

## 몬테카를로 분석에 의한 효율성 추정방법의 비교\*

최태성\*\* · 김성호\*\*\*

### A Comparison of Efficiency Estimation Methods via Monte Carlo Analysis\*

Tae Sung Choi\*\* · Seongho Kim\*\*\*

#### ■ Abstract ■

In this paper we investigate the performance of the five efficiency estimation methods which include the stochastic frontier model estimated by maximum likelihood (SFML), the stochastic frontier model estimated by corrected ordinary least squares (SFCOLS), the data envelopment analysis (DEA) model, the combined estimation of SFML and DEA (SFML + DEA), and the combined estimation of SFCOLS and DEA (SFCOLS + DEA) using Monte Carlo analysis. The results include : 1) SFML provides most accurate efficiency estimates for the sample size 150 or over, 2) SFML + DEA or SFCOLS + DEA perform better for the cases with sample size 25, 50, and low random errors, 3) SFCOLS performs better for the case with sample size 25, 50, and very high random errors.

Keyword : Stochastic Frontier Model, Data Envelopment Analysis, Monte Carlo Analysis

## 1. 서론

지난 50여년간 생산조직의 효율성을 추정하기 위한 매우 다양한 노력이 있어왔다. Koopmans[29]

은 기술효율성(technical efficiency)의 개념을 제시하였고, Farrell[22]은 기술효율성을 추정하기 위한 방법을 제시하였다. Farrell의 효율성 추정방법은 Aigner and Chu[1], Aigner et al.[2], Meeusen

논문접수일 : 2001년 5월 31일    논문게재확정일 : 2002년 2월 19일

\* 본 연구는 1998년도 인하대학교 교내 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

\*\* 인하대학교 경영학부

\*\* 한국철도기술연구원

and van den Broeck[30], Jondrow et al.[28] 등에 의해 계량경제학적 모형(econometric model)의 형태로 발전하였고, Charnes et al.[15], Banker et al.[4] 등에 의해 수리계획법 모형(mathematical programming model)의 형태로 발전하였다.

효율성을 추정하기 위한 계량경제학적 모형은 생산기술을 매끄러운 모수적 함수로 나타내는 특징을 가지며, 확률적프론티어(deterministic frontier : DF)모형 및 확률적프론티어(stochastic frontier : SF)모형이 여기에 포함된다. 최근 많이 활용되고 있는 SF모형에서는 생산기술을 나타내는 매끄러운 모수적 함수, 즉 생산함수에 확률적 오차를 반영하는 확률오차항과 생산조직의 비효율성을 반영하는 비효율성항을 추가한 복합오차모형(composed error model)을 수정최소제곱(corrected ordinary least squares : COLS)법 또는 최우추정(maximum likelihood estimation : ML)법으로 추정한다. 그리고 이로부터 구한 잔차에서 개별 생산조직의 비효율성을 추정한다.<sup>1)</sup>

수리계획법 모형은 자료포락분석(data envelopment analysis : DEA)모형이라고도 부르며 여기에는 불변규모수익(constant return to scale : CRS)모형, 변동규모수익(variable return to scale : VRS)모형, 자유처분포체(free disposal hull : FDH)모형 등이 포함된다. DEA모형에서는 생산기술을 생산가능집합에 대한 일련의 공준(axioms)으로 나타내고 이로부터 유도한 선형계획법모형의 최적해로 효율성을 추정한다.<sup>2)3)</sup>

이처럼 다양한 형태로 발전된 효율성 추정방법들은 각각 고유의 장점과 단점을 가지고 있다. DEA모형은 사전에 생산기술을 나타내기 위한 합

수형태를 규정할 필요가 없고 다수투입·다수산출을 쉽게 고려할 수 있으나 확률적 오차의 영향을 모형에서 명시적으로 고려하지 못해 효율성을 과대평가할 가능성을 갖는다. 한편 SF모형은 확률적 오차의 영향을 모형에서 명시적으로 고려하고 있으나 생산기술을 나타내기 위한 함수형태를 사전에 규정해야 하고 다수투입·다수산출을 직접적으로 고려하기 어렵다. 이처럼 분석자가 선택할 수 있는 다양한 효율성 추정방법들이 존재하고 각각 고유의 장점과 단점을 갖는 상황에서 효율성 추정방법에 대한 다양한 비교연구가 이루어졌다. 이들 비교연구는 두 종류로 구별해 볼 수 있는데, 첫째는 현실자료에 여러 가지 효율성 추정방법을 적용하고 “추정결과가 일관된 결론을 제시해주는가?” 아니면 “일관된 결론을 내리기 어려울 만큼 차이가 나는가?”를 살펴보고 차이가 날 경우 그 원인을 분석하는 형태의 연구들이다(예를 들면 [6, 10, 11, 12, 18, 20, 23]). 두번째는 몬테카를로 분석을 통해서, 설계된 실험조건에서 “어떤 효율성 추정방법이 정확한가?”를 살펴보는 형태의 연구들이다(예를 들면 [5, 7, 13, 17, 24, 31, 32, 33, 35]). 본 논문에서는 몬테카를로 분석을 통해서 효율성 추정방법의 정확성을 비교해 보고자 한다.

최근 Ruggiero[33]는 “확률적 오차의 영향에 대한 통제 없이 추정된 효율성은 왜곡(과대평가)될 가능성이 높으며 따라서 명시적으로 확률오차항을 포함하고 있는 SF모형이 다른 확률적 모형보다 우월하다([34])”는 주장의 타당성을 검토하기 위해 두 가지의 계량경제학적 모형(DF모형과 SF모형)을 대상으로 몬테카를로 분석을 한 바 있다. 추정된 효율성 값과 참 효율성(true efficiency) 값의 순위상관계수로 모형의 성과를 평가한 결과 “SF모형을 사용하는 것이 타당하다”는 주장과는 대립되는 결론을 제시하였다. 본 논문에서는 Ruggiero의 연구에서 고려되지 않은 DEA모형과 SF모형을 비교해 보고자 한다. 이러한 연구목적의 설정배경은 효율성추정을 목적으로 하는 응용문헌에서 DF모형보다는 DEA모형이 일반적으로 사용되고 있으며

- 1) 효율성 추정을 위한 계량경제학적 모형에 관한 자세한 설명은 Bauer[9], Greene[25]을 참조.
- 2) 효율성 추정을 위한 수리계획법 모형에 관한 자세한 설명은 Ali and Seiford[3], Charnes et al.[14]를 참조.
- 3) 효율성 추정을 위한 계량경제학적 모형 및 수리계획법 모형에 관한 종합적 설명은 Coelli et al.[19], Lovell[27]을 참조.

