# 시간적분형 운동방정식을 바탕으로 한 동적 응력확대계수의 계산

심 우 진† · 이 성 희*

(2001년 10월 4일 접수, 2002년 2월 27일 심사완료)

# Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors Based on the Equations of Motion in Convolution Integral

Woo-Jin Sim and Sung-Hee Lee

**Key Words:** Dynamic Stress Intensity Factor(동적 응력확대계수), FEM(유한요소법), Convolution Integral(합성적분), Singular Element(특이요소)

**Abstract**

In this paper, the dynamic stress intensity factors of fracture mechanics are numerically computed in time domain using the FEM. For which the finite element formulations are derived applying the Galerkin method to the equations of motion in convolution integral as has been presented in the previous paper. To assure the strain fields of $r^{-1/2}$ singularity near the crack tip, the triangular quarter-point singular elements are imbedded in the finite element mesh discretized by the isoparametric quadratic quadrilateral elements. Two-dimensional problems of the elastodynamic fracture mechanics under the impact load are solved and compared with the existing numerical and analytical solutions, being shown that numerical results of good accuracy are obtained by the presented method.

## 기호설명

| | |
|---|---|
| $\sigma_{ij}$ | : 응력 |
| $\rho$ | : 밀도 |
| $f_i$ | : 체적력 |
| $u_i$ , $\dot{u}_i$ | : 변위, 속도 |
| $\varepsilon_{ij}$ | : 변형률 |
| $D_{ijkl}$ | : 탄성계수 행렬 |
| $\sigma_{ij,j} \equiv \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$ | : 편미분 |
| $\ddot{u}_i \equiv \partial^2 u_i/\partial t^2$ | : 가속도 |
| $x_i$ , $\boldsymbol{x}$ | : 위치벡터 |
| $t$ | : 시간 |
| $*$ | : 합성적분 기호 |
| $t_i$ | : 표면력 |
| $\Omega$ , $\Gamma$ | : 영역, 경계면 |
| $c_d=(\lambda+2\mu/\rho)^{1/2}$ | : 종파속도 |
| $c_s=(\mu/\rho)^{1/2}$ | : 횡파속도 |
| $\lambda$ , $\mu$ | : Lamé 상수 |
| $\nu$ , $E$ | : 프와송비, 영률계수 |

† 책임저자, 회원, 금오공과대학교
E-mail : wjsim@kunt.kumoh.ac.kr
TEL : (054)467-4224/4221 FAX : (054)467-4221
* 금오공과대학교 대학원

## 1. 서 론

동탄성 문제는 공학분야, 특히, 기계, 토목, 건축 분야 등에서 중요한 역할을 차지하고 있으며 현재도 그 해법에 대하여 많은 연구가 활발히 진

행되고 있다. 공학문제의 수치해석은 기하학적 차원이 큰 문제에서는 필수적이며, 해를 미리 예측할 수 있다는 점에서 공학자들에게 많은 관심을 끈다. 동탄성 문제의 수치해석법에는 유한차분법,[1] 유한요소법,[2~7] 그리고 경계요소법[8~11] 등이 있다.

동탄성 문제를 유한요소해석하기 위해서는 운동방정식과 등가인 변분식으로 바꾸어 푸는데 이를 변분법[12~14]이라고 하며, 갤러킨 방법, 해밀턴 원리 그리고 구틴 원리 등이 잘 알려져 있다. 그리고 변분식은 수치해법에 따라 시간영역, 라플라스영역 그리고 푸리에영역에서 해석되며, 본 논문에서는 시간영역에 국한한다.

갤러킨 방법을 사용한 동탄성 문제의 유한요소해법은 일반 교재에서 많이 소개되고 있으며, 그 절차는 운동방정식에 변분을 곱하고 영역적분을 한 후, 부분적분을 이용하여 변분식을 구한다. 그리고 그 변분식에 반분리근사법을 적용하여 얻은 시간에 관한 상미분방정식을 분할된 시간축을 따라 각 시간구간에서 가속도와 속도에 대한 유한차분적인 시간적분법을 적용하여 수치해석을 진행한다.

