

비선형 Boussinesq방정식을 이용한 유로대수층 해석

정재성·김민환·방경미
순천대학교 토목환경공학부·호남대학교 토목환경공학과
(2001년 10월 6일 접수; 2002년 1월 12일 채택)

Analysis of stream-aquifer using nonlinear Boussinesq equation

Jae-Sung Jung, Min-Hwan Kim and Kyung-Mi Bang

School of Civil & Environmental Engineering, Sunchon National University, Sunchon 540-742, Korea
Dept. of Civil & Environmental Engineering, Honam University, Gwangju 502-791, Korea
(Manuscript received 6 October, 2001; accepted 12 January, 2002)

To investigate the flow characteristics by the water stage variation between stream-aquifer, the new solution of nonlinear Boussinesq equation was derived and extended using the Boltzmann transformation. The soundness of the analytic solution obtained from this study was examined by the comparison with the linearized analytic solution and the numerical solution by finite difference method. And the movement, velocity, flowrate and volume of flow caused by the stage variation of stream and the existence of regional gradient were estimated. This new analytic solution can express the groundwater movement between stream-aquifer. So, it might be helpful to manage water environment.

Key words : Aquifer flow, Boussinesq equation, Boltzmann transformation, Stream-aquifer

1. 서론

비피압 대수층과 인접한 하천에서의 수위변화는 지하수 흐름에 영향을 준다. 이러한 하천에서의 수위 변화에 따른 지하수 흐름특성을 파악하는 것은 수환경 관리측면에서 중요하기 때문에 수문학자들에게 많은 관심 대상이 되고 있으며, 하천과 하천주변 대수층 사이를 이동하는 지하수 흐름에 관해 많은 연구를 수행하여 왔다.

하천과 주변 대수층 사이를 움직이는 지하수 흐름의 연구를 위해 비선형 Boussinesq방정식이 이용되고 있다. 이 방정식은 비선형 포물선 편미분 방정식으로 특수한 경우에 해석해가 존재하며, 비선형 방정식이므로 선형화하여 해를 주로 구하였다. 많은 학자들에 의해 이 방정식에 대한 정확한 해를 구하려는 연구가 계속 되어 왔다.^{1~2)}

본 연구는 1차원 지하수 흐름에 관한 것이며, 하천과 대수층 사이의 수위변화에 따른 흐름 특성을 파악

하기 위해 비선형 Boussinesq방정식을 Boltzmann 변환을 이용하여 비선형 상미분 방정식으로 변환하였다. Guo¹⁾는 이와 유사한 방법을 제시하였으나 본 논문에서는 이 식을 토대로 새로운 해를 유도하여 확장하였다. 이 결과와 선형화된 해석해, 유한차분법에 의한 수치해와 비교하여 본 연구에서 얻어진 해석해의 타당성을 검토하였다. 그리고 하천에서 수위변화와 지역경사의 존재 유무에 따른 흐름의 거동, 유속, 유량, 체적 등을 평가하였다.

2. 지배방정식과 해석해

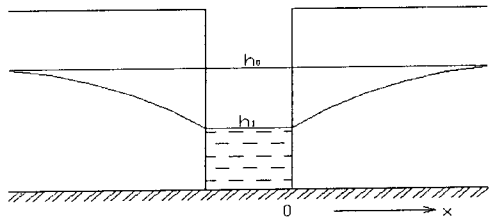
비선형 Boussinesq방정식은 Boussinesq가 1차원 흐름에 대한 해석해를 변수분리하여 제시하였다³⁾. 1차원 지하수 흐름에 대한 비선형 Boussinesq방정식은 식(1)과 같으며, 유로 대수층에 대한 개념도를 지역경사(ir) 존재유무에 따라 Fig. 1에 나타냈다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (1)$$

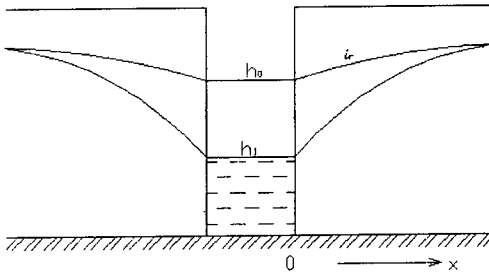
초기 조건과 경계 조건은 다음과 같다.

