經營科學
第19卷 第1號
2002年 5月

선형계획법의 해의 이동에 관한 시각화*

이상욱** · 임성묵*** · 박순달**

On visualization of solutions of the linear programming*

Sangwook Lee**, Sungmook Lim***, Soondal Park**

■ Abstract ■

This paper deals with the visualization method of solutions of the linear programming problem. We used the revised simplex method for the LP algorithm. To represent the solutions at each iteration, we need the informations of feasible region and animated effect of solutions.

For the visualization in high dimension space, we used the method of projection to the three dimensions if the decision variable vector is over three dimensions, and we studied the technique of preserving original polyhedral information such as the number of vertices. In addtion, we studied the method of visualizing unbounded feasible region and the adjacency relationship of the vertices which is indispensable to visualize feasible region.

Keyword : Linear Programming, Simplex Method, Visualization

1. 서 론

선형계획법은 모형의 명료함과 다양한 해법의 개발로 인해 공학, 경영 및 순수 과학의 분야에서 폭넓게 사용되고 있는 분야이다. 이러한 선형계획법의 해법으로는 1940년대에 G. B. Dantzig에 의해 개발된 단체법(The Simplex Method)과 1980년대에 N. Karmarkar의 연구를 시작으로 발전된 내부점법(Interior Point Method)이 대표적이다[1, 2].

단체법을 이해하기 위해서는 다양한 지식을 필

논문접수일 : 2000년 4월 18일　　논문게재확정일 : 2002년 2월 18일
* 본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(98-0200-07-01-2) 지원으로 수행되었음.
** 서울대학교 산업공학과
*** 한국전산원

요로 하는데, 이러한 지식들은 모두 수치적인 개념으로 되어 있어서, 사용자로 하여금 단체법의 이해나, 결과의 해석에 있어서 어려움을 줄 수 있다. 선형계획법은 제약식에 의해 주어지는 가능영역에서 최적해를 찾는 것이므로 가능영역을 시각화하면 단체법에서 최적해를 찾아가는 과정을 시각적으로 알 수 있게 되므로, 단체법에 대한 분석에 있어서도 많은 도움을 줄 수가 있다.

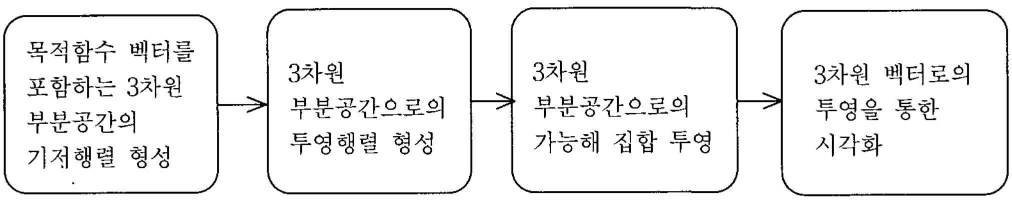
기하학적인 그래픽 표현을 위해서는 시각적으로 인식 가능한 좌표계를 설정하여야 한다. 2차원이나 3차원까지는 식별이 가능하지만, 4차원 이상부터는 식별이 불가능하므로 이에 대한 시각화 방법이 먼저 연구되어야 한다.

기존의 선형계획법의 그래픽 표현과 관련된 연구는 평행좌표계(Parallel Coordinate)[4, 6]를 이용한 방법과 저차원으로부터의 확장을 이용한 방법이 있는데, 이들 방법은 고차원으로 올라갈수록 점, 선, 면 등 기하적인 정보의 식별이 어려워진다는 단점이 있다. 또 다른 분야는 투영에 의한 방법[3]으로서, 고차원의 다면체에 대한 정보를 2차원이나 3차원의 저차원으로 투영시켜 시각화하는 방법이다. 이 방법은 차원이 높은 공간에서의 다면체를 저차원으로 투영시키므로, 사용자로 하여금 다면체를 인식하는데 있어서는 다른 방법에 비해 우수한 면을 가지고 있다. 그러나, 고차원 공간상에서 가지고 있던 정보를 저차원으로 투영시킴으로써 다면체에 대한 많은 정보가 손실될 수 있다는 단점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 투영에 의한 방법을 사용하되 가급적 정보의 손실을 줄이는 방법을 모색하고, 이를 통해 구체적인 개념을 통한 선형계획법의 이해와 분석 및 응용을 도모하고자 한다.

