

3차원 판구조물 해석을 위한 삼각형요소와 사각형 요소의 비교에 관한 연구

왕 지 석* · 김 윤 해* · 이 우 수**

A Study on the Comparison of Triangular and Quadrilateral Elements for the Analysis of 3 Dimensional Plate Structures

J-S Wang · Y-H Kim · W-S Lee

Key words : Deflection Models(처짐 모델), Plate Structures(판 구조물), In - Plane Loads(판 내 하중), Bending Loads(굽힘 하중), Natural Coordinates System(특성 좌표계), Element Stiffness Matrix(요소의 강성행렬)

Abstract

In the analysis of the 3 dimensional plate structures by the finite element method, the triangular elements are generally used for the global stiffness matrix of the analyzed system. But the triangular elements of the plates have some problems in the process of formulation and in the precision of analysis.

The formulation of the finite element method to analyze 3 dimensional plate structures using quadrilateral elements is presented in this paper. The degree of freedom of a nodal point is 6, that is, the displacements in the direction of x-y-z axis and the rotations about x-y-z axis and then the degree of freedom of a element is 24.

For the comparison of the analysis using triangular elements and quadrilateral elements, the rectangular plates subjected to the uniform load and a concentrated load on the centroid of the plate, for which the theoretical solutions have been obtained, are analyzed. The calculated deflections of the rectangular plates using the finite element method by the triangular elements and the quadrilateral elements are also compared with the deflections of the plates calculated by theoretical solutions. The deflections of the rectangular plates calculated by the finite element method using the quadrilateral elements are closer to the theoretical solutions than the deflections calculated by the finite element method using the triangular elements.

The deflection of the centroid of plate, calculated by the finite element method, converges to that of theoretical solution as the number of elements is increased. This convergence is much more rapid for the case of using the quadrilateral elements than for the case of using triangular elements.

* 한국해양대학교, 기계공학부
* 한국해양대학교, 기계소재공학부
** 벽성대학

1. 서 론

3차원 공간의 판 구조물은 기계장치의 기초대를 비롯하여, 조선, 건설 등의 분야에서 널리 쓰이는 구조물로서 이들의 강도와 강성 및 변위를 비롯한 역학적인 거동을 파악하는 일은 이들을 설계하는데 꼭 필요하다. 특히 선박의 주추진기관용으로 탑재되는 내연기관 기초대(engine bed)의 강도와 강성을 정확히 파악하는 것은 기관의 진동을 분석하는데 꼭 필요할 뿐만 아니라 기관의 진동이 선체로 전달되어 나아가는 기구를 규명하고 이를 저감시키려는 대책을 수립하는데도 필요하다. 일반적으로 판 구조물을 해석하는 데는 유한요소법이 주로 쓰이고 있는데 이 해석에서는 삼각형 요소를 사용하는 것이 대부분이다.

삼각형 요소를 사용하여 3차원 공간의 판 구조물을 유한요소법으로 해석하다보면 어떻게 요소로 분할하였느냐에 따라 그 해석 결과가 조금씩 차가 나는 것을 볼 수가 있다. 유한요소법이 원래 근사적인 해석방법이므로 요소의 수에 따라 달라지는 오차가 있지만 같은 수의 요소라도 어떻게 분할하였느냐에 따라 오차의 정도와 모양이 달라질 뿐만 아니라 똑 같은 수와 모양으로 분할하여도 절점의 번호 매김(numbering) 순서에 따라 서로 다른 오차가 달라진다. 특히 요소의 형상이 정삼각형이 아닐 때, 요소의 번호 매김 순서는 해석 오차가 민감하다는 것을 볼 수가 있다. 이것은 3차원 공간의 판 구조물을 유한요소법으로 해석할 때에 가장 중요하고 기초가 되는 처짐 모델이 다항식으로 되어 있는데, 각 항의 계수를 결정하는 과정에서 요소의 번호 매김 순서에 따라 계수가 달라지는 것으로도 짐작할 수가 있다. 뿐만 아니라 삼각형 요소의 모양에 따라서는 처짐 모델의 다항식 계수를 구하는 과정에서 특이한(singular) 정방행렬이 나오므로 이를 회피하기 위하여 절점의 위치를 일정 거리 옮겨야 하는 번거로움이 있다.1) 이에 비하여 사각형 요소를 쓰면 해석 오차가 번호 매김 순서에는 거의 영향을 받지 않고 요소의 수에만 관계한다는 사실을 알 수가 있고 처짐 모델의 다항식 계수를 구하는 과정에서 특이한 정방행렬이 나오는 일도 없다.