$$h(x, 0) = h_0 \quad (2)$$

Corresponding Author : Jae-Sung Jung, School of Civil & Environmental Engineering, Sunchon National University, Sunchon 540-742, Korea
Phone : +82-61-750-3510
E-mail : chjs@sunchon.sunchon.ac.kr



(a) Regional gradient $i_r = 0$



(b) Regional gradient $i_r \neq 0$

Fig. 1. Schematic of stream-aquifer.

$$h(0, t) = h_1 \quad (3)$$

$$h(\infty, t) = h_0 \quad (4)$$

여기서 h 는 대수층의 수두(L), h_1 는 하천에서 변화된 수위(L)이며, h_0 는 초기 수위이다(L). x 는 하천에서 떨어진 거리(L), t 는 시간(T), K 는 투수계수(LT⁻¹), S 는 저류계수이다.

식(1)을 새로운 변수 θ 와 $H = \frac{h}{h_0}$ 이라 놓고 재정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (5)$$

여기서, $\theta = \frac{K h_0 t}{S}$ 이다. 식(5)를 Boltzmann 변환⁴⁾을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\theta}} = \sqrt{\frac{x}{\frac{K}{S} h_0 t}} \quad (6)$$

$$\frac{dh}{d\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) = \frac{d}{d\eta} \left(H \frac{dh}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (7)$$

식(7)을 정리하여 다음과 같이 나타낼 수 있으며, 식(3)과 (4)의 경계 조건은 다음과 같다.

$$-\frac{\eta}{2} \frac{dH}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left(H \frac{dH}{d\eta} \right) \quad (8)$$

$x=0$ 일 때

$$\eta=0, H(\eta=0) = \frac{h_1}{h_0} \quad (9)$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때

$$\eta \rightarrow \infty, H(\eta \rightarrow \infty) = \frac{h_0}{h_0} = 1 \quad (10)$$

H 가 0과 같지 않다는 조건하에 식(8)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d \left[\ln \left(H \frac{dH}{d\eta} \right) \right] = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{H} d\eta \quad (11)$$

식(11)을 η 에 관해 두 번 적분하면 다음과 같다.

$$H^2 = 2A \int_0^\eta \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{\eta}{H} d\eta \right) \right] d\eta + B \quad (12)$$

여기서, A 와 B 는 적분상수이며, 이는 식(9)과 (10)을 이용하여 결정할 수 있다.

$$A = \frac{1 - H_0^2}{2 \int_0^\infty \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{\eta}{H} d\eta \right) \right] d\eta}$$

$$B = \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^2 \quad (13)$$

식(13)의 적분상수 A 와 B 를 식(12)에 대입하면 Boussinesq방정식에 대한 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$H^2 = H_0^2 + (1 - H_0^2) \frac{\int_0^\eta \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{\eta}{H} d\eta \right) \right] d\eta}{\int_0^\infty \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{\eta}{H} d\eta \right) \right] d\eta} \quad (14)$$

식(14)에서 마지막 항의 분자와 분모를 구하기 위하여 적분에 대하여 평균치 이론을 적용한다. 이때, H 가 η 에 대해 연속함수이므로 r ($0 < r \leq \eta$)에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\bar{H}(r)} \int_0^\eta x dx = \int_0^\eta \frac{x}{H(x)} dx \quad (15)$$

여기서, $\bar{H}(r)$ 는 식(14)의 적분에 대한 평균값이다. 이를 이용하면 식 (14)의 마지막 항에 대한 분자와 분모는 다음과 같다.

$$\int_0^\eta \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{\eta}{H} d\eta \right) \right] d\eta = \sqrt{\pi \bar{H}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\eta}{4\bar{H}}} \right) \quad (16)$$

$$\int_0^\infty \left[\exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\eta \frac{\eta}{H} d\eta \right) \right] d\eta = \sqrt{\pi \bar{H}} \quad (17)$$

여기서, $\operatorname{erf}(x)$ 는 오차함수(error function)이다. H 에 대한 최종해는 $H = \bar{H}$ 를 만족해야 한다. 이렇게 해서 얻어진 분자와 분모를 식(14)에 대입하면

다음과 같다.

$$H^2 = H_0^2 + (1 - H_0^2) \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{\sqrt{4H}}\right) \quad (18)$$