구틴[15]은 합성적분으로 표현되는 동탄성 문제에 대한 범함수를 유도하고, 그 변분식을 영으로 하는 오일러 방정식(적분형 운동방정식)이 일반적인 (미분형) 운동방정식과 등가임을 보였다. 적분형 운동방정식은 미분형과는 달리 가속도항을 포함하고 있지 않음으로, 수치해석시 가속도와 속도를 위한 시간적분법이 따로 필요없게 되어, 시간진행에 따른 구간별 해석절차가 단순해지면서 수치결과의 정확성과 안정성을 기대할 수 있다.

구틴의 변분법을 사용한 동탄성 문제의 과거의 유한요소해석[16~18]에서는, 합성적분의 연산이 두 개 포함되는 항들로 구성된 범함수에 종속함수에 대한 반분리근사법을 적용한 후 변분을 취하여 얻은 시간적분식에, 종속함수의 시간에 대한 변화를 각 시간구간에서 2차함수[16,17]나 허미티안 내삽함수[18]를 이용(국지적 근사)하여, 최종적인 유한요소방정식을 구하였다. 그리고 시간에 대한 전향적분시, 전단계의 계산결과(변위, 속도)를 다음단계의 해를 구하기 위한 초기조건으로 사용하였다.

그러나, 적분형 운동방정식은 복잡한 범함수에 변분을 취하여 구하지 않고, 미분형 운동방정식을 라플라스 변환, 나뉫셈, 그리고 역변환을 통해서 간단히 구할 수 있다. 기 발표된 논문[19]에서, 저자들은 과거의 해법[16~18]과는 다른 유한요소해법을 소개하였다. 첫째로, 적분형 운동방정식에 갤러킨 방법을 적용하여 변분식을 구하는 단순화된 정식화 과정을 제시하였으며, 둘째로, 시간축에 따른 적분과정에 있어서, 종속함수의 시간에 대한 변화를 등분된 전시간축상에서의 내삽함수를 이용(전체적 근사)한 해법을 제시하였다. 이때 종속함수는 각 시간구간에서 일정하거나 혹은 선형적으로 변한다고 가정하여 유한요소방정식을 유도하였는데, 후자의 경우에는 시간증분의 크기에 따라 수치결과가 수렴하거나 발산하였으나, 전자의 경우에는 수치결과가 시간증분의 크기에 민감하지 않았으며 그 크기를 감소시킴에 따라 언제나 안정적으로 실제해에 수렴함을 밝혔다.

본 논문에서는 이전 해석[19]의 연장으로서 동적 파괴역학 문제를 유한요소법을 사용하여 시간영역에서 수치해석한다. 메쉬는 2차의 등매개사변형요소로 구성되며, 균열선단에서의 $1/\sqrt{r}$의 응력장을 내포시키기 위하여 삼각형 1/4절점 특이요소를 사용한다. 그리고 각 시간구간에서 변수가 일정하다는 가정 아래에 유도된 유한요소방정식을 이용하여 동적해석을 진행한다. 동적 파괴역학으로의 응용으로써 무한, 유한 경계를 지니고, 모드 I과 정지균열 조건하에 있는, 2차원 예제 세가지에 대하여 동적 응력확대계수를 계산한다. 처음 두 예제에서는 계산된 수치결과를 기존의 이론해나 타 수치결과와 비교하여 제시된 해법의 정확성과 타당성을 검증하고, 이를 근거로 세 번째 예제에서는 동적 응력확대계수에 대한 새로운 수치해석 결과를 제시한다.

## 2. 적분형 변분식과 유한요소방정식

동탄성 문제의 지배방정식은 다음과 같다.[12]

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1a}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{ u_{i,j} + u_{j,i} \} \tag{1b}$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \tag{1c}$$

여기서, $\sigma_{ij}$는 응력, $\rho$는 밀도, $f_i$는 체적력, $u_i$는 변위, $\varepsilon_{ij}$는 변형률, $D_{ijkl}$은 탄성계수 행렬이다.