따라서 DEA모형과 SF모형을 비교하는 것이 현실적인 측면에서 의미있는 비교라는 판단에 있다.

DEA모형과 SF모형의 비교를 위한 몬테카를로 분석결과는 Banker et al.[7]에 의해 발표된 바 있다. Banker et al.는 SF모형의 두 가지 추정방법 즉 COLS법과 ML법의 성과를 비교한 Olson et al.[31]의 연구결과에서 COLS법과 ML법간의 성과차이가 거의 없으며, COLS법의 계산이 ML법과 비교해 매우 간단하다는 점을 배경으로 하여 COLS법의 경우만을 고려하였다. 그러나 COLS법과 ML법을 몬테카를로 분석으로 비교한 Coelli[15]의 연구에 의하면 확률오차의 영향이 작을 경우 ML법이 (편향, 분산 및 평균제곱오차로 평가할 때) 우월하며, 확률오차의 영향이 클 경우 COLS법이 다소 우월하나 그 정도는 매우 미약한 것으로 나타났음을 제시하였다. 또한 Olson et al.이 ML법의 단점으로 지적한 계산의 복잡성은 컴퓨터의 성능향상으로 인해 현실적으로 문제가 되지 않는다. 이에 본 연구에서는 SF모형을 COLS법으로 추정하는 경우, SF모형을 ML법으로 추정하는 경우 및 DEA모형의 성과를 비교해 보고자 한다. 한편 Banker et al.의 연구에서는 실험설계에서 각 cell의 반복을 5회 실시하였으나 몬테카를로 분석의 결과가 신뢰성을 갖기 위해서는 보다 많은 반복이 필요한 것으로 판단되며 본 논문에서는 각 cell의 반복을 100회 실시한다.

최근 Coelli and Perelman[18]은 시계열예측에 관한 문헌에서 논의되고 있는 모형결합사용방안을 효율성 추정문제에 적용한 바 있다. 이들은 여러 모형으로부터 구한 예측치를 평균하여 사용할 경우 특정 모형만을 사용할 경우보다 정확한 경우가 많다는 주장이 여러 학자들로부터 제기되고 있음을 인지하고, 3가지 효율성추정방법으로부터 구한 효율성추정치의 기하평균을 사용하였다. 본 논문에서는 SF모형 및 DEA모형간의 비교와 더불어 효율성 추정방법의 결합사용방안이 시계열예측분야에서와 같이 타당성을 갖는가를 살펴보기 위해 DEA모형, SF모형(ML법 사용 및 COLS법 사용),

그리고 이들 두 모형의 기하평균을 사용하는 방법, 이렇게 3가지를 비교한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2절에서는 본 논문에서 비교하고자 하는 효율성 추정방법을 제시한다. 구체적으로 본 논문에서는 DEA모형, SF모형(ML법 사용 및 COLS법 사용), 그리고 DEA모형으로 추정된 효율성 값과 SF모형(ML법 사용 및 COLS법 사용)으로 추정된 효율성 값의 기하평균을 사용하는 방법을 비교한다. 제3절에서는 몬테카를로 분석에 사용되는 실험설계를 제시한다. 제4절에서는 분석결과 및 그 의미를 제시하고 제5절에서 결론을 맺는다.

## 2. 효율성 추정방법

### 2.1 DEA모형

DEA모형은 생산조직의 효율성을 추정하기 위한 수리계획법모형으로서 1978년 Charnes et al.[15]에 의해 처음 소개된 이후 많은 이론적 연구와 다양한 응용연구가 이루어져 왔다. 이 과정에서 여러 가지 변형모형들이 등장하였으며 본 논문에서는 가장 많이 응용되고 있는 VRS모형([4])을 고려한다.

투입  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$ 로 산출  $b(y_1, y_2, \dots, y_s) \in R^s$ 를 생산하는  $n$ 개의 생산조직에 대해서  $k$ 번째 생산조직의 효율성을 추정하기 위한 DEA모형은 다음과 같은 선형계획법모형으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \phi_k \\ & \text{subject to } \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq \phi_k y_{rk} \\ & \quad \text{for } r = 1, 2, \dots, s \\ & \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \\ & \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \quad \lambda_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $y_{rj}$  =  $j$ 번째 생산조직의  $r$ 번째 산출물의  
 量  
 $x_{ij}$  =  $j$ 번째 생산조직의  $i$ 번째 투입요소의  
 量  
 $\phi_k$  =  $k$ 번째 생산조직의 효율성값과 관련  
 된 모형의 결정변수  
 $\lambda_j$  =  $j$ 번째 생산조직과 관련된 결정변수  
 $n$  = 생산조직의 수  
 $s$  = 산출물의 수  
 $m$  = 투입요소의 수

위 모형의 최적해로 구한  $\phi_k$ 의 값을  $\phi_k^*$ 라 할  
 때, DEA모형으로 추정한  $k$ 번째 생산조직의 효율  
 성  $Eff_k^{DEA}$ 은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Eff_k^{DEA} = \frac{1}{\phi_k^*} \quad (2)$$

$n$ 개의 생산조직의 효율성을 모두 추정하려면  
 각 생산조직에 대해 식 (1)의 선형계획법모형을 구  
 성하고 그 최적해를 구해야 한다. 식 (1)은 일반적  
 인 선형계획법 소프트웨어로 최적해를 구할 수 있  
 으며 본 논문에서는 SAS/IML에 내장되어 있는 선  
 형계획법 서브루틴 "LP"를 활용하여 계산한다.