\tilde{H} 에 관해서 Newton-Raphson 방법을 적용하여 수두 ($\tilde{H} = \tilde{h}/h_0$) 분포를 파악할 수 있다. 즉, $H = \tilde{H}$ 가 되는 H 를 구하면 수두 h 를 알 수 있다. 식(18)을 변형하면 수두경사의 식으로 나타낼 수 있으며 이 식을 이용하여 유속, 유량, 체적의 평가가 가능하다. 식(18)을 이용하여 수두경사를 구한 후, 이를 유효공극율을 고려한 실제유속으로 나타내면 다음과 같다.

$$V_{act} = -\frac{K}{n_e} \frac{dh}{dx} = -\frac{FK}{n_e \sqrt{\tau h}} \left(2h + \frac{x\Gamma}{2h\sqrt{\tau h}}\right) \quad (19)$$

여기서, $\Gamma = (h_0^2 - h_1^2) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\eta^2 h_0}{4h}\right)$ 이다. 이렇게 얻어진 유속을 통해 유량과 체적을 구할 수 있다. 대수층의 임의 지점에서 단위 길이당 유출량은 다음과 같다.

$$q(x, t) = -\frac{hK}{n_e} \cdot \frac{\frac{\Gamma}{\sqrt{\tau h}}}{2h + x \frac{\Gamma}{2h\sqrt{\tau h}}} \quad (20)$$

하천변에서 즉, $x=0$ 일 때 $h=h_1$ 이므로 하천으로 유입되는 유량과 t 시간 동안에 하천으로 유입되는 양은 다음과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$q(0, t) = hV_{act} = -\frac{\sqrt{SK}}{2n_e \sqrt{h_1 \pi}} (h_0^2 - h_1^2) t^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

$$V_{in}(t) = \int_0^t q(0, t) dt = -\frac{\sqrt{SK}}{n_e \sqrt{h_1 \pi}} (h_0^2 - h_1^2) t^{\frac{3}{2}} \quad (22)$$

그리고 대수층에서 지역경사가 존재하는 경우 (Fig. 1(b))의 유량과 t 시간 동안의 유입량은 다음과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$q(0, t) = h(V_{act} + V_r) = -\frac{\sqrt{SK}}{2n_e \sqrt{h_1 \pi}} (h_0^2 - h_1^2) t^{\frac{1}{2}} - h_1 \frac{K}{n_e} i_r \quad (23)$$

$$V_{in}(t) = \int_0^t q(0, t) dt = -\frac{\sqrt{SK}}{n_e \sqrt{h_1 \pi}} (h_0^2 - h_1^2) t^{\frac{3}{2}} - h_1 \frac{K}{n_e} i_r t \quad (24)$$

이상과 같이 비선형 Boussinesq 방정식의 새로운 해를 유도하였다. 그리고 유도된 해를 이용하여 수두분포를 구할 수 있으며, 이를 토대로 실제유속, 유

량, 체적 등을 평가 할 수 있는 식을 유도하였다. 그리고 지역경사가 존재하는 경우에 대해서도 식을 유도하였다.

3. 적용예

앞 장에서 비선형 Boussinesq 방정식에 대한 해를 유도하여 여러 가지의 수리량을 평가하는 식을 제시하였다. 이렇게 유도된 해의 타당성 검토를 위해 선형화된 해석해와 수치해를 구하여 이를 비교하였다.

식(1)을 선형화하여 제시된 식과 해석해³⁾는 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S}{Kh} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (25)$$

$$h = h_1 + (h_0 - h_1) \operatorname{erf}(a) \quad (26)$$

여기서 $a = \sqrt{\frac{Sx^2}{4Kh}}$ 이다. 그리고, 유한차분법의 양해법에 의한 수치해는 다음과 같다⁶⁾.

$$v_i^{n+1} = v_i^n + \frac{\sqrt{v_i^n} K \Delta t}{S} \left(\frac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (27)$$

여기서 $v=h^2$ 이며, 식(27)을 이용하여 v 를 구한 다음, 이 값을 수위로 환산하기 위해 제곱근을 취해 수위 h 를 구한다.

