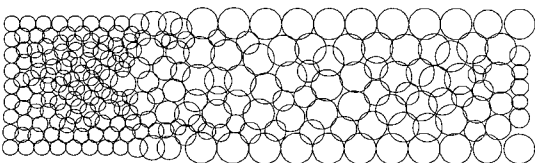
(b) After 30 iteration



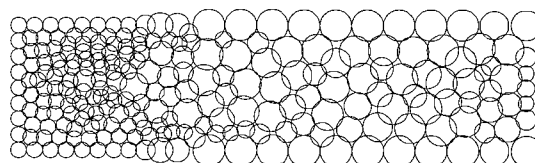
(c) After 60 iteration



(d) After 90 iteration



(e) After 120 iteration



(e) After 150 iteration

그림 8 Bubble mesh의 최적화 과정

접침이 심한 부분과 간격이 많이 떨어진 부분이 존재하는 것을 볼 수 있지만 150회 반복계산 후에는 자연스러운 분포로 바뀐 것을 알 수 있다.

4.3 L형 평판 예제

이 예제에서는 주어진 해상도에 따른 해석의 효율성 변화를 살펴보았다. 그림 9는 L형 평판의 하중 및 경계조건을 나타낸 것이다. 이 문제에서는 형상의 특성상 오목한 부분에 응력이 집중되며 따라서 응력의 경사도 크게 된다. 제안된 적응적 해석 방법의 해상도에 따른 적용성을 조사하기 위하여 각각 다른 해상도에 대하여 해석을 수행하였다. 각각의 경우는 모두 100회의 동적

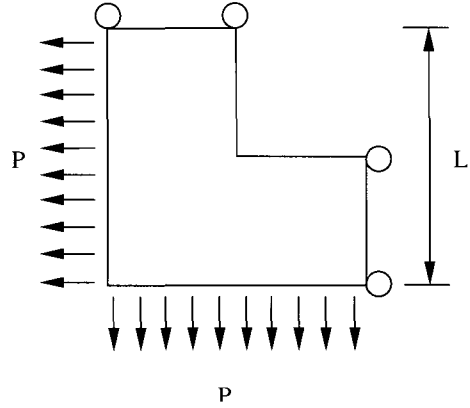
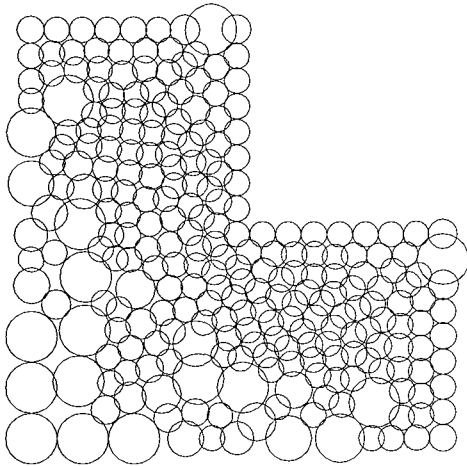
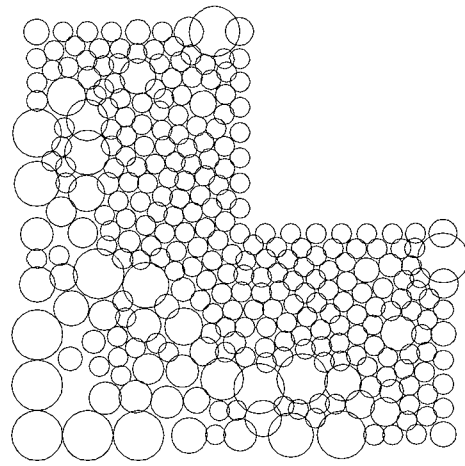