## 2.2. SF모형

SF모형은 생산기술을 매끄러운 모수적 함수, 즉  
 생산함수로 나타내고 여기에 확률적 오차를 반영  
 하는 확률오차항과 생산조직의 비효율성을 반영하  
 는 비효율성항으로 구성되는 복합오차항(compos-  
 ed error term)을 추가한 모형을 의미한다([2] [30]).  
 이는 생산함수에 확률오차항만을 추가하는 기존의  
 생산함수모형이나 생산함수에 비효율성항만을 추  
 가하는 DF모형과 구별된다. SF모형에서 개별 생  
 산조직의 효율성은 생산함수를 추정하고 그 결과  
 로 구한 잔차(residuals)로부터 비효율성을 분리해  
 내는 방식으로 추정된다. SF모형에서 생산함수는  
 COLS법 또는 ML법으로 추정할 수 있다.

투입  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R_+^m$ 를 산출  $y \in$

$R_+$ 로 변환하는 생산함수를  $h(\ln x; \beta)$ 라 하면  
 SF모형(4)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln y_j &= h(\ln x_j; \beta) + \varepsilon_j \\ &= h(\ln x_j; \beta) + v_j - u_j \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $y_j$  =  $j$ 번째 생산조직의 산출량  
 $x_j$  =  $j$ 번째 생산조직의 투입벡터  
 $\beta$  = 생산함수의 모수벡터  
 $\varepsilon_j$  =  $j$ 번째 생산조직의 복합오차항  
 $v_j \sim iid N(0, \sigma_v^2)$   
 = 확률적오차의 영향을 나타내는 확률  
 오차항  
 $u_j = |\xi_j|, \xi_j \sim iid N(0, \sigma_\xi^2)$   
 =  $j$ 번째 생산조직의 비효율성을 나타내  
 는 비효율성항  
 cf)  $u_j$ 의 분산  $\sigma_u^2$ 은  $[(\pi-2)/\pi] \sigma_\xi^2$ 임

**ML법** : 식 (3)의 확률오차  $v_j$ 와 비효율성  $u_j$ 의  
 확률밀도함수로부터 복합오차  $\varepsilon_j (= v_j - u_j)$ 의  
 확률밀도함수를 구할 수 있고 이를 이용하여 로그  
 우도함수를 얻을 수 있다. 복합오차  $\varepsilon_j$ 의 확률밀  
 도함수  $f_\varepsilon(\varepsilon_j)$ 와 SF모형의 로그우도함수  $\ell$ 는  
 각각 다음과 같다.

$$f_\varepsilon(\varepsilon_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} F^* \left( -\frac{\lambda \varepsilon_j}{\sigma} \right) \exp \left( -\frac{\varepsilon_j^2}{2\sigma^2} \right) \quad (4)$$

$$\ell = \ln \left[ \prod_{j=1}^n f_\varepsilon(\varepsilon_j) \right] \quad (5)$$

4) SF모형은 비효율성항의 확률분포를 어떤 형태로  
 가정하는가에 따라서 식 (3)에서처럼 비효율성항  
 을 정규분포를 따르는 확률변수의 절대값으로 가  
 정하는 반정규모형(half-normal model), 지수분포  
 로 가정하는 지수모형(exponential model), 감마분  
 포로 가정하는 감마모형(gamma model), 또는 절  
 단정규분포로 가정하는 절단정규모형(truncated  
 normal model) 등으로 구별할 수 있다([23] pp. 76-  
 80). (절단정규분포에 대해서는 Greene[24], p.192, pp.  
 951-952를 참조.) 본 논문에서는 가장 많이 응용  
 되고 있는 반정규모형만을 고려한다.

$$= n \ln \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} + n \ln \left( \frac{1}{\sigma} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2 + \sum_{j=1}^n \ln F^* \left( -\frac{\lambda \varepsilon_j}{\sigma} \right)$$

여기서  $F^*(\cdot)$  = 표준정규분포의 분포함수  
 $\varepsilon_j = \ln y_j - h(\ln x_j; \beta)$   
 $\sigma = \sqrt{\sigma_v^2 + \sigma_\xi^2}$   
 $\lambda = \sigma_\xi / \sigma_v$   
 $n$  = 관찰치의 數

식 (3)의 SF모형에서 생산함수의 모수벡터  $\beta$ , 확률오차항의 분산  $\sigma_v^2$  및 비효율성항의 내재확률변수  $\xi_j$ 의 분산  $\sigma_\xi^2$ 의 최우추정치  $\tilde{\beta}, \tilde{\sigma}_v^2, \tilde{\sigma}_\xi^2$ 은 식 (5)의 로그우도함수  $\ell$ 을  $\beta, \sigma_v^2, \sigma_\xi^2$ 에 대해 최대화하여 구할 수 있다. 본 논문에서는 SAS/IML에 내장되어 있는 trust-region 최적화 서브루틴 "NLPTR"을 사용하여 최우추정치를 계산한다.

**COLS법** : 식 (3)은 교란항(disturbance) 즉 복합오차항  $\varepsilon_j$ 이 정규분포를 따르지 않는다는 점을 제외하면 전통적인 최소제곱법(ordinary least squares : OLS)의 가정을 모두 만족하는 회귀방정식이다. 식 (3)의 상수항을 제외한 모수벡터  $\beta$ 에 대한 OLS추정량은  $\beta$ 에 대한 일치추정량이다. 상수항  $\beta_0$ 는 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\hat{\beta}_0 = \beta_0 \text{의 OLS 추정량} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_\xi \quad (6)$$

식 (3)의 모수벡터  $\beta$ 에 대한 COLS추정량  $\hat{\beta}$ 은 상수항의 경우 식 (6)을 의미하고 상수항 이외의 모수는 OLS추정량을 의미한다.