2. 투영을 통한 고차원의 시각화

선형계획법의 해의 이동에 관한 시각화를 위해서는 변수들이 이루는 차원이 중요하게 된다. 변수의 수가 3개인 3차원까지는 표현상에 있어 어려움이 없으나, 4차원 이상에서는 가능영역의 표현이 불가능하게 된다. 고차원에서의 가능영역과 매 회의 해를 표현하기 위해서 본 논문에서는 저차원으로의 투영을 통한 방법을 사용하였다. 저차원으로의 투영을 통한 방법은 김우제 · 박순달의 연구[3] 에서 이루어진바 있다. 이 방법의 기본 개념은 투영공간을 나타내는 기저행렬을 구한 후, 원래의 문제에서 구한 모든 정점을 이 투영행렬에 곱해 투영된 정점을 구한다. 투영된 정점은 여전히 원소가 n개인 벡터로 되어 있으므로 3차원 공간상에서 나타낼 수가 없다. 따라서, 이를 다시 3차원 좌표로 바꾸어주기 위해 투영공간의 기저행렬의 전치행렬을 곱한다. 기저행렬을 구하기 위해서는 서로 독립인 벡터를 생성시켜야 하는데 이를 위해서 Gram- shemidt의 직교화 과정을 거쳐 기저행렬을 형성한다. 기저 행렬은 최적 정점이 다면체의 정점에 위치하도록 하기 위해 목적함수 벡터를 포함한 기저행렬을 Gram-shemidt의 직교화 과정을 거쳐 생성시킨다. 이 과정을 간략히 으로 나타내보면 다음과 같다.

투영행렬의 구성은 기저벡터를 어떻게 구성하느냐에 따라 투영결과가 여러 가지로 나타날 수 있다. 목적함수 벡터를 포함하는 기저벡터를 이용하여 투영행렬을 구성하면 최적정점이 투영된 가능영역의 꼭지점에 위치하게 되어 단체법의 시각적 효과를 잘 나타내 줄 수 있다. 목적함수 벡터를 a_1이라 할 경우 Gram-Schmidt의 직교화 과정을 통한 3차



〈그림 1〉 투 영 과 정

원 기저벡터를 형성하는 과정은 다음과 같다.

$$v_1 = a_1$$
$$v_2 = a_2 - (v_1^t a_2)v_1 / v_1^t v_1$$
$$v_3 = a_3 - (v_1 t a_3)v_1 / v_1^t v_1 - (v_2^t a_3)v_2 / v_2^t v_2$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} q_1 = v_1 / \|v_1\| \\ q_2 = v_2 / \|v_2\| \\ q_3 = v_3 / \|v_3\| \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} d_1 = (q_1 - q_2)/\|q_1 - q_2\| = (q_1 - q_2)/\sqrt{2} \\ d_2 = (q_1 + q_2)/\|q_1 + q_2\| = (q_1 + q_2)/\sqrt{2} \\ d_3 = q_3 \end{array}$$

위의 첫 번째와 두 번째 과정은 목적함수 벡터를 이용하여 직교 벡터를 형성하고 정규화를 하는 과정이다. 세 번째 과정은 목적함수벡터가 투영행렬이 이루어 내는 축상에 위치하지 않고 d_1과 d_2이 만들어내는 공간상에 위치하도록 하는 과정이다. 행렬 $D = [d_1, d_2, d_3]$를 이용한 투영행렬을 $P = D(D^tD)^{-1}D^t$로 두고 다시 3차원상에 나타내기 위한 행렬을 $P' = D^tD(D^tD)^{-1}D^t = D^t$로 두면 3차원상으로 가능영역과 기저가능해가 나타나게 되며 해의 최적성 유지 및 가능영역의 볼록성(convexity)이 유지됨이 김우제[3]에 의하여 연구되어졌다.

위와 같이하면, 투영된 정점이 겹칠 수 있다는 단점이 있다. 이러한 경우는 아래의 <그림 2>에서 와같이 θ만큼의 회전을 통하여 해결할 수 있다.