Fig. 1과 같은 유로-대수층에 대한 해석을 위한 매개변수는 Table 1에 제시하였다.²⁾ 만무한 대수층에서 하천의 수위가 순간적으로 하강하는 경우에 시간에 대한 수두비를 각각 선형화된 해석해(식(26)), 유한차분법의 양해법에 의한 수치해(식(27)), 그리고 본 연구에서 제시한 해(식(18))를 비교하여 Fig. 2에 제시하였다. 그림에는 시간 $t = 100$ days 일 때 수두 값을 제시하였다. 각각의 수두 값이 거리에 따라 거의 비슷한 경향을 나타내고 있으며, 선형화된 해석해와 선형화된 수치해는 다소 차이를 보이고 있음을 알 수 있고, 그 사이에 본 연구에서 제시한 해의 값이 존재하고 있음을 알 수 있다. 이를 통해 본 논문에서 제시된 해의 타당성을 검증할 수 있다.

Table 1. Used parameters

| 매개변수 | 값 |
|---------------|-------------|
| K (투수계수) | 1.0 m/day |
| S (저류계수) | 0.1 |
| t (시간) | 1~1,000days |
| x (하천으로부터 거리) | 1~100 m |
| ir (지역경사) | 0.01 |
| ne (유효공극률) | 0.15 |

이와 같이 본 논문에서 제시한 해의 타당성에 근거하여 $x=0$ 인 지점에서 수위를 순간적으로 하강하였을 경우에 h/h_0 를 0.1~1.0 까지 변화시켰을 때 무차원변수 η 에 관해 Fig. 3에 도시하였다. 또한, Fig. 1(a)에서 하천의 수위가 $h_0=1.0\text{m}$ 에서 $h_1=0.5\text{m}$ 로 순간적으로 하강하였다고 가정하고, 이 때 거리에 대한 수두의 비를 1, 10, 100, 1000 days에 대하여 Fig. 4에 나타냈다. 여기서 시간이 증가함에 따라 대수층에서 수두변화가 작아짐을 볼 수 있는데 이는 시간에 따라 대수층에서의 수두경사가 감소하기 때문임을 알 수 있다. 그리고 거리에 따른 유속의 변화도 고찰하였다. 각각의 시간에 따른 유속 분포는 Fig. 5에 제시하였다.

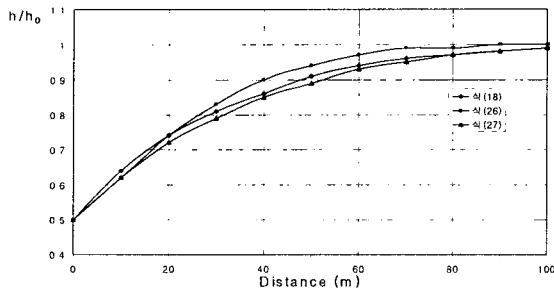


Fig. 2. Ratio of head by Eq.(18), (26), and (27) at $t = 100$ days.

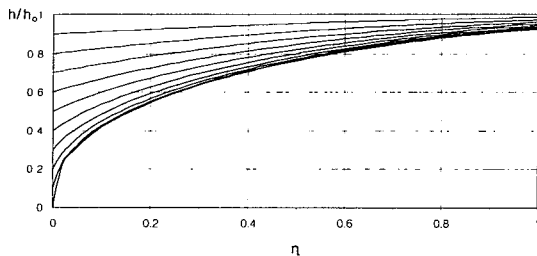


Fig. 3. h/h_0 versus dimensionless parameter.

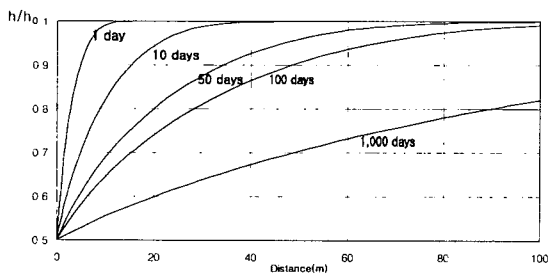


Fig. 4. h/h_0 versus distance with time.

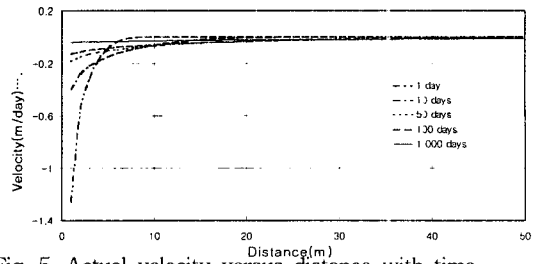


Fig. 5. Actual velocity versus distance with time.