그리고, 위와 같은 지배방정식을 풀기 위한 경계 및 초기조건은 다음과 같다.

$$u_i = \hat{u}_i \ , \quad t_i = \hat{t}_i$$
$$u_i = u_{0i} \ , \quad \dot{u}_i = \dot{u}_{0i} \tag{2}$$

여기서, $\hat{u}_i$와 $\hat{t}_i$는 물체표면에서의 변위와 표면력에 관한 경계값, 그리고 $u_{0i}$와 $\dot{u}_{0i}$는 변위와 속도에 관한 초기값이다.

한편, 응력으로 표현된 (미분형) 운동방정식 식 (1a)에 라플라스 변환을 취하고 $s^2$ 으로 나눈 후에, 역변환시키면 다음처럼 합성적분으로 표현된 운동방정식이 유도된다.

$$g*\sigma_{ij,j} + g*\rho f_i - \rho\{-t\ \dot{u}_{0i} - u_{0i} + u_i\} = 0 \tag{3}$$

여기서 $g = g(t) = t$ 이며, $*$ 는 다음처럼 정의되는 합성적분 기호이다.

$$u*v = \int_0^t u\ (\boldsymbol{x}, t-\tau)\, v(\boldsymbol{x}, \tau) d\tau \tag{4}$$

여기서, $\boldsymbol{x}$는 위치벡터이며 $t$는 시간 변수이다.

합성적분으로 표현된(이하, 적분형이라고 칭함) 운동방정식 식 (3)에, 갤러킨 방법을 적용하면, 즉, 변분을 곱하고 영역적분을 하면 다음과 같은 적분형 변분식을 얻는다.[19]

$$\int_\Omega g*\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} d\Omega + \int_\Omega \rho u_i \delta u_i d\Omega$$
$$- \int_\Omega \rho(t\ \dot{u}_{0i} + u_{0i})\delta u_i d\Omega$$
$$= \int_\Gamma g*t_i \delta u_i d\Gamma + \int_\Omega g*\rho f_i \delta u_i d\Omega \tag{5}$$

여기서, $\Omega$는 영역이며, $\Gamma$는 경계면이다.

한편, 미분형 운동방정식 식 (1a)에 갤러킨 방법을 적용시켜서 얻은 변분식은 다음과 같다.[2~5]

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} d\Omega + \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega$$
$$= \int_\Gamma t_i \delta u_i d\Gamma + \int_\Omega \rho f_i \delta u_i d\Omega \tag{6}$$

식 (6)은 동탄성 문제에 대한 가상일의 원리라고 알려져 있으며, 좌변은 물체 내에 저장된 가상탄성변형에너지, 그리고 우측항은 표면력과 체적력에 의한 가상일이다. 참고로, 식 (6)에서 임의의 미소함수인 변분 $\delta u_i$가 공간함수라고 생각하고, 라플라스 변환을 취한 다음에, 양변을 $s^2$으로 나눈 후, 역변환을 취해도 식 (5)가 됨을 알 수 있다.

적분형 변분식 식 (5)를 바탕으로 한 유한요소 방정식[19]은, 식 (5)에 전구간내삽함수(global time interpolation function)를 이용하여 종속함수에 대한 반분리근사적 표현을 적용하고, 그 결과로 생기는 시간적분식을 풀기 위하여, 시간축을 등간격으로 나누고, 각 시간구간 내에서 종속함수에 대한 시간근사, 즉, 일정하거나 혹은 선형적인 가정을 통하여 구한다. 이러한 정수화 가정은 현재 경계요소법에 의한 동탄성 문제의 해석[20,21]에서도 많이 응용되고 있다. 참고로, 미분형 변분식 식 (6)을 바탕으로 한 경우에는 각 시간구간별 전향적분시에 가속도와 속도에 대한 유한차분적인 시간적분법(예를 들어, Newmark method, Wilson $\theta$ -method, Houbolt method 등)[4]이 필요하다.

구틴의 변분법을 사용한 과거의 수치해법[16~18]에서는 전구간내삽함수를 이용하지 않고, 각 시간구간에서 종속함수의 시간에 대한 변화를 2차함수[16,17]나 허미티안(Hermitian) 내삽함수[18] (local time interpolation function)를 이용하여, 전단계의 계산결과(변위, 속도)를 다음단계의 해를 구하기 위한 초기조건으로 사용하였다(explicit method). 그러나, 본 논문에서는 초기치는 변하지 않고, 현재를 포함한 과거의 계산결과(변위)를 이용하여, 다음 시간절점에서의 해를 구해 나간다(implicit method).