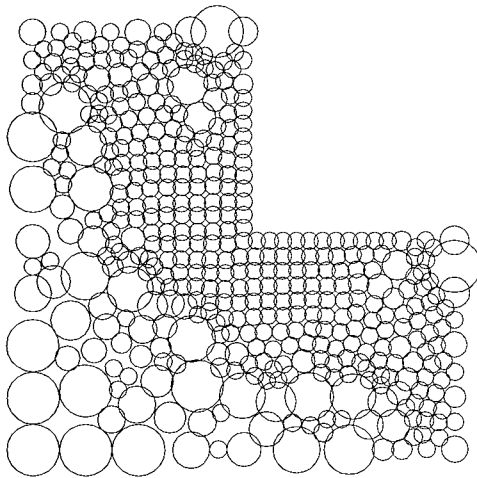
그림 9 L형 평판 예제



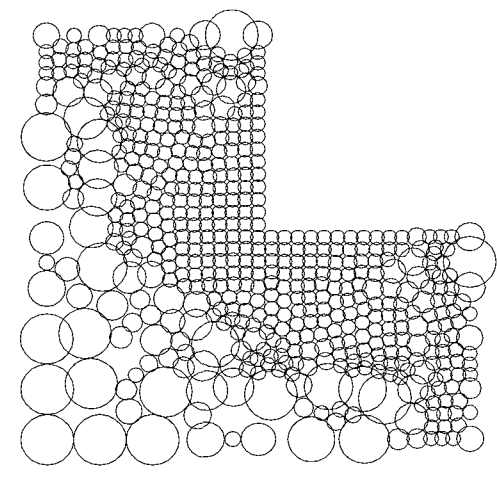
(a) Resolution factor=2.0



(b) Resolution factor=2.5



(c) Resolution factor=3.0



(d) Resolution factor=3.5

그림 10 해상도계수에 따른 bubble의 배치

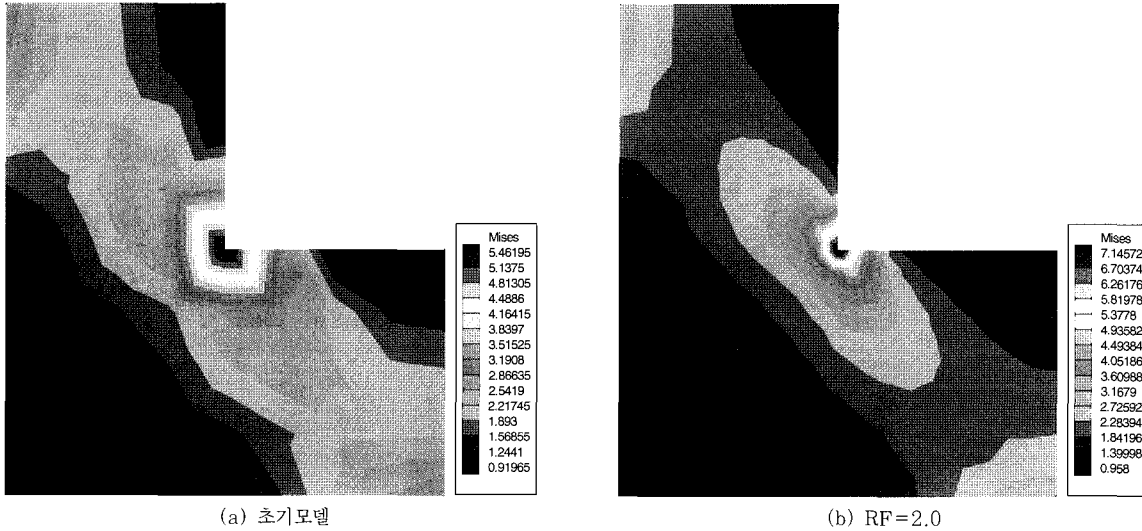


그림 11 Von-Mises 응력분포비교

상사와 1회의 bubble수 조절을 수행한 결과이다.

그림 10은 해상도 계수에 따른 최종단계에서의 bubble, 즉 절점의 분포를 보인 것이다. 각 경우 모두 응력집중 부위에서 조밀한 배치를 보여 의도했던 적응적인 해석 모델이 원활히 작성됨을 알 수 있다. 다만 해상도계수가 3이상인 경우 지나치게 조밀한 절점배치가 이루어져 bubble의 겹침현상이 다른 경우에 비해 많음을 알 수 있다.

초기절점배치와 해상도 계수가 2.5인 경우의 절점 배치에 대한 해석결과로 얻어진 Von Mises응력분포를 그림 11에 나타내었다. 적응적해석결과 얻어진 응력의 등고선이 초기 절점분포에 대해 얻어진 응력등고선에 비해 월등히 부드러워진 것을 알 수 있다. 또한 이 분포도는 bubble의 크기분포와 개략적으로 일치한다. 이는 bubble의 크기가 응력의 분포를 적절히 반영하고 있음을 나타낸다.

표 1은 해상도에 따른 해석의 상대오차를 보여준다. 이 표는 해상도가 증가에 따라 해석결과가 향상되지만 해상도의 값이 커질수록 절점수의 증가에 따른 해의 개선속도가 떨어지는 현상을 나타낸다. 따라서 추가적으

표 1 해상도에 따른 해석의 상대오차

해상도	1.0	2.0	2.5	3.0	3.5
절점수	65	259	297	447	543
상대오차	0.1367	0.1025	0.0806	0.0758	0.0733

로 해상도를 증가시키는 것은 가능하지만 큰 값의 해상도를 사용하는 경우에는 절점수와 동적상사의 반복계산 횟수가 증가되기 때문에 효율이 떨어질 우려가 있다. 또한 초기의 절점배치로부터 얻어진 오차함수의 정밀도는 한계가 있기 때문에 처음부터 지나치게 큰 해상도를 사용하는 것은 바람직하지 않다. 다양한 수치실험 결과에 의하면 4.0 이상의 해상도계수를 사용하는 것은 바람직하지 않은 것으로 나타났다. 만일 이보다 정밀한 결과를 원한다면 반복계산을 통해 보다 정확한 오차 분포에 의한 초기절점을 구성하는 것이 필요하다.