대수층에서 지역경사가 존재하는 경우와 지역경사가 존재하지 않은 경우의 유량을 Fig. 6에 제시하였다. 이 경우는 $x = 0$ 인 지점에서 수위가 하강하는 경우로서 지역경사의 영향을 받아 지역경사가 존재하는 경우의 유량이 지역경사가 존재하지 않을 경우 보다 유량이 많음을 알 수 있으며, 지하수의 흐름이 대수층에서 하천으로 유출됨을 볼 수 있다. 이 때 시간에 대한 유량을 체적으로 변환하여 Fig. 7에 제시하였다.

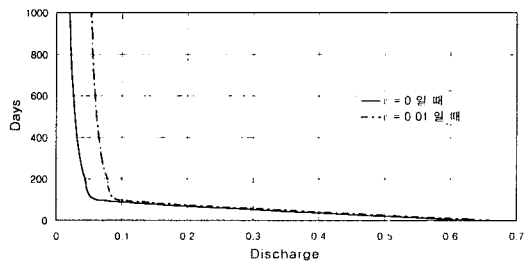


Fig. 6. Time versus discharge with/without regional gradient

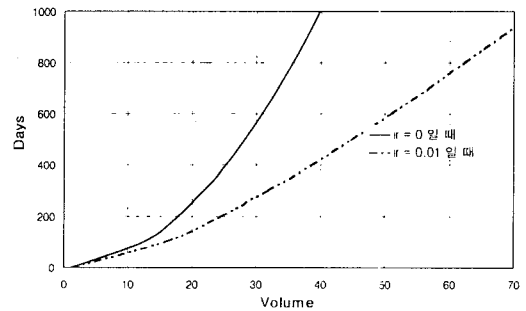


Fig. 7. Time versus volume flowrate with/without regional gradient.

이상과 같이 하천 수위변화가 주변 대수층의 지하수 흐름에 미치는 수리 특성에 관하여 고찰하였다. 이는 강우의 불균형으로 인하여 수자원 관리가 중요한 상황에서 특히 갈수기의 수자원 관리를 위한 선행 과제로서 유용하리라 판단된다.

4. 결 론

지금까지는 비피압 대수층의 비정상 상태 흐름을 파악하기 위해 비선형 Boussinesq 방정식을 선형화하여 구한 해석해가 이용되어 왔다. 본 연구는 비선형 Boussinesq 방정식의 비선형 요소를 고려하여 Boussinesq 방정식에 대한 해를 유도하였다. 그리고 본 연구의 해에 대한 타당성을 검증하기 위해 비선형 Boussinesq 방정식을 선형화하여 구한 해석해와 이 선형화된 Boussinesq 방정식을 유한차분법의 양해법을 이용하여 구한 수치해와 비교해 보았다. 그 결과 본 연구의 해석해와 기존의 해들이 비슷한 경향을 나타내고 있음을 알 수 있었다. 이렇게 유도된 해를 토대로 지하수 흐름의 거동인 유속을 평가하였고 이에 대한 유량, 체적 등을 평가하였다. 또한 지역경사가 존재하는 경우에 대해서도 해를 유도하였으며 시간에 따른 유량과 체적에 대해서 제시하였다. 이와 같이 유도된 새로운 해석해는 하천과 대수층 사이의 지하수 거동을 보다 정확하게 나타낼 수 있기 때문에 수환경의 관리에 도움이 될 것으로 기대된다.

참고문헌

- 1) Govindaraju, R. S. and J. K. Koelliker, 1994, Applicability of linearized Boussinesq equation for modeling bank store under uncertain aquifer paramete, *Journal of Hydrology*, 157, 349-366.
- 2) Weixing G., 1997, Transient groundwater flow between reservoirs and water-table aquifers, *Journal of Hydrology*, 195, 370-384.
- 3) Bear, J., 1972, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Elsevier Science, New York.
- 4) Ames, W. F., 1965, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press, New York.
- 5) Wills, R. and W. W. G. Yeh, 1987, *Groundwater Systems Planning and Management*. Prentice-Hall, Inc.
- 6) 이재형, 김민환, 1995, 지하수 모형, 서울 : 새론출판사.