매회 구해지는 해의 표현을 위해서는, 해가 단체법의 선회연산 결과 이웃정점들 사이를 이동하며 전체적으로 일관된 방향으로 이동하고 있음을 나타내 주어야 한다. 이의 표현을 위해 컴퓨터 그래픽의 구현에 있어서는 좌표의 평행이동을 이용하여 해의 움직임을 나타내었다.

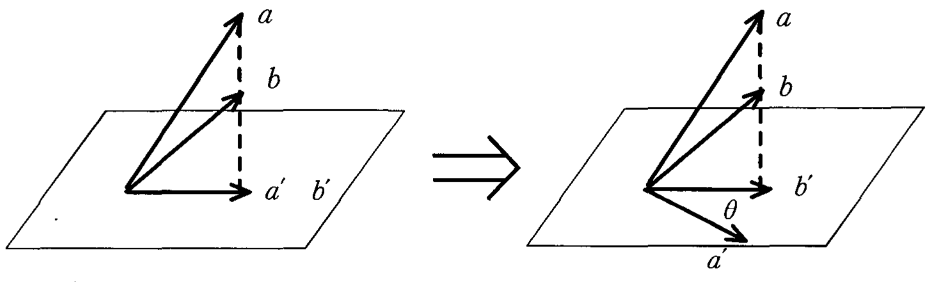
3. 이웃정점 판별 및 가능영역의 표현

가능영역을 표현하기 위해서는 제약식들에 의해 만들어지는 볼록다면체의 모든 정점을 구하고, 이들 정점들 사이의 이웃관계를 알아야 한다. 가능영역의 모든 정점을 찾는 방법으로는 매타이스법[11], 발린스키법[8] 이 있다. 발린스키법은 하나의 정점에 관한 모든 이웃정점을 구하는 절차를 거치므로, 정점을 중복적으로 되찾는 결과를 얻을 수 있어서 효율적이지 못하다. 그러나, 매타이스법은 구해진 정점을 중복적으로 찾지 않으므로 발린스키법보다 효율적이라고 볼 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 매타이스법을 사용하였다. 매타이스법은 주어진 문제를 다음과 같이 변형시켜 정점을 구하게 된다.

$$A: \begin{array}{l} A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$M: \begin{array}{ll} max & y \\ s.t & A\mathbf{x} + ty \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge 0, y \ge 0 \\ & t = (t_1, t_2, \cdots, t_m)^T, t_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \end{array}$$

그러나, 매타이스법은 무한영역을 갖는 경우의 정점을 구하지 못하는 단점과 정점들 사이의 이웃



〈그림 2〉 겹쳐진 투영점의 회전

관계를 파악하지 못한다는 단점이 있기 때문에 이들 문제를 해결하는 방법을 알아보도록 한다.

선형계획법의 가능영역은 볼록다면체이다. 볼록다면체의 정점을 구하기 위해 매타이스법은 한 차원 높은 볼록다면체를 만들고 원래의 가능영역보다 한 차원 높은 정점을 구한 후, 이 정점들과 연결된 정점은 가능영역의 정점이라는 정리를 이용하여 모든 정점을 구하게 된다. 그런데, 매타이스법으로 정점을 구하게 되면, 원문제의 가능영역이 무한영역인 경우는 정점을 찾지 못한다는 단점이 있다. 정점을 찾아내지 못하는 이유는 원래의 문제가 무한영역인 경우는 이를 포함하는 한 차원 높은 다면체도 무한영역이 되어야 하고 이렇게 되면 [정리1]에서와 같이 매타이스법에서 필요로 하는 문제도 무한해가 되어 최적해를 구할 수 없게되기 때문이다.

[정리 1] 주어진 문제의 가능영역 S가 무한영역이면, S를 포함하는 1차원 높은 영역 (C) 또한 무한영역이 된다.

(증 명) S와 C의 가능해를 $\boldsymbol{x}$, S의 무한영역의 방향들 중에 하나를 $\boldsymbol{d}$라고 하면, S에 있어서의 무한 사선(unounded ray)는 $\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{d}\in S\ (\lambda\geq 0)$가 된다. 이 사선을 변형된 제약식에 대입하여 보면, $S\subset C$이므로 $A\boldsymbol{x}+\lambda A\boldsymbol{d}+ty\leq\boldsymbol{b}$가 된다. 따라서, 변형된 매타이스 제약식에 의해 만들어지는 공간도 무한영역이 된다.