이전 논문[19]에서 시간구간에서 종속함수가 일정하거나 선형적으로 변하는 두 경우에 대하여 유한요소방정식을 유도하였었는데, 동탄성 문제에 대한 수치해석 결과가 선형적인 경우에는 응력파가 도달하는 시간 전후의 불연속한 거동을 잘 묘사하였으나, 수치해가 수렴하는 시간증분의 범위가 존재하였으며, 그 범위 밖에서는 수치해가 발산하거나 진동하였다(conditionally stable). 그러나, 일정한 경우에는 시간증분의 크기에 따라의 해의 정확도는 다소 변하지만 발산하는 일은 거의 생기지 않았으며, 그 크기를 작게 함에 따라 수치해는 언제나 실제해에 안정적으로 수렴함(unconditionally stable)을 알 수 있었다.

본 논문에서는 파괴역학으로 응용함에 있어서 수치해가 안정적인 후자의 유한요소방정식을 사용하며, 그 식은 체적력이 없고 외력이 정지상태에서 초기에 계단함수적으로 가해진다는 가정 ( $t_i = \hat{t}_i(\boldsymbol{x}) H(t)$, $H(t)$: 단위계단함수) 아래에 다음처럼 표현된다:

$$[\overline{K}]\{u_i\}^N = \{\overline{F}(t)\} + \{\overline{R}\}^{N-1} \tag{7}$$

여기서,

$$[K]=\int_{\Omega}[B]^T[D][B]d\Omega,$$

$$[M]=\int_{\Omega}\rho[N]^T[N]d\Omega$$

$$[\overline{K}]=[\frac{1}{2}\Delta t^2[K]+[M]],$$

$$\{\overline{F}\}=\frac{t^2}{2}\int_{\Gamma}[N]^T\hat{t}_i\,d\Gamma \qquad (8)$$

$$\{\overline{R}\}^{N-1}=-\frac{1}{2}\Delta t^2[K]\sum_{n=1}^{N-1}(2N-2n+1)\{u_i\}^n$$

여기서, $[K]$는 강성계수, $[N]$은 형상함수, $[B]$는 변형률-변위, 그리고 $[D]$는 탄성계수 행렬이다. 또한, $[\overline{K}]$ 가 일정하므로, 매시간의 계산작업은 $t=N\Delta t$ 로 하여 $\{\overline{F}\}$ 을 계산하고, $\{\overline{R}\}^{N-1}$, 즉, 과거의 동적변위가 현시각에 미치는 영향(past dynamic history)을 계산한 후에, 가우스 소거법을 이용해서 식 (7)을 푸는 일이다.