본 연구에서는 3차원 공간에 있는 판 구조물의

유한요소법에 의한 해석을 목적으로 지금까지 주로 쓰여왔던 삼각형 요소의 문제점을 보완하기 위하여 사각형 요소에 의한 유한요소법 해석을 개발하였고, 삼각형 요소에 의한 해석과 사각형 요소에 의한 해석의 결과를 비교하였다. 비교를 위한 해석의 대상은 이론 해가 나와 있는 정사각형 판으로 4변이 단순 지지되어 균일 분포 하중을 받는 경우와 도심점에 집중하중을 받는 경우의 두 가지를 해석하여 이론 해와 각각 비교하였다. 삼각형 요소로 해석한 경우와 사각형 요소로 해석한 경우에 있어서 절점수가 같도록 함으로서 강성행렬의 차수(order)가 같도록 하여 비교하였다. 각 요소에 의하여 해석한 처짐 곡선을 이론해와 비교하였고, 요소수와 절점수를 증가시켜가면서 유한요소법에 의한 해석이 이론해에 수렴해 가는 모양을 비교하였다.

2. 사각형 요소의 정식화

삼각형 요소를 사용하여 3차원 판 구조물을 해석하는 정식화 과정은 여타의 문헌에 다수 제시되어 있으므로 여기서는 사각형 요소를 사용하여 3차원 공간의 판 구조물을 해석하는 정식화 과정을 유도하여 제시한다.

잘 알려진 바와 같이 평판에 작용하는 하중은 판내하중(in-plane load)과 굽힘하중(bending load)이 있다. 판내하중은 하중작용선이 평판 내에 있고 따라서 평판에 막응력(membrane stress)을 유발한다. 굽힘하중에는 평판에 작용하는 횡하중과 굽힘모우멘트 및 비틀림모우멘트(twisting moment)가 있으며 평판에 굽힘응력과 전단응력을 유발한다.

만약 평판이 판내하중만을 받을 때는 판의 변형은 평판 내에서만 일어나고 횡처짐은 없다. 즉 판내하중만을 받는 경우 평판의 중립면에 있는 임의점의 변위는 평판의 중립면내에서만 발생한다. 또한 평판이 굽힘하중만을 받을 때는 평판의 중립면에 있는 임의점은 횡처짐만 있고 판내 변위는 없다. 이와 같이 판내하중에 의한 평판의 거동과 굽힘하중에 의한 평판의 거동이 각각 독립적으로 일어나기 때문에 요소의 강성행렬도 각각 독립적으로 구하여 조립하면 된다.

판내하중에 의한 사각형 요소의 유한요소 정식화는 2차원 평판 해석에서 자세히 나오는 사항이므로 "여기서는 그 결과만을 이용하고 굽힘하중에 의한 사각형요소의 유한요소 정식화 과정을 유도한다.

2.1 요소의 강성행렬

Fig.1에 나타낸 바와 같이 사각형요소 1-2-3-4에서 요소의 국소좌표계 (local coordinates system) x-y-z를 그림과 같이 잡고 절점 번호순을 -z 면에서 볼 때 반시계방향이 되도록 정한다. 또한 특성좌표계(natural coordinates system) s-t를 그림과 같이 잡는데, x-y 평면과 s-t 평면이 같은 평면이 되고 오른손 법칙에 따르는 s-t 수직방향이 z방향과 일치하도록 한다

각 절점의 x-y좌표를 그림에 표시된 바와 같이 (x₁,y₁), (x₂,y₂), (x₃,y₃), (x₄,y₄)라 하고, 각 절점의 자유도는 횡처짐(z방향의 변위), x축 둘레의 각변위, y축 둘레의 각변위 도합 3이므로 요소의 자유도는 12가 된다.

지금 각 절점의 자유도를 횡처짐(z방향의 변위), x축 둘레의 각변위, y축 둘레의 각변위 순으로 하여 각각 q₁, q₂, q₃, ... q₁₂ 라 한다. 즉 절점 1의 횡처짐(z방향의 변위)은 q₁ 이고 x축 둘레의 각변위는 q₂ 이며 y축 둘레의 각변위는 q₃ 이다. 절점 2의 그것들은 각각 q₄, q₅, q₆ 이고 절점 3과 절점 4도 같은 순서와 요령으로 정한다. 요소의 자유도가 12이므로 처짐모델 w를 12개의 상수가 들어 가도록 다음과 같은 다항식으로 정한다.⁵⁾