또한 매타이스법에서 최적해가 존재하면 매타이스법에서의 가능영역은 유한영역을 갖는다는 사실이 뒷받침되어야 한다. 왜냐하면, 문제에 따라서는 무한영역을 가지지만, 최적해가 존재하는 경우가 있기 때문이다. 이렇게 되면, 최적해만 찾고 무한영역의 정점을 찾지 못하는 경우도 발생할 수 있기 때문에, 최적해가 존재하면 매타이스법에서의 가능영역은 유한영역이라는 사실을 증명하여야 한다. 이러한 관계를 수식을 이용하여 증명하여보자.

[정리 2] 매타이스법에서 M문제에 대한 최적해가 유일하게 존재하면 가능영역은 유한영역이다.

(증 명) 매타이스 문제는 목적함수가 y이다. 이 y를 최대화 시킨다는 것은 M문제에 대한 최적해를 ($\boldsymbol{x}^*, y^*,\ \boldsymbol{x}_s^*$)로 놓았을 때, $\boldsymbol{x}^*$와 $x_s=0$인 제약식과의 거리를 최대화 시키는 것이다. 따라서, 문제 M이 무한영역을 갖는다면, 가능영역의 볼록성(convexity)을 고려하여 볼 때, y를 무한히 크게 하거나, 대안해를 가질 수 있다. 그러므로, 문제 M이 유일한 최적해를 갖는다면 M의 가능 영역은 유한영역이다.

따라서, 무한영역(unbounded feasible region)이 주어진 상황에서 이 영역의 정점을 구하기 위해서는 변수에 상한을 설정하여 마치 원래의 영역이 유한영역(bounded feasible region)인 것처럼 되어야 한다. 이렇게 되면 하나의 문제가 생긴다. 변수의 상한을 얼만큼 큰 수로 잡아야 모든 정점들을 포함할 수 있는가가 문제가 된다. 이러한 문제는 실제로 계산을 수행하지 않으면 사전에 미리 알 수가 없으므로 변수의 상한을 처음에는 모든 정점을 포함할 수 있도록 아주 큰 값으로 설정을 하여야 한다. 즉 다음과 같이 문제를 변형시킨다.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ \cdots+a_{1n}x_n \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+\ \cdots+a_{mn}x_n \\ \boldsymbol{x}\geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1+\quad \cdots+a_{1n}x_n \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+\quad \cdots+a_{mn}x_n \\ \boldsymbol{0}\leq \boldsymbol{x}\leq \boldsymbol{u} \end{array}$$

이렇게 하면, 정점 자체만을 구하는 경우에는 문제가 되지 않지만, 그래픽과 같은 분야와 연계시키면, 원래의 정점을 이루는 영역이 너무 작게 표현되어 원래의 정점이 잘 표현되지 않는다는 단점이 있다. 따라서, 구해진 원래의 영역의 정점을 이루는

요소 중에서 최대 절대값을 구한 후, 이 값에 적당한 값을 더하여 원래의 영역이 그래픽으로 표현되더라도 인식이 가능하게끔 스케일링을 해주어야 한다. 이를 단계별로 정리하여 보면 다음과 같다.

단계1 원래의 주어진 문제를 매타이스 문제로 변형한다.

단계2 변형된 선형계획문제를 푼다.

단계3 문제가 무한영역을 갖는 경우 다음과 같이 변수에 상당히 큰 값으로 상한을 둔다.

$$\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}$$

무한영역이 아닌 경우 '단계7'로 간다.

단계4 변형된 선형계획문제를 푼다.

단계5 구해진 정점들의 성분 중에서 가장 큰 절대값을 구한다.

단계6 구해진 최대값에 적절한 값을 더한다.

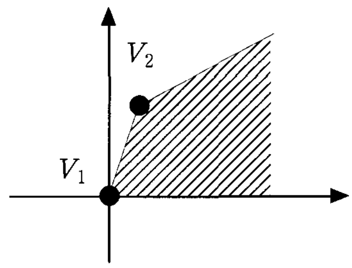
단계7 구해진 정점 중에서 실제로 존재하지 않는 점(무한영역을 가리키는 극사선상의 점)을 구별하여 모든 정점들을 출력한다.