비효율성항  $u_j$ 의 내재확률변수  $\xi_j$ 의 분산  $\sigma_\xi^2$ 과 확률오차항의 분산  $\sigma_v^2$ 은 식 (3)에 대한 OLS잔차의 적률(moments)을 이용하여 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\widehat{\sigma}_\xi^2 = \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{\pi-4} \right) m_3 \right]^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

$$\widehat{\sigma}_v^2 = m_2 - \left( \frac{\pi-2}{\pi} \right) \widehat{\sigma}_\xi^2 \quad (8)$$

여기서  $m_2 = (1/n) \sum_{j=1}^n (e_j)^2$ , 식 (3)에 대한 OLS잔차의 2차 적률의 추정치  
 $m_3 = (1/n) \sum_{j=1}^n (e_j)^3$ , 식 (3)에 대한 OLS잔차의 3차 적률의 추정치  
 $e_j$  = 식 (3)의 OLS잔차  
 $n$  = 관찰치의 數

개별 생산조직의 효율성은 Jondrow et al.[28]이 제시한 비효율성항  $u_j$ 의 복합오차항  $\varepsilon_j$ 에 대한 조건부기대값  $E(u_j | \varepsilon_j)$ 을 사용하여 추정할 수 있다. SF모형의 비효율성항이 식 (3)와 같이 정규분포를 따르는 확률변수의 절대값인 경우 비효율성항의 오차항에 대한 조건부기대값은 다음과 같다.

$$E(u_j | \varepsilon_j) = \frac{\sigma \lambda}{1 + \lambda^2} \left[ \frac{f^* \left( \frac{\lambda \varepsilon_j}{\sigma} \right)}{F^* \left( -\frac{\lambda \varepsilon_j}{\sigma} \right)} - \frac{\lambda \varepsilon_j}{\sigma} \right] \quad (9)$$

여기서  $f^*(\cdot)$  = 표준정규분포의 확률밀도함수  
 $F^*(\cdot)$  = 표준정규분포의 분포함수  
 나머지 = 식 (5)에서와 같은 의미

ML법으로 추정된  $j$ 번째 생산조직의 효율성  $Eff_j^{ML}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Eff_j^{ML} = \exp \left[ -\tilde{E}(u_j | \varepsilon_j) \right] \quad (10)$$

여기서  $\tilde{E}(u_j | \varepsilon_j)$ 은 식 (9)에서 미지의 값인  $\sigma$ 와  $\lambda$ 대신 최우추정치  $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}_v^2 + \tilde{\sigma}_\xi^2}$ 와  $\tilde{\lambda} = \tilde{\sigma}_\xi / \tilde{\sigma}_v$ 를 사용하고 복합오차항  $\varepsilon_j$ 의 값으로 잔차  $e_j (= \ln y_j - h(\ln x_j; \tilde{\beta}))$ 를 사용하여 계산한 값이다.

COLS법으로 추정한  $j$ 번째 생산조직의 효율성  $Eff_j^{COLS}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Eff_j^{COLS} = \exp[-\widehat{E}(u_j | \varepsilon_j)] \quad (11)$$

여기서  $\widehat{E}(u_j | \varepsilon_j)$ 은 식 (9)에서 미지의 값인  $\sigma$ 와  $\lambda$  대신 수정최소자승추정치  $\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}_v^2 + \widehat{\sigma}_\varepsilon^2}$ 와  $\widehat{\lambda} = \widehat{\sigma}_\varepsilon / \widehat{\sigma}_v$ 를 사용하고 복합오차항  $\varepsilon_j$ 의 값으로 잔차  $e_j (= \ln y_j - h(\ln x_j; \widehat{\beta}))$ 를 사용하여 계산한 값이다.

### 2.3 DEA모형과 SF모형의 결합

최근 Coelli and Perelman[18]은 17개 유럽철도회사의 기술효율성을 분석하면서 DEA모형, DF모형, 및 SF모형(COLS법)을 비교한 바 있다. 이들은 각 모형의 효율성 추정치가 높은 상관관계를 나타냈으나 비교대상 모형 중에서 유럽철도회사의 상대적 성과를 분석하기 위한 최종 효율성 추정모형으로서 특정 모형을 선택하지 못하였다. 이들은 유럽철도회사의 상대적 성과를 분석하기 위해 시계열예측에 관한 문헌에서 논의되고 있는 모형결합 사용방안을 선택하였다. 즉, DEA모형, DF모형, 및 SF모형(COLS법)의 효율성 추정치의 기하평균을 유럽철도회사의 최종 효율성 추정치로 사용하였다.

시계열예측 분야에서는 Bates and Granger[8]의 선구적 연구 이후 모형결합사용방안에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다.<sup>5)</sup> 이 분야에서는 여러 모형으로부터 구한 예측치의 평균을 사용할 경우가 특정 모형만을 사용할 경우보다 정확한 경우가 많다는 주장이 폭넓은 지지를 얻고 있다. 본 논문에서는 SF모형 및 DEA모형간의 비교와 더불어 효율성 추정방법의 결합사용방안이 시계열예측분야에서와 같이 타당성을 갖는가를 살펴보기 위해 DEA

모형, SF모형(ML법 및 COLS법), 그리고 이들 두 모형의 기하평균을 사용하는 방법, 이렇게 3가지를 비교한다.

$j$ 번째 생산조직에 대해서 식 (2)의 DEA모형으로 추정된 효율성  $Eff_j^{DEA}$ 과 식 (11)의 ML법으로 추정된 효율성  $Eff_j^{ML}$ 의 기하평균  $Eff_j^{DEA+ML}$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Eff_j^{DEA+ML} = \sqrt{Eff_j^{DEA} \times Eff_j^{ML}} \quad (12)$$

$j$ 번째 생산조직에 대해서 식 (2)의 DEA모형으로 추정된 효율성  $Eff_j^{DEA}$ 과 식 (11)의 COLS법으로 추정된 효율성  $Eff_j^{COLS}$ 의 기하평균  $Eff_j^{DEA+COLS}$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Eff_j^{DEA+COLS} = \sqrt{Eff_j^{DEA} \times Eff_j^{COLS}} \quad (13)$$

## 3. 실험설계

<표 1>은 기존의 몬테카를로 분석에서 효율성 추정방법의 성과에 영향을 주는 요인으로 고려된 것들을 요약한 것이다. 표에서 ○는 논문의 실험설계에서 요인을 고려하였음을 나타낸다.