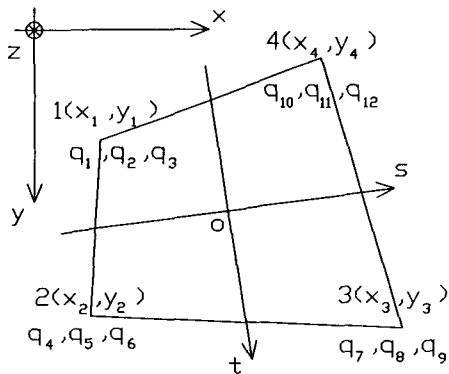


Fig.1 Quadrilateral element of plate

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3 \quad (1)$$

x축 둘레의 각변위 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 는 다음과 같이 되고

$$\frac{\partial w}{\partial y} = a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + 2a_9xy + 3a_{10}y^2 + a_{11}x^3 + 3a_{12}xy^2 \quad (2)$$

y축 둘레의 각변위 $-\frac{\partial w}{\partial x}$ 는 다음과 같이 된다.

$$-\frac{\partial w}{\partial x} = -a_2 - 2a_4x - a_5y - 3a_8x^2 - 2a_9xy - a_6y^2 - 3a_{11}x^2y - a_{12}y^3 \quad (3)$$

각 절점에서의 이들 값들을 알고 있고 있기 때문에 이들을 윗식 (1), (2), (3)에 각각 대입하면 처짐 모델 w의 상수 a₁, a₂, a₃, a₄ ... a₁₂ 를 구할 수 있다.

$$\text{즉 } x=x_1, y=y_1 \text{ 일 때 } w=q_1, \frac{\partial w}{\partial y}=q_2, -\frac{\partial w}{\partial x}=q_3$$

가 되므로 절점 1에서 3개의 방정식을 얻을 수 있고 여타의 각 절점에서도 3개씩의 방정식을 얻으므로 도합 12개의 방정식을 얻는다.

이들을 행렬 형태로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$[\eta] \{a\} = \{q\} \quad (4)$$

$$\{a\} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ \dots \ a_{12}]^T$$

여기서

$$\{q\} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \dots \ q_{12}]^T$$

$$[\eta] = \begin{bmatrix} [\eta] \\ [\eta] \\ [\eta] \\ [\eta] \end{bmatrix}$$

$$[\eta_i] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i \\ x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 & & & & \end{bmatrix}$$

$$[\eta_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & 0 & x_i^2 \\ 2x_i y_i & 3y_i^2 & x_i^3 & 3x_i y_i^2 & & & & \end{bmatrix}$$

$$[\eta_i] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2x_i & -y_i & 0 & -3x_i^2 - 2x_i \\ y_i & -y_i^2 & 0 & -3x_i^2 y_i & -y_i^3 & & & \end{bmatrix}$$

단, $i=1, 2, 3, 4$

식 (4)로부터 $\{a\}$ 를 구하면

$$\{a\}=[\eta]^{-1}\{q\} \quad (5)$$

가 되며 이 식으로부터 $\{a\}$ 를 구하여 식 (1)에 대입하므로써 처짐모델 w 를 구할 수 있다.

$$w=[\xi]\{a\}=[\xi][\eta]^{-1}\{q\} \quad (6)$$

단, $[\xi]=[1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3]$
 한편 굽힘하중을 받는 평판의 변형을 성분 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ 는 다음과 같으므로²⁾

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad r_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

여기서, 식 (6)의 처짐모델 w 를 대입하면 요소의 변형을 성분 $\{\varepsilon\}$ 을 구할 수 있다.

$$\{\varepsilon\}=[B]\{q\} \quad (8)$$

여기서 $\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ r_{xy} \end{bmatrix}, [B] = -z[B_{xy}][\eta]^{-1},$

$$[B_{xy}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

일반적으로 요소의 강성행렬 $[k]$ 는 다음과 같이 표시된다.

$$[k] = \int_V [B]^T [C][B]dV \quad (9)$$

굽힘하중을 받는 평판의 경우 평면응력(plane stress) 상태가 되므로 재료 강성행렬 $[C]$ 는 다음과 같다.

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 E 는 재료의 Young 계수이고 ν 는 Poisson 비이다.