무한영역의 정점을 구하는 문제 이외에, 매타이스법은 구해진 정점들간의 관계는 구별하지 못한다. 정점간의 관계는 선형계획법의 그래픽 표현에서 가능영역을 그리고자 하는 경우에 필요하다. 단체법에서는 퇴화가 일어나지 않으면, 기저와 정점은 1 : 1의 대응관계에 있다. 따라서, 이웃정점을 판별하는 기준으로서 기저를 이용하면, 정점에 해당하는 기저를 보고 기저의 차이가 1개이면, 이웃정점으로 판단할 수 있다. 그러나, 퇴화가 일어난 경우는 이웃정점임에도 불구하고 기저의 차이가 1개 이상이 일어날 수 있다. 예로서 다음의 문제를 보자.

$$2x_1 - x_2 \ge 0$$
$$x_1 - x_2 \ge -3$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

위 문제를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

위의 <그림 3>에서 정점 V_1을 결정하는 제약식은 3개 존재하므로 퇴화가 일어날 수 있음을 알 수 있다. 따라서, 정점 V_2를 이루는 기저와 V_1의 기저 차이가 1개 이상 될 수 있다. 이런 상황하에



〈그림 3〉 퇴화문제

서는 정점 V_1와 V_2가 이웃정점임에도 불구하고 이웃정점으로 판단되지 못할 수도 있다. 따라서, 이웃정점의 판별을 퇴화를 포함한 일반적인 모든 상황에서 가능하게 하려면, 기저를 중심으로 한 판단보다는 다른 방법을 이용하여야 한다.

매타이스법을 이용하여 모든 정점을 구하고 나면, 구해진 정점들은 주어진 제약식들 중에서 등식을 만족하는 제약식들이 존재하게 된다. 즉, 가능영역에서는 제약식이 초평면을 의미하므로 정점이 초평면상에 존재하게 되며, 구해진 정점을 등식으로 만족하는 제약식 즉, 속박 제약식들(binding constraints)이 존재하게 된다.

n차원 상에서 하나의 점을 이루기 위해서는 서로 평행하지 않은 n개의 초평면이 만나면 된다. 따라서, 변수의 수가 n개인 선형계획문제에서는 임의의 정점을 나타내기 위해 이 정점을 중심으로 n개의 제약식이 속박적이게 된다. 속박적 제약식들과 정점들 간의 이웃관계는 다음의 정리에서 살펴볼 수 있다.

[정리 3] 변수의 수가 n개인 선형계획문제에서 매타이스법을 이용하여 구해진 정점들 중, 임의의 두 정점들에 대하여 속박적인 제약식의 수가 n개이고 공통적으로 속박적인 제약식의 차이가 1개이면, 이 정점들은 서로 이웃이다.

(증 명) 임의의 두 정점 V_1과 V_2가 주어지고 이들 정점에 속박적인 제약식의 집합을 각각 $S_1 = \{i : c(V_1)_i = 0\}$, $S_2 = \{j : c(V_2)_j = 0\}$라고 두자 ($c(\boldsymbol{x})_i$

는 i번째 제약식을 나타냄). 그리고, S_1과 S_2의 차이가 한 개라고 하자. n차원에서 정점을 나타내기 위해서는 서로 독립인 n개의 초평면이 만나야 하고, 제약식 자체가 n차원에서의 초평면을 의미하므로, S_1과 S_2의 차이가 1개인 것은 공통으로 정점을 만들어내는 초평면의 수가 $n-1$개가 되는 것을 의미하므로, 이들 정점은 이웃 정점이 된다.

[보조정리1] 임의의 정점에 대해, 속박 제약식들과 기저는 일대일 대응관계에 있다.