<표 1>을 살펴보면 “표본크기”, “확률오차항의 분산  $\sigma_v^2$ 과 비효율성항의 분산  $\sigma_\varepsilon^2$ 의 상대적 크기”가 효율성 추정방법의 성과에 영향을 주는 요인으로 대부분의 기존연구에서 고려되었다. 효율성 추정방법의 비교결과가 유용하게 사용되려면 실험설계에 사용된 요인의 수준을 파악하기 용이해야 한다. 이러한 관점에서 “표본크기”와 “분산비율(확률오차항의 분산과 비효율성항 분산의 상대적 크기)”은 다른 요인보다 상대적으로 요인수준을 파악하기 용이하다. “표본크기”는 표본자료로부터 쉽게 구할 수 있다. “분산비율”은 표본자료 자체 또는 표본자료를 수집하는 과정이 확률오차의 영향에 노출된 정도를 연구자가 판단하여 결정할 수 있다. 본 연구에서는 표본크기  $n$ 을 25, 50, 100, 150,

5) 시계열예측의 모형결합사용방안에 관해서는 Clemen [16]을 참조.

〈표 1〉 기존연구에서 고려된 요인

요인	논문	[5]	[7]	[13]	[17]	[24]	[31]	[32]	[33]	[35]
표본크기		○	○	○	○	○	○	○	○	
분산비율 (확률오차항의 분산과 비효율성항의 분산의 상대적 크기)			○	○	○	○		○	○	
비효율성항의 분포형태 (예, 반정규분포, 지수분포 등)			○			○			○	
생산함수의 형태 (예, Cobb-Douglas, Translog 등)									○	
생산함수의 특성 (예, 독립변수의 수, 모수값의 크기)			○			○			○	○
환경변수(외생변수)의 특성										○
확률오차항의 이분산성(heteroscedasticity)의 정도				○						

200, 250, 300 등 7가지 수준으로 구별하였다. 그리고 분산비율은 (비효율성항의 분산)/(비효율성항의 분산 + 확률오차항의 분산) =  $\sigma_\epsilon^2 / \sigma^2$ 으로 상대적 크기를 나타냈고 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 등 5가지 수준으로 구별하였다. 이 비율값이 작을수록 비효율성항의 분산  $\sigma_\epsilon^2$ 의 상대적 크기가 작음을 의미하며 표본자료 자체 또는 표본자료를 수집하는 과정이 확률오차의 영향에 노출된 정도가 큰 상황을 나타낸다.

생산기술은 2가지 종류의 투입요소  $x_1, x_2$ 를 사용해서 1가지 산출물  $y$ 를 생산하는 콤팩트형 함수<sup>6)</sup>로 나타내었다. 구체적으로 본 연구에서 표본을 생성하는데 사용한 생산함수는 다음과 같다.

$$\ln y_j = \ln(2) + 0.4 \ln x_{1,j} + 0.6 \ln x_{2,j} + v_j - u_j$$

for  $j = 1, 2, \dots, n$  (14)

투입요소  $x_1, x_2$ 는 (5, 15)의 범위를 갖는 균등분

6) DEA모형, SF모형, 그리고 DEA모형과 SF모형의 결합사용 등 3가지 효율성 추정방법의 성과를 비교함에 있어서 본 논문에서는 효율성 추정방법의 성과에 영향을 주는 요인으로 표본크기 및 분산비율을 고려하였다. 생산기술은 전형적인 형태로서 2투입 1산출의 콤팩트형 함수로 나타내었다.

포에서 난수를 추출하여 값을 생성하였다. 비효율성항  $u_j$ 는 평균이 0이고 표준편차  $\sigma_\epsilon$ 가 0.12인 정규분포에서 난수를 추출한 후 그 절대값을 취하여 값을 생성하였다. 분산비율의 5가지 수준을 구분하기 위해 확률오차항  $v_j$ 는 평균이 0이고 표준편차  $\sigma_v$ 가 각각 0.04, 0.079, 0.12, 0.184, 0.361인 정규분포에서 난수를 추출하여 값을 생성하였다.

본 논문의 목적은 DEA모형, SF모형(COLS법, ML법), 그리고 DEA모형과 SF모형(COLS법, ML법)의 결합사용 등 3가지 효율성 추정방법의 성과를 몬테카를로 분석에 의해 비교하는 것이다. 이를 위해 식 (14)로 생성한 표본자료에 ML법 사용 SF모형(식 (10)), COLS법 사용 SF모형(식 (11)), DEA모형(식 (2)), 그리고 DEA모형과 SF모형의 결합사용(식 (12), 식 (13)) 등의 방법으로 효율성을 추정하였다.

본 논문의 실험설계는 5종류의 분산비율, 7종류의 표본크기, 그리고 5가지 효율성 추정방법으로 모두 175(=5×7×5)개의 cell로 구성된다. 몬테카를로 분석결과의 유의성을 확보하기 위해 각 cell에 대해 100회의 반복을 실시하였다. 각 효율성 추정방법의 성과는 식 (15)에 나타낸 바와 같이 참 효율성 값과 추정된 효율성 값의 절대편차의 평균(mean absolute deviation : MAD)으로 평가하였다.

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\exp(-u_j) - Eff_j| \quad (15)$$

여기서  $u_j$  = 식 (14)에서 비효율성항  $u_j$ 의 값으로  
 생성된 값  
 $\exp(-u_j)$  = 참효율성 값  
 $Eff_j$  = 추정된 효율성 값

#### 4. 결 과

본 연구에서 수행한 몬테카를로 분석결과를 <표 2>에 요약하여 나타내었다. <표 2>에서 ①열에는 분산비율  $\sigma_u^2/\sigma^2$ 의 수준을 나타내었다. ①열의 분산비율 값이 1.0에 가까울수록 확률오차의 영향이 적음을 나타내고 0.0에 가까울수록 확률오차의 영향이 큼을 나타낸다. ②열에는 표본크기의 수준을 나타내었다. ③열부터 ⑦열까지는 본 연구에서 고려한 효율성 추정방법을 나타낸다. 표에서 ③열부터 ⑦열까지 나타낸 수치는 평균절대편차(Mean Absolute Deviation : MAD)이고 괄호안의 수치는 평균절대편차의 표준편차이다. MAD는 참효율성(true efficiency) 값과 추정된 효율성(estimated efficiency) 값의 절대편차를 평균한 값이며 따라서 이 값이 0에 가까울수록 정확한 효율성추정방법이라 할 수 있다. <표 2>의 ③열부터 ⑦열까지에서 진하게 하고 밑줄을 그은 MAD는 각 행에서 가장 작은 값을 나타낸다.