식 (8)의 $[B]$ 를 식 (9)에 대입하여 정리하면 굽힘

하중에 대한 사각형 평판 요소의 강성행렬 $[k_b]$ 를 구할 수 있다.

$$[k_b] = \frac{t^3}{12}([\eta]^{-1})^T \int_A [B_{xy}]^T [C][B_{xy}]dA[\eta]^{-1} \quad (11)$$

여기서, $\int_A \dots dA$ 는 사각형요소에 대한 면적분을 나타내는데이 면적분은 판내하중에 대한 강성행렬 구할 때와 마찬가지로 특성좌표계 $s-t$ 로 변수 변환하여 적분하면 된다. 즉,

$$\int_A [B_{xy}]^T [C][B_{xy}]dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{xy}]^T [C][B_{xy}] \det[J]dsdt \quad (12)$$

이 되는데 이 식의 $[B_{xy}]$ 는 식 (8)의 설명에서 보는 바와 같이 행렬의 각 요소가 변수 x,y 의 함수로 되어있다.

따라서, 식 (12)의 우변을 적분하려면 이 변수 x,y 를 특성좌표계의 변수 s,t 로 바꾸어 주어야 하는데, 사각형요소의 특성좌표계에서 그 관계는 다음과 같다.³⁾

$$\begin{aligned} x &= N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \\ y &= N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-s)(1-t)/4 \\ N_2 &= (1-s)(1+t)/4 \\ N_3 &= (1+s)(1+t)/4 \\ N_4 &= (1+s)(1-t)/4 \end{aligned}$$

또한 $\det[J]$ 는 적분에서 변수 변환에 따르는 Jacobian matrix의 행렬식 값으로 다음과 같이 계산된다.

$$\det[J] = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (14)$$

식 (13)으로부터 식 (14)의 각 항을 계산하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial x}{\partial s} = (1-t)(x_4 - x_1)/4 + (1+t)(x_3 - x_2)/4$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (1-s)(y_2 - y_1)/4 + (1+s)(y_3 - y_4)/4$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (1-s)(x_2 - x_1)/4 + (1+s)(x_3 - x_4)/4$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = (1-t)(y_4 - y_1)/4 + (1+t)(y_3 - y_2)/4$$

이렇게 되면 식 (12)의 우변에서 피적분 함수는 모두 s, t 의 함수가 되고 적분이 가능해진다. 이 적분은 Gauss 적분법을 이용하는 것이 가장 알맞으며 이 적분법에 관하여는 여러 문헌에 다수 주어져 있다.

식 (11)로 주어진 사각형요소의 강성행렬은 굽힘하중에 대한 강성행렬이고 판내 하중에 대한 강성행렬을 구하여 이것과 조립하는 것은 삼각형 요소의 경우와 같은 요령으로 하면 된다. 또한 위에서 구한 강성행렬은 국소 좌표계에서 구한 강성행렬이므로 이를 변환행렬을 사용하여 중앙 좌표계의 값으로 환산하여 조립하는 과정은 삼각형 요소의 경우와 동일한 요령으로 하면 된다.¹⁾

2.2 열변형율에 의한 굽힘하중

평판의 양면에 온도차가 있으면 굽힘 변형이 일어나고 따라서, 굽힘하중에 열변형율에 의한 굽힘하중을 더하여 주어야 한다.

지금 Fig.2와 같이 평판의 중립면을 국소좌표계 $x-y$ ~평면이라 하고 오른손 법칙에 따라서 z 좌표를 정하면 $+z$ 면이 전면(front surface)이고 $-z$ 면

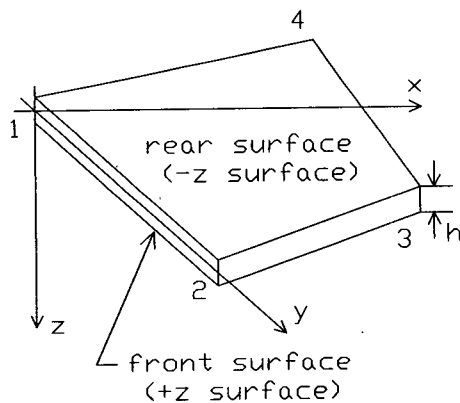


Fig.2 Coordinates system of a quadrilateral plate element

이 후면(rear surface)이 된다. 사각형 요소의 평균 온도를 \bar{T} , 양면의 온도차 (전면온도 - 후면온도)를 T_0 라 하면 중립면으로부터 좌표 z 인 점의 온도 T 는

$$T = \bar{T} + \frac{T_0}{h} z \tag{15}$$

가 되는데, 여기서 h 는 평판의 두께이다. 소성변형율이나 열변형율과 같은 고유변형율 (inherent strain)에 의한 절점력 환산은 다음과 같이 된다.