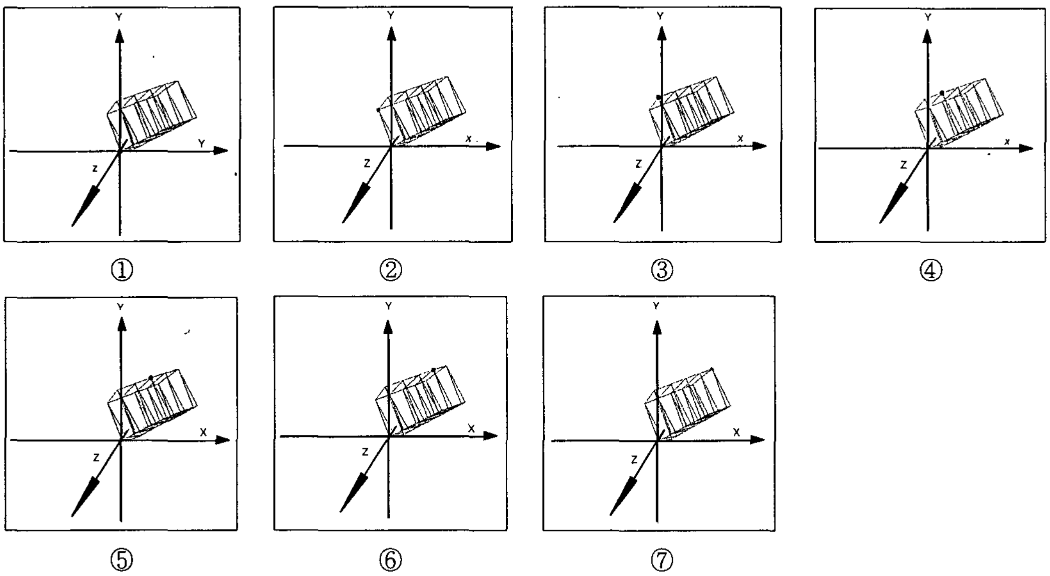
(증 명) 비기저에 있는 여유변수의 수가 속박 제약식들을 나타낸다. 단체법에서 보면, 비기저에 있는 여유변수의 수는 변하지 않으면서 기저가 변하는 경우가 있는데, 이 경우는 같은 제약식 상에서 정점이 이동하는 것으로 볼 수 있다. 또한 이 속박 제약식들에 해당하는 여유변수 s_i와 s_j의 값은 0이 됨을 알 수 있다. 따라서, 정점이 바뀔 때마다, 이 정점에 해당하는 속박 제약식들이 바뀌게 되고, 이에 따라서 비기저에 존재하는 여유변수들도 달라지게 된다. 그러므로, 속박 제약식들과 이에 따른 기저들은 1 : 1의 대응관계에 있음을 알 수 있다.

위의 정리에 의하여 두 정점이 주어졌을 때, 공통적인 속박 제약식의 수가 $n-1$개이면 이 정점들은 서로 이웃한다는 사실을 알 수 있다. 따라서, 퇴화가 일어난 경우에도 공통적인 속박 제약식의 수만 파악하면 이웃정점의 관계를 파악할 수 있다. 위의 내용을 이용한 정점간의 이웃관계 판별 방법은 다음과 같다.

단계1 매타이스법을 이용하여 모든 정점을 구한다.
단계2 구해진 각각의 정점에 대해서 속박 제약식들을 구한다.
단계3 모든 정점들간의 쌍에 대하여 속박 제약식들의 차이가 1개인 정점의 쌍들을 구한다.
단계4 '단계3'에서 구해진 정점들의 쌍을 출력한다.

4. 시각화 예

선형계획법 문제의 그래픽 표현에 대한 예를 해

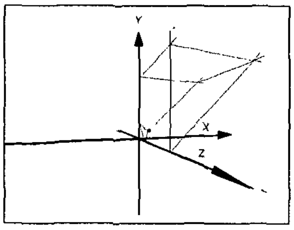


〈그림 4〉 (예제 1)에 대한 결과

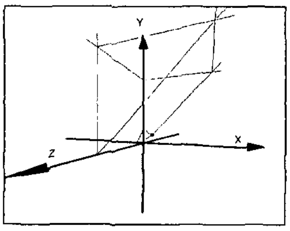
의 이동 및 가능영역이 무한영역인 경우로 나누어 살펴본다. 해의 이동에 관한 그래픽 표현을 위해 다음의 (예제 1)을 본 논문을 위해 구현된 프로그램을 통해 나타내보면 <그림 4>와 같다.

$$\begin{array}{ll} max & 10x_1+10x_2+10x_3+10x_4+10x_5+10x_6+10x_7 \\ s.t & x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad +3x_5 \quad \le 10 \\ & \quad 0 \le x_i \le 10, \forall i \end{array}$$

위의 문제를 수정단체법을 사용하여 풀면, 7번의 선회연산만에 최적해를 구하게 된다. 선회연산과정에서 얻어지는 해는 정점의 이동을 나타내는데, 이의 표현을 위해, 컴퓨터 화면상에서는 흰색의 구를 사용하여 매 선회연산마다 가능영역의 정점을 움직이도록 표현하였다. 최적정점에서는 빨간색의 구를 사용하여 최적정점임을 나타내었다.