Ruggiero[33]는 몬테카를로 분석으로 확률적프론티어(stochastic frontier : SF)모형과 확정적프론티어(deterministic frontier : DF)모형을 비교하여 SF모형이 DF모형보다 우월하다고 볼 수 없다는 견해를 제시한 바 있다. 본 논문에서는 DF모형보다는 DEA모형이 일반적으로 사용되고 있으며, 현실적인 측면에서 의미있는 비교라는 판단하에 DEA모형과 SF모형을 비교하였다.

<표 2>의 몬테카를로 분석결과에서 표본크기가 150이상인 경우 ML법으로 추정된 SF모형의 성과가 분산비율의 수준에 관계없이 가장 우월하게 나타났다. 분산비율이 0.5, 0.7인 경우를 제외하면 표

본크기 100에서도 ML법으로 추정된 SF모형의 성과가 가장 우월하게 나타났다. 모든 분산비율과 표본크기에서 ML법으로 추정된 SF모형이 DEA모형보다 우월한 것으로 나타났다. Ruggiero의 연구결과와 본 연구의 결과를 종합하여 판단해 보면 모형의 우월성 관점에서 「DEA모형 < SF모형 ≤ DF모형」와 같은 순서를 파악할 수 있다. 그러나 Ruggiero 및 본 연구의 실험설계는 多數투입·單一산출의 상황을 전제로 하고 있으며 多數투입·多數산출의 상황에서는 앞의 우월성 순서가 유지된다고 할 수는 없다.

<표 2>의 ③열과 ④열에 나타낸 COLS법과 ML법으로 추정된 SF모형의 몬테카를로 분석결과를 살펴보면 분산비율이 0.1이고 표본크기가 25, 50일 때 COLS법으로 추정된 경우가 ML법으로 추정된 경우보다 우월한 것으로 나타났다. 분산비율이 0.3, 0.5이고, 표본크기가 25인 경우도 같은 결과를 나타내었다. 반면 나머지 거의 모든 경우<sup>7)</sup>는 ML법이 COLS법보다 우월한 성과를 나타내었다. 즉 확률적오차의 영향이 매우 크면서 동시에 표본크기가 작은 상황에서는 COLS법이 다소 우월하지만, 확률적오차의 영향이 작은 경우 또는 확률적오차의 영향이 크더라도 표본크기가 큰 경우에는 ML법으로 추정하는 것이 우월하다는 판단을 할 수 있다. 이러한 결과는 ML법과 COLS법간의 성과차이가 거의 나타나지 않은 Olsen et al.[31]의 결과와는 다르다 할 수 있으며 Coelli[17]의 분석과는 일치하는 결과라 할 수 있다.

<표 2>에 나타난 결과에서 흥미로운 부분은 ⑥열과 ⑦열에 나타낸 SF모형과 DEA모형을 결합하여 사용한 경우이다. 분산비율 0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 표본크기 25, 50에서 SF모형과 DEA모형을 결합하여 사용한 경우가 다른 각각의 경우보다 우월한 것으로 나타났다. 특히 분산비율 0.7, 0.5에서는 표본

7) 예외적으로, 분산비율이 0.7, 표본크기가 50일 때 COLS법으로 추정된 경우는 MAD가 0.067, ML법으로 추정된 경우는 MAD가 0.069로 COLS법이 우월하게 나타남.



〈표 2〉 몬테카를로 분석결과

분산비율 $\frac{\sigma_{\xi}^2}{\sigma^2}$	표본크기 $n$	SF모형		DEA모형	SF모형과 DEA모형의 결합	
		COLS	ML		DEA+COLS	DEA+ML
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
0.9	25	0.065(0.032)	0.061(0.034)	0.061(0.017)	0.057(0.021)	<b>0.056</b> (0.021)
	50	0.046(0.019)	0.041(0.019)	0.047(0.008)	0.042(0.011)	<b>0.040</b> (0.010)
	100	0.035(0.007)	<b>0.032</b> (0.008)	0.040(0.005)	0.033(0.005)	0.033(0.004)
	150	0.032(0.004)	<b>0.029</b> (0.003)	0.039(0.004)	0.032(0.003)	0.031(0.003)
	200	0.030(0.003)	<b>0.028</b> (0.003)	0.039(0.004)	0.031(0.002)	0.030(0.002)
	250	0.030(0.003)	<b>0.027</b> (0.002)	0.039(0.004)	0.030(0.002)	0.030(0.002)
	300	0.029(0.002)	<b>0.026</b> (0.002)	0.039(0.004)	0.030(0.002)	0.030(0.002)
0.7	25	0.084(0.037)	0.083(0.036)	0.073(0.015)	<b>0.068</b> (0.018)	<b>0.068</b> (0.017)
	50	0.067(0.029)	0.069(0.032)	0.067(0.009)	<b>0.057</b> (0.009)	<b>0.057</b> (0.010)
	100	0.056(0.017)	0.055(0.020)	0.071(0.011)	0.055(0.006)	<b>0.054</b> (0.006)
	150	0.051(0.004)	<b>0.048</b> (0.008)	0.074(0.008)	0.055(0.004)	0.053(0.004)
	200	0.050(0.003)	<b>0.046</b> (0.004)	0.079(0.010)	0.057(0.004)	0.054(0.004)
	250	0.050(0.003)	<b>0.045</b> (0.004)	0.083(0.011)	0.058(0.005)	0.055(0.004)
	300	0.050(0.002)	<b>0.045</b> (0.002)	0.084(0.010)	0.058(0.004)	0.056(0.004)
0.5	25	0.100(0.035)	0.101(0.033)	0.093(0.017)	<b>0.079</b> (0.015)	0.081(0.015)
	50	0.090(0.033)	0.089(0.035)	0.097(0.015)	0.075(0.009)	<b>0.073</b> (0.011)
	100	0.080(0.024)	0.075(0.029)	0.110(0.019)	0.078(0.009)	<b>0.074</b> (0.009)
	150	0.075(0.019)	<b>0.068</b> (0.024)	0.117(0.014)	0.081(0.009)	0.076(0.008)
	200	0.072(0.010)	<b>0.062</b> (0.013)	0.126(0.016)	0.085(0.008)	0.079(0.008)
	250	0.071(0.011)	<b>0.061</b> (0.015)	0.133(0.017)	0.087(0.009)	0.081(0.009)
	300	0.070(0.008)	<b>0.059</b> (0.010)	0.136(0.015)	0.089(0.007)	0.083(0.007)
0.3	25	0.118(0.027)	0.123(0.030)	0.133(0.027)	<b>0.097</b> (0.017)	0.101(0.021)
	50	0.114(0.028)	0.110(0.037)	0.152(0.026)	0.103(0.017)	<b>0.101</b> (0.022)
	100	0.109(0.022)	<b>0.094</b> (0.031)	0.175(0.028)	0.112(0.019)	0.104(0.017)
	150	0.107(0.020)	<b>0.090</b> (0.029)	0.187(0.022)	0.118(0.019)	0.110(0.018)
	200	0.108(0.020)	<b>0.090</b> (0.029)	0.199(0.024)	0.122(0.018)	0.115(0.016)
	250	0.104(0.018)	<b>0.084</b> (0.027)	0.211(0.025)	0.129(0.018)	0.120(0.017)
	300	0.101(0.017)	<b>0.080</b> (0.024)	0.217(0.021)	0.133(0.017)	0.124(0.016)
0.1	25	<b>0.149</b> (0.036)	0.167(0.049)	0.250(0.055)	0.167(0.036)	0.176(0.046)
	50	<b>0.150</b> (0.038)	0.153(0.047)	0.297(0.049)	0.189(0.036)	0.191(0.041)
	100	0.139(0.034)	<b>0.128</b> (0.030)	0.337(0.045)	0.208(0.035)	0.205(0.034)
	150	0.140(0.035)	<b>0.130</b> (0.028)	0.355(0.037)	0.218(0.033)	0.215(0.033)
	200	0.138(0.035)	<b>0.128</b> (0.029)	0.372(0.040)	0.229(0.030)	0.227(0.030)
	250	0.135(0.032)	<b>0.123</b> (0.027)	0.392(0.037)	0.238(0.032)	0.236(0.032)
	300	0.135(0.028)	<b>0.122</b> (0.024)	0.402(0.035)	0.243(0.033)	0.242(0.032)