$$\{F_{ib}\} = \int_V [B]^T [C] \{\epsilon_0\} dV \tag{16}$$

여기서 $\{\epsilon_0\}$ 는 고유 변형율을 나타낸다. 고유 변형율에 열변형율만 있을 경우에는

$$\{\epsilon_0\} = \begin{bmatrix} aT \\ aT \\ 0 \end{bmatrix} = aT \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \left(\bar{T} + \frac{T_0}{h} z \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

이 되는데 여기서 a 는 재료의 열팽창계수이다 식 (8)의 설명에서 보는 바와 같이 $[B] = -z[B_{xy}]$ 이므로 이것과 식 (17)을 식 (16)에 대입하여 정리하면

$$\{F_{ib}\} = -\frac{aT_0 h^2}{12} ([\eta]^T)^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{xy}]^T \det[J] ds dt \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

이 된다. 여기서도 적분은 대표점의 함수값과 가중치를 곱하여 합산하는 Gauss 적분법을 이용하면 적분오차도 작고 쉽게 적분할 수 있다. 이 식에서 보는 바와 같이 요소의 평균온도 \bar{T} 는 열변형율에 의한 굽힘하중에 전혀 영향을 주지 않고 양면의 온도차 T_0 ~만 영향은 준다.

2.3 압력에 의한 굽힘하중

평판에 수직으로 압력이 작용하면 판에 휨처짐이 생기고 압력이 굽힘 하중으로 작용한다. 그러므로 압력을 절점력으로 환산해 주어야 하는데, 사각형 요소의 경우에도 삼각형 요소의 경우와 같은 요령으로 환산해 주면 된다.

즉 직접법에 의한 유한요소 정식화 과정에서 가

상일의 원리(principle of virtual work)를 이용하는데 압력에 의한 가상일 항(term)을 하나 더 넣으면 된다.

식 (6)을 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$w = [\xi][\eta]^{-1} \{q\} = \{q\}^T ([\eta]^{-1})^T [\xi]^T \quad (19)$$

지금 압력을 p 라 하고 가상변위를 δw 라 하면 압력이 한 가상일은 $\int_A \delta w p dA$ 가 되는데 식 (19)로부터

$$\delta w = \{\delta q\}^T ([\eta]^{-1})^T [\xi]^T \quad (20)$$

이므로 압력이 한 가상일은 다음과 같이 된다.

$$\int_A \delta w p dA = \{\delta q\}^T ([\eta]^{-1})^T \int_A [\xi]^T p dA$$

따라서, 압력에 의한 굽힘 하중은

$$\{F_{pb}\} = p([\eta]^{-1})^T \int_A [\xi]^T dA = p([\eta]^{-1})^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\xi]^T \det[J] ds dt \quad (21)$$

이 식의 적분도 Gauss적분법으로 수행할 수 있다. 여기서 주의할 점은 압력은 사각형 요소에서 균일하게 작용하므로 사각형의 면적에다 압력을 곱한 값을 4등분하여 이를 판에 수직하게 작용하는 하나의 절점력으로 생각하면 될 것 같으나 식 (21)에 의한 계산 결과는 전혀 다르다는 것이다. 이 점 삼각형 요소의 경우도 마찬가지이다.

3. 해석결과와 비교 및 고찰

삼각형 요소와 사각형 요소에 의한 판 구조물의 해석결과를 비교하기 위하여 이론해가 나와 있는 경우를 예로 들어 각 요소에 의한 해석 결과와 이

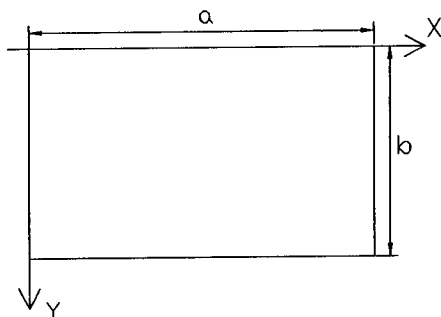


Fig.3 Rectangular plate and global coordinates system

론해와 비교하여 보려고 한다. 해석대상은 단순 지지된 직사각형 판으로 Fig.3과 같이 가로의 길이가 a 이고 세로의 길이가 b 인 직사각형에 대하여 그림과 같이 좌표계를 잡을 때, 균일 분포하중 q_0 에 의한 처짐 w 의 이론해는 다음과 같이 된다.²⁾

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi X}{a} \sin \frac{n\pi Y}{b}}{mn(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} \quad (22)$$

여기서 $m=1,3,5,7,\dots, n=1,3,5,7,\dots$ 이고 D

는 판의 굽힘 강성계수로 $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 이다.