①



②

〈그림 5〉 (예제 2)에 대한 결과

다음으로 무한영역을 갖는 문제의 그래픽 표현을 살펴본다. 다음의 (예제 2)는 가능영역이 무한영역이며 최적해가 존재하는 문제이다.

위의 <그림 5>는 최적해에 도달한 상태이며, 주어진 문제가 무한영역임을 나타내기 위해 가능영역을 이루는 다면체의 꼭지점 부분을 더 확장시켜 주었음을 알 수 있다. <그림 5>의 왼쪽 그림과 오른쪽 그림은 같은 결과를 방향을 달리해서 본 그림이다.

$$\begin{array}{llllll} min & -x_1 & +4x_2 & +2x_3 & & \\ s.t & x_1 & & & \ge 0 & \\ & & x_2 & & \ge 0 & \text{(예제 2)} \\ & & & x_3 & \ge 0 & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \ge 4 & \\ & x_1 & -x_2 & & \le 0 & \end{array}$$

5. 결 론

본 연구에서는 선형계획법의 해의 이동에 관한 시각화 방법을 살펴보았다. 이를 위해 고차원에서의 정보표현을 나타내는 방식과 가능영역의 표현을 위한 방법을 연구하였다. 고차원에서의 표현방식으로서 저차원으로의 투영을 통한 방법을 연구하였으며 원래의 가능영역의 정보의 손실을 줄이는 방법을 연구하였다. 가능영역의 표현에 있어서는 정점들 사이의 이웃관계 판별을 위해 속박적 제약식의 수를 이용하는 방법을 연구하였다. 이 방법에 의해 퇴화가 일어난 경우에 있어서도 이웃정점을 판별할 수 있었으며, 단체법에서 매 회 나오는 해의 개선을 표현하기 위해 해가 가능영역의 정점들 사이를 이동하는 모습 및 무한영역을 갖는 문제의 시각화 방법을 알아보고 실제로 나타내어 보았다.

선형계획법의 시각화 방법에 대한 연구를 통하여 선형계획법에 대한 이해를 쉽고 구체적으로 할 수 있고, 선형계획법의 교육에 있어서도 활용이 가능할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 「선형계획법(제4판)」, 민영사, 1999.
[2] 박순달, 「경영과학(제3판)」, 민영사, 1998.
[3] 김우제, 박순달, "투영법에 의한 선형계획문제의 시각적 표현에 관하여", 한국경영과학회지, 제18권 제3호, 1993, pp.101-111.
[4] Chatterjee A., P.P., DAS. S., Bhattacharya

"Visualization in Linear Programming Using Parallel Coordinates," Pattern Recognition Society, Vol.26, (1993), pp.1725-1736.

[5] Bazaraa J., Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2nd Edition, Wiley, 1990.

[6] Christopher V.J, *Visualization and Optimization*, Kluwer Academic Publisher, 1997.

[7] Gilbert S., *Linear Algebra*, third edition, Harcourt Brace & Company International Edition, 1988.

[8] Balinski M.L., "An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets," SIAM J. on Appl. Math., Vol.9, No.1(1961), pp.72-88.

[9] Mason W., N, Jackie, D., Tom, *OpenGL Programming Guide*, Second Edition, Addison Wesley, 1997.

[10] Richard S, J., S., Wright Michael *OpenGL superbible : The complete guide to OpenGL programming for Windows NT and Windows 95*, Waite Group Press, 1996.

[11] Matteiss T.H., "An Algorithm for Determining Irrelevant Constraint and All Vertices in Systems of Linear Inequalities," Operations Research, Vol.21, No.1(1973) pp. 247-261.

[12] Freeman W.H., Beyond the Third Dimension : Geometry, Computer Graphics and Higher Dimensions, New York, 1990.