크기가 100인 경우에도 같은 결과를 나타내었다. 이는 표본크기가 100이하인 경우 SF모형과 DEA모형을 결합하여 효율성을 추정하는 것이 그렇지 않은 경우보다 바람직함을 의미한다. COLS법과 DEA모형을 결합한 경우(⑥열)와 ML법과 DEA모형을 결합한 경우(⑦열)를 비교해 보면 분산비율 0.5, 0.3, 표본크기 25인 경우를 제외하고 대부분의 경우에서 ML법과 DEA모형을 결합한 경우가 우월하게 나타났다. Coelli and Perelman[18]은 17개 유럽철도회사의 기술효율성분석을 위해 DEA모형, DF모형, SF모형(COLS법)을 사용하였으나 상대적 성과분석을 위한 효율성 값으로 각모형을 결합사용한 결과를 선택하였다. 본 연구의 결과는 Coelli and Perelman의 판단이 타당함을 나타내는 증거라 할 수 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 수정최소제곱(corrected ordinary least squares : COLS)법으로 추정된 확률적프론티어(stochastic frontier : SF)모형, 최우추정(maximum likelihood : ML)법으로 추정된 SF모형, 자료포락분석(data envelopment analysis : DEA)모형, 그리고 SF모형과 DEA모형을 결합사용하는 방안 2가지 등 모두 5가지의 효율성추정방법을 몬테카를로 분석을 통해 비교하였다.

비교결과 표본크기가 150이상인 모든 경우에 있어서 ML법으로 추정된 SF모형이 가장 정확한 나타났으며 표본크기가 100보다 작고 확률적오차의 영향이 작을 경우 SF모형(ML법 및 COLS법)과 DEA모형을 결합사용하는 방안이 가장 바람직한 것으로 나타났다. 표본크기가 작지만 확률적오차의 영향이 매우 큰 경우에는 COLS법으로 추정된 SF모형이 바람직한 것으로 나타났다. 이러한 결과는 다수투입·단일산출의 상황을 전제로 한 것이며 다수투입·다수산출상황에서 동일한 결과가 나타나지 않을 개연성은 존재한다.

본 연구에서 고려한 SF모형과 DEA모형의 결합

사용방안은 각 모형으로 추정된 효율성값의 기하평균을 사용하는 것이었다. 시계열예측문헌에는 각 예측모형의 결과를 결합사용하는 다양한 방안을 찾아 볼 수 있다. 앞으로 효율성 추정방법의 다양한 결합사용방안을 모색하고 이들의 성과를 분석하는 것은 효율성 추정방법관련 연구에 큰 기여가 될 것이라 판단된다. 한편 본 연구에서는 SF모형과 DEA모형의 결합사용이 우월한 성과를 나타낸 경우 그 원인에 대한 이론적 설명을 하지 못하였다. 이를 위해서는 SF모형의 효율성추정량과 DEA모형의 효율성추정량을 결합한 효율성추정량의 표본특성에 관한 이론이 개발되거나 또는 정교한 실험설계하의 몬테카를로 분석이 필요할 것으로 판단된다.