또한 직사각형의 도심(Centroid)에서 작용하는 집중하중 P 에 의한 처짐 w 의 이론해는 다음과 같다.²⁾

$$w = \frac{4p}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+3/2} (-1)^{n+3/2}}{(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2})^2} \sin \frac{m\pi X}{a} \sin \frac{n\pi X}{b} \quad (23)$$

여기서도 $m=1,3,5,7,\dots, n=1,3,5,7,\dots$ 이다.

본 연구에서 제시한 해석 예는 Fig.4에 표시한 바와 같이 일변이 $2m$ 인 정사각형으로 $0.015MPa$

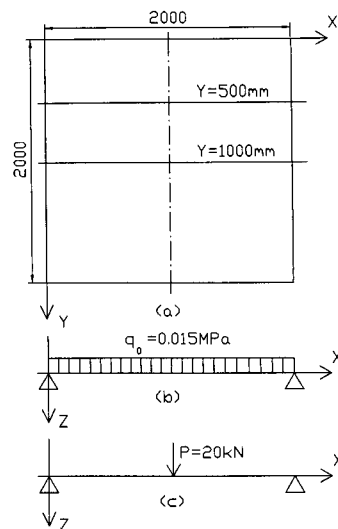


Fig.4 The analyzed square plate

Table 1 Materials Constants and Dimensions

Items	Symbols	Units	Values
Young's modulus	E	GPa	200
Poisson's ratio	ν		0.3
Thickness	h	mm	10
Width	a	mm	2000
Length	b	mm	2000
Uniform load	q_0	MPa	0.015
Concentrated load	P	kN	20

의 균일 분포하중을 받는 경우와 도심에 20kN의 집중하중을 받는 경우의 두 가지에 대하여 유한요소법으로 해석한 결과와 이론해와 비교하였다. 계산에 사용된 재료 물성치와 치수는 Table 1과 같고 좌표계는 Fig.4에 표시된 바와 같으며 $Y=500\text{mm}$ 와 $Y=1000\text{mm}$ 인 선에 대하여 처짐을 계산하여 비교하였다.

Fig.5는 유한요소 분할을 나타낸다. (a)는 삼각형 요소를 나타내고 (b)는 사각형 요소를 나타낸다. 양쪽 다 가로 세로를 각각 8등분하여 유한요소로 분할하였으므로 절점수는 양쪽이 같고 따라서 계의 자유도도 같은 조건으로 계산하여 비교하였다.⁴⁾

Fig.6은 정사각형 판이 0.015MPa의 균일 분포하중을 받을 때 $Y=500\text{mm}$ 와 $Y=1000\text{mm}$ 인 위치에서의 처짐을 삼각형 요소와 사각형 요소에 대하여 해석하고 이론해와 비교하여 나타내었다. 이 그림에서 보는 바와 같이 사각형 요소에 의한 해석이 전 구간에 걸쳐서 이론해에 가까우며 월등하게 정밀도가 좋다는 것을 알 수 있다. 문제의 성격상 처짐곡선은 좌우 대칭이 되어야 하는데, 삼각형 요소에 의한 해석의 경우 $Y=500\sim\text{mm}$ 에서 좌우 대칭이 안 되고 있는 것을 알 수가 있는데 이는 삼각형 요소의 특성상 요소분할을 대칭으로 하지 않은 데에

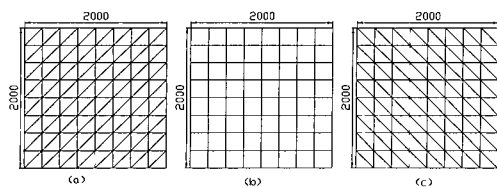


Fig.5 Divisions in triangular and quadrilateral elements

기인된 것이라고 보여진다. 삼각형 요소의 경우는 분할된 삼각형의 배열에 따라 해가 달라지는 것을 볼 수가 있었다. 즉 삼각형의 배열을 Fig.5 (c)와 같이 배열하면 $Y=500\text{mm}$ 에서 삼각형 요소에 의한 해가 좌우가 바뀌는 것을 볼 수가 있었다.