그림 12는 bubble mesh에 의한 적응적 해석의 수렴성을 균등분할(uniform refined)한 경우와 상대적으로 비교한 것이다. 이 때 균등분할에 의한 해석은 전 영

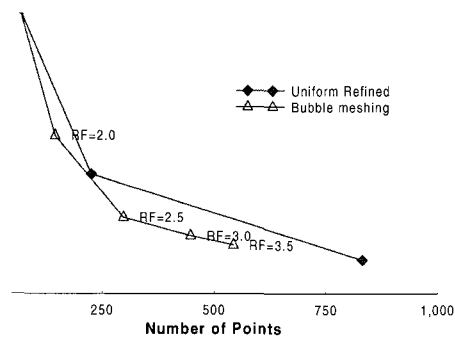


그림 12 수렴성비교

역에 대해 절점의 수를 균등하게 4배씩 증가시키며 해석을 수행하였다. 이 수렴곡선에서 bubble mesh를 이용한 적응적 해석은 수렴성은 균등분할한 경우에 비해 뛰어난 것을 볼 수 있다. 다만 해상도 계수가 커질수록 균등분할의 경우와 비교한 상대적인 수렴속도가 저하됨을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 적응적 EFG방법에서 사용되는 절점의 분포를 Bubble Mesh를 이용하여 최적화하는 기법을 제시하였다. 이 기법에서는 먼저 투영응력을 이용하여 오차 평가를 수행하고 이를 바탕으로 초기 절점분포를 구성한다. 그리고 이 초기절점분포에 Bubble Mesh 기법을 적용하여 최적의 절점분포를 얻을 수 있다. 1차원 및 2차원 수치실험을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 무요소방법에서 절점의 분포가 적절하지 못한 경우, 추가적인 오차가 발생한다.
- (2) Bubble Mesh 방법을 이용하면 적분격자의 좌표와 무관하게 최적의 절점배치를 구할 수 있다.
- (3) 해상도가 높으면 계산된 오차를 잘 반영하는 초기 절점을 구할 수 있으나 평가오차의 정밀도보다 지나치게 높은 해상도의 적용은 비 경제적일 수 있다. 따라서 정밀한 해석의 경우에는 최종적인 절점구성에 대하여 오차평가 및 초기절점구성과정을 반복하는 것이 효과적일 수 있다.

한편, 초기 절점분포의 구성에 사용되는 투영응력을 이용한 오차평가기법의 경우 불필요한 진동으로 인해서 초기절점의 분포가 왜곡될 우려가 있다. 따라서 정밀한 초기절점의 분포를 얻기 위해서는 계산된 오차분포에서 가장진동부분을 제거하는 과정이 필요하다. 앞으로 보다 다양한 수치실험을 통하여 Bubble Mesh과정에서 사용되는 각 계수들의 최적값을 산정하여 보다 안정되고 효율적인 해석기법을 제안할 예정이다. 그리고 초기 절점의 반복구성을 통하여 높은 정밀도를 요구하는 문제를 해석하는 알고리즘에 대한 추가 연구가 필요하다고 사료된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R02-2000-00373)지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

1. Chung, H. J. and Belytschko, T., An error estimate in the EFG method, *Computational Mechanics* 21, 1998, pp.91~110
2. Duarte, C. A. and J. T. Oden, An hp Adaptive Method Using Clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139, 1996, pp.237~262
3. Liu, W. K., W. Hao, Y. Chen, S. Jun and J. Gosz, Multiresolution reproducing kernel particle methods, *Computational Mechanics* 20, 1996, pp.295~309
4. Haussner-Combe, U. and Korn, C., An adaptive approach with the EFG method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 162, 1998, pp.203~222
5. Lee GH, Choi CK and Chung HJ, "Adaptive Crack Propagation Analysis with the Element-free Galerkin Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, accepted for publication
6. Shimada K., Gossard D., Bubble Mesh: Automated Triangular Meshing of Non-Manifold Geometry by Sphere Packing, *ACM Third Symposium on Solid Modeling and Applications*, 1995, pp.409~419
7. Zienkiewicz, O. C. and J. Z. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, 1987, pp.337~357