## 참 고 문 헌

- [1] Aigner, D.J., and S.F. Chu, "On Estimating the Industry Production Function," *American Economic Review*, Vol.58, No.4(1968), pp.826-839.
- [2] Aigner, D., C.A.K. Lovell, and P.J. Schmidt, "Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Models," *Journal of Econometrics*, Vol.6, No.1(1977), pp.21-37.
- [3] Ali, A.I., and L.M. Seiford, "The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis," in H.O. Fried, C.A.K. Lovell, and S.S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1993, pp.120-159.
- [4] Banker, R.D., A. Charnes, and W.W. Cooper, "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis," *Management Science*, Vol.30, No. 9(1984), pp.1078-1092.
- [5] Banker, R.D., A. Charnes, W.W. Cooper, and

- A. Maindiratta, "A Comparison of DEA and Translog Estimates of Production Frontiers Using Simulated Observations from a Known Technology," in A. Dogramaci, and R. Fare (eds.), *Applications of Modern Production Theory : Efficiency and Productivity*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1988, pp. 33-55.
- [6] Banker, R.D., R.F. Conrad, and R.P. Strauss, "A Comparative Application of Data Envelopment Analysis and Translog Methods : An Illustrative Study of Hospital Production," *Management Science*, Vol.32, No.1 (1986), pp.30-44.
- [7] Banker, R.D., V.M. Gadh, and W.L. Gorr, "A Monte Carlo Comparison of Two Production Frontier Estimation Methods : Corrected Ordinary Least Squares and Data Envelopment Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.67, No.3(1993), pp.332-343.
- [8] Bates, J.M. and C.W. Granger, "The Combination of Forecasts," *Operational Research Quarterly*, Vol.20, (1969), pp.451-468.
- [9] Bauer, P.W., "Recent Developments in the Econometric Estimation of Frontiers," *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1/2(1990), pp.39-56.
- [10] Bauer, P.W., A.N. Berger, and D.B. Humphrey, "Efficiency and Productivity Growth in U.S. Banking," in H.O. Fried, C. A.K. Lovell, and S.S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, New York, 1993, pp.386-413.
- [11] Berger, A.N., and L.J. Mester, "Beyond the Black Box : What Explains Differences in the Efficiencies of Financial Institutions," *Journal of Banking and Finance*, Vol.21, (1997), pp.895-947.
- [12] Bjurek, H., L. Hjalmarsson, and F.R. Fosund, "Deterministic Parametric and Nonparametric Estimation of Efficiency in Service Production : A Comparison," *Journal of Econometrics*, Vol.46, No.1/2(1990), pp.213-227.
- [13] Bojanic, A.N., S.B. Caudill, and J.M. Ford, "Small-sample Properties of ML, COLS, and DEA Estimators of Frontier Models in the Presence of Heteroscedasticity," *European Journal of Operational Research*, Vol.108 (1998), pp.140-148.
- [14] Charnes, A., W.W. Cooper, A.Y. Lewin, and L.M. Seiford, *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology, and Application*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.
- [15] Charnes, A., W.W. Cooper, and E.L. Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making Units," *European Journal of Operational Research*, Vol.2, No.6(1978), pp.429-444.
- [16] Clemen, R.T., "Combining Forecasts : A Review and Annotated Bibliography," *International Journal of Forecasting*, Vol.5, (1989), pp.559-583.
- [17] Coelli, T., "Estimators and Hypothesis Tests for a Stochastic Frontier Function : A Monte Carlo Analysis," *Journal of Productivity Analysis*, Vol.6, (1995), pp.247-268.
- [18] Coelli, T., and S. Perelman, "A Comparison of Parametric and Non-parametric Distance Functions : With Application to European Railways," *European Journal of Operational Research*, Vol.117, (1999), pp.326-339.
- [19] Coelli, T., D.S. P. Rao, and G.E. Battese, *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer Academic Publisher, Boston, 1998.

- [20] De Borger, B., and K. Kerstens, "Cost Efficiency of Belgian Local Governments : A Comparative Analysis of FDH, DEA, and Econometric Approaches," *Regional Science and Urban Economics*, Vol.26, No.2(1996), pp.145-70.
- [21] Debrue, G., "The Coefficient of Resource Utilization," *Econometrica*, Vol.19, (1951), pp. 273-292.
- [22] Farrell, M.J., "The Measurement of Productive Efficiency," *Journal of the Royal Statistical Society, Series A, General*, Vol.120, No.3(1957), pp.253-281.
- [23] Ferrier, G.D., and C.A.K. Lovell, "Measuring Cost Efficiency in Banking : Econometric and Linear Programming Evidence," *Journal of Econometrics*, Vol.46, (1990), pp.229-245.
- [24] Gong, B.-H., and R.C. Sickles, "Finite Sample Evidence on the Performance of Stochastic Frontiers and Data Envelopment Analysis Using Panel Data," *Journal of Econometrics*, Vol.51, No.1/2(1992), pp.259-284.
- [25] Greene, W.H., "The Econometric Approach to Efficiency Analysis," in H.O. Fried, C.A.K. Lovell, and S.S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, New York, 1993, pp.68-119.
- [26] Greene, W., *Econometric Analysis*, Third Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.
- [27] Lovell, C.A.K., "Production Frontiers and Productive Efficiency," in H.O. Fried, C.A.K. Lovell, and S.S. Schmidt (eds.), *The Measurement of Productive Efficiency : Techniques and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 1993, pp.3-67.
- [28] Jondrow, J., C.A.K. Lovell, I.S. Materov, and P. Schmidt, "On the Estimation of Technical Inefficiency in the Stochastic Frontier Production Function Model," *Journal of Econometrics*, Vol.19, No.2/3(1982), pp.233-238.
- [29] Koopmans, T.C., "An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities," in T.C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York, 1951, pp.33-97.
- [30] Meeusen, W., and J. van den Broeck, "Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error," *International Economic Review*, Vol.18, No. 2(1977), pp.435-444.
- [31] Olson, J.A., P. Schmidt, and D.M. Waldman, "A Monte Carlo Study of Estimators of Stochastic Frontier Production Functions," *Journal of Econometrics*, Vol.13, No.1(1980), pp. 67-82.
- [32] Resti, A., "Efficiency Measurement for Multi product Industries : A Comparison of Classic and Recent Techniques Based on Simulated Data," *European Journal of Operational Research*, Vol.121, (2000), pp.559-578.
- [33] Ruggiero, J., "Efficiency Estimation and Error Decomposition in the Stochastic Frontier Model : A Monte Carlo Analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.115, (1999), pp.555-563.
- [34] Schmidt, P., "Frontier Production Functions," *Econometric Review*, Vol.4, No.2 (1985-86), pp.289-328.
- [35] Yu, C., "The Effects of Exogenous Variables in Efficiency Measurement - A Monte Carlo Study," *European Journal of Operational Research*, Vol.105, (1998), pp.569-580.