Fig.7은 정사각형 판의 도심점에 20kN의 집중하중이 작용할 때 $Y=500\text{mm}$ 와 $Y=1000\text{mm}$ 인 위치에서의 처짐을 삼각형 요소와 사각형 요소에 대하여 해석하고 이론해와 비교하여 나타내었다. 이 그림에서도 사각형 요소에 의한 해석이 전 구간에 걸쳐서 이론해에 더 가까우며 월등하게 정밀도가 좋다는 것을 알 수 있다. 이 경우도 문제의 성격상 처짐곡선은 좌우 대칭이 되어야 하는데, 삼각형 요

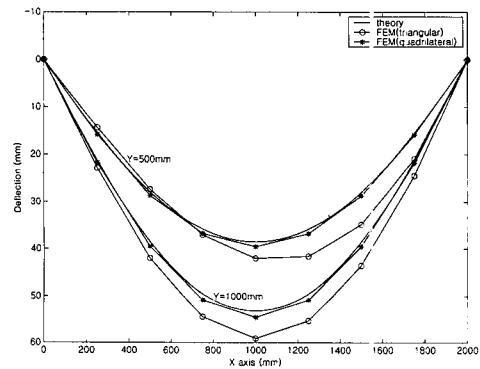


Fig.6 Comparison of theoretical solution and the finite element method(FEM) for the plate subjected to uniform load

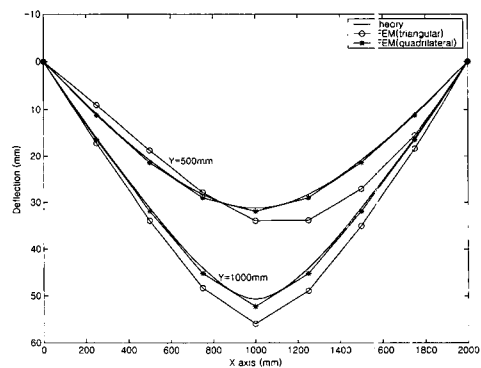


Fig.7 Comparison of theoretical solution and the finite element method(FEM) for the plate subjected to a concentrated load

소에 의한 해석의 경우 $Y=500\text{mm}$ 에서 좌우 대칭이 안 되고 있는 것을 볼 수가 있고 이 경우도 삼각형의 배열에 따라 좌우가 바뀌는 것을 확인하였다.

정사각형 판의 경우 좌우대칭이고 전후대칭이므로 전체의 1/4 만 해석하면 될 것이나 위에서는 컴퓨터의 용량이 충분하고 총체적인 계산의 정밀도를 비교검토하기 위하여 전체를 다 해석하였다. 하지만 계산의 정밀도를 높이기 위하여 분할된 요소의 수를 증가시키면 컴퓨터의 용량이 충분하지 못하게 되므로 부득이 전체의 1/4 만 해석하게 되는데 Fig.8은 그 예를 나타낸다.

요소의 수가 많으면 많을수록 유한요소법에 의한 해석이 이론해에 가까워지고 따라서 요소의 수가 증가해 가면 유한요소법에 의한 해석이 이론해에 수렴할 것이라는 것을 예상할 수가 있는데, 이와 같이 수렴해 가는 모양을 보기 위하여 판 전체

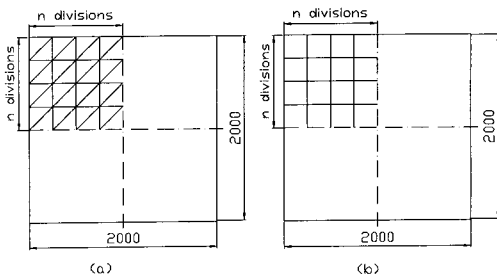


Fig.8 Number of divisions for a quarter of square plates

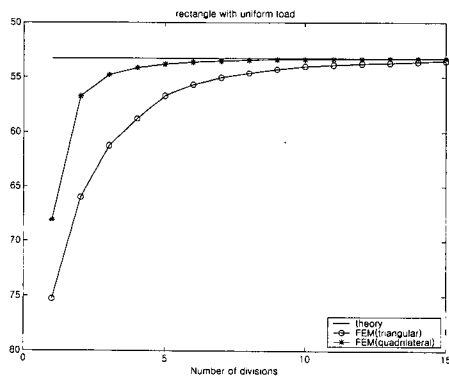


Fig. 9 Comparison of convergences for the plate subjected to uniform load

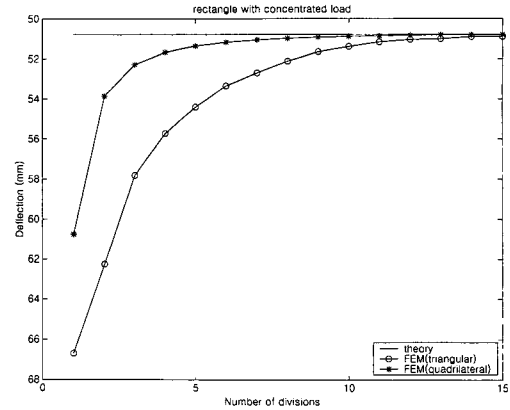


Fig. 10 Comparison of convergences for the plate subjected to a concentrated load

의 1/4 만 해석하고 그 1/4 의 가로와 세로를 Fig.8과 같이 같은 수로 등분하여 해석하였다.

Fig.9는 0.015MPa 의 균일 분포하중을 받는 정사각형 판의 도심점의 처짐이 요소수의 증가와 더불어 이론해에 수렴해 가는 모양을 나타낸다. 이 그림에서 가로축은 Fig.8에 보이는 정사각형의 1/4 을 가로와 세로를 같은 수로 등분하는데 그 등분수를 나타내고, 세로축은 정사각형 도심점의 처짐을 나타낸다. 등분수가 많아질수록, 즉 요소수가 많아질수록 유한요소법으로 계산한 도심점의 처짐이 이론해에 수렴하는 것을 볼 수가 있는데 사각형에 의한 해가 확실히 빨리 이론해에 수렴하고 있는 것을 볼 수가 있다.

Fig.10은 도심점에 20kN 의 집중하중이 작용할 때, 도심점의 처짐에 대하여 유한요소법으로 계산한 처짐값이 요소수의 증가와 더불어 이론해에 수렴해 가는 모양을 나타낸다. 여기서도 사각형에 의한 해가 훨씬 빨리 이론해에 수렴하는 것을 알 수가 있다.

4. 결 론

3차원 공간의 판 구조물에 대하여 유한요소법 해석을 위한 삼각형 요소와 사각형 요소의 특성을 비교하고 각각의 해석결과를 이론해와 비교하여 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 처짐에 관한 모델 w 를 국소좌표계 $x-y$ 를 이용하여

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

과 같이 잡음으로서 3차원 판 구조물의 유한요소법 해석을 위한 사각형요소의 정식화가 가능하다.

(2) 요소의 평균온도는 판의 굽힘에 전혀 영향을 미치지 못하고 양면의 온도차만 판의 굽힘에 영향을 미친다.

(3) 3차원 공간에 있는 판구조물의 해석에 관하여 사각형 요소에 의한 유한요소법 해석은 삼각형 요소에 의한 해석에 비하여 월등히 정밀도가 높다.

(4) 삼각형 요소에 의한 유한요소법 해석의 경우에는 요소 분할시 삼각형의 배열에 따라 해가 달라진다.

(5) 삼각형 요소의 모양에 따라서는 처짐모델의 다항식 계수를 구하는 과정에서 특이한 (singular) 정방행렬이 나오는 수가 있어, 이를 회피하기 위한 대책이 필요하나 사각형 요소에 의한 유한요소법 해석에서는 요소의 모양이 어떠한 특이한 정방행렬은 나오지 않는다.

(6) 유한요소법에 의한 해는 요소의 수를 증가시켜 가면 이론해에 수렴하는데 사각형 요소에 의한 유한요소해가 삼각형 요소에 의한 유한요소해보다 월등히 빨리 수렴한다.

이 논문은 2002년도 두뇌 한국 21사업에 의해 지원되었음.

참 고 문 헌

1) Singiresu S. Rao, The Finite Element Method in Engineering, 3rd edition, Butterworth

Heinemann, pp.104, 1999

2) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, pp.110, 1976
 3) M. I. Friswell, Finite element model updating in structural dynamics, Kluwer Academic Publishers, pp.9, 1995
 4) Michel Bernadou, Finite element methods for thin shell problems, Wiley, pp.133, 1996
 5) Klaus-J rgen Bathe, Finite Element Procedures, Prentice Hall, pp.206, 1996

저 자 소 개



왕지석(王之錫)

1946년 11월생. 1975년 한국해양대학교 기관학과 대학원 박용기관학과 졸업 석사. 1979년 남프대학교 박사. 현재 한국해양대학교 기계공학부 교수 1급 기관사.



김윤해(金允海)

1961년 6월생. 19일생. 1983년 한국해양대학교 기관공학과 졸업. 1987년 한국해양대학교 대학원 졸업(공학석사). 1990년 일본 도쿠시마대학 대학원 졸업(공학석사). 1993년 일본 큐슈대학 대학원 졸업(공학박사). 1993~현재 한국해양대학교 기계소재공학과 부교수. 1997~1998년 미국 국립표준연구소 초청 연구교수.



이우수(李叢洙)

1961년 2월생. 1983년 한국해양대학교 기관학과 졸업. 1987년 한국해양대학교 석사과정수료. '91~'95 국립공업기술원 공업연구원. 2000년 한국해양대학교 박사 과정중. 1995년~현재 벽성대학 교수