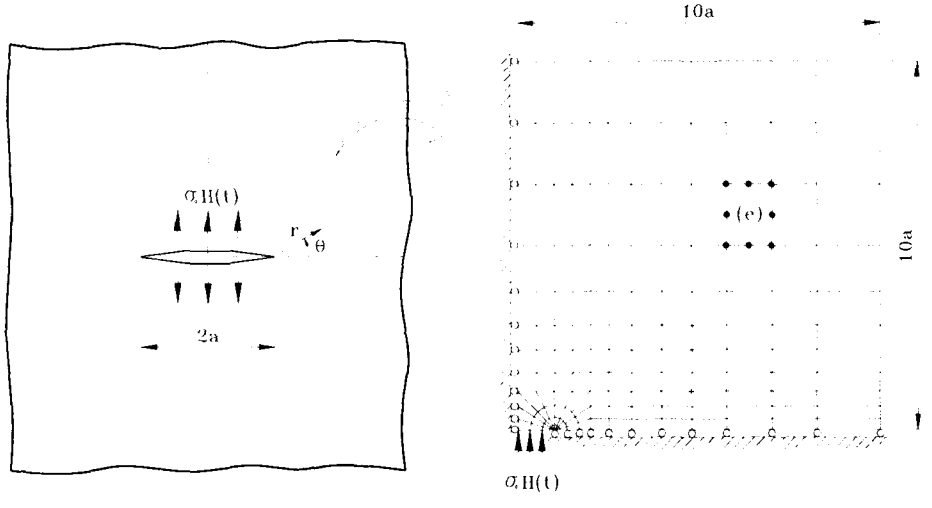
## 3. 수치해석 예

균열문제를 해석하기 위하여 8절점 등매개변수 사변형요소를 사용하였으며, 균열선단에서는 변형률 분포가 $1/\sqrt{r}$의 특이성을 갖는 삼각형 특이요소를 사용하였다. 동적 응력확대계수(dynamic stress intensity factor, DSIF)는 변위장으로부터 구하였으며, 모드 I과 정지균열에 속하는 세가지 예제를 택하였다. 앞의 두 예제에서는 제시된 해법의 타당성과 계산된 수치결과들의 정확성을 검증하기 위하여 기존의 이론해나 수치결과들과 비교하였고, 마지막 예제에서는 새로운 동적해를 구하여 제시한다.

### 3.1 균열면에서 충격하중을 받는 유한균열을 지닌 무한체

Fig. 1(a)에서처럼 무한 탄성체 내에 유한균열이 균열면상에 수직하게 충격하중 $\sigma=\sigma_0 H(t)$을 받고 있다. Chen과 Sih[22]는 그 균열주위의 응력장에 대한 동적 응력확대계수를 이론적으로 구하였다.

본 논문에서는 이를 유한요소해석하기 위하여 Fig. 1(b)에서처럼 대칭성을 이용하여 무한체의 1/4에 대하여 메쉬분할을 하였으며, 균열선단에서




(a) (b)

**Fig. 1** (a) Infinite elastic medium with an impact loaded crack (b) Finite element model

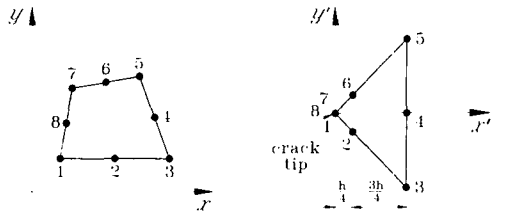



**Fig. 2** (a) 8-noded quadrilateral isoparametric element (b) Triangular quarter point element with $r^{-1/2}$ singularity

는 Fig. 2(b)에서처럼 Fig. 2(a)로부터 변형시킨 1/4절점을 지닌 삼각형 특이요소[23,24]를 사용하였다. 이때 사용된 총요소수는 170개 그리고 총절점수는 553개 이다. 종파속도와 횡파속도의 비는 $\nu=0.29$인 강철의 경우에 $c_s/c_d=(1-\nu)/2(1-\nu)=0.54$ 가 된다. 이 외에, 수치계산에 사용된 물성치로서는 $\rho=7.85\times10^3$ kg/m$^3$ , $E=205\times10^9$ kg/m sec$^2$ 이며, 이때 $c_s=3.182\times10^3$ m/sec 로 계산된다.

평면변형 그리고 모드 I 조건하에서, 균열선단 주위의 $x$, $y$ 방향의 변위장은 다음과 같다.[25]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\begin{Bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\left[1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \\ \sin\frac{\theta}{2}\left[2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right] \end{Bmatrix} \tag{9}$$

여기서, $\mu$는 전단계수이고, $r$, $\theta$는 Fig. 1(a)에서처럼 균열선단을 중심으로 하는 원좌표계의 변수이다.

응력확대계수를 수치해석적으로 구하는 방법에는 여러 가지가 있는데, 크게 특이요소와 비특이요소를 사용하는 경우로 나눌 수가 있다.[26] 본 논문에서는 삼각형 특이요소의 1/4절점(Fig. 2(b)의 2, 6)에서의 y방향 변위 $v$로부터 DSIF를 구하였다. 일반적으로 DSIF는 크랙면상( $\theta=180°$ )의 균열선단개구변위로부터 구한다. 그러나, 조사결과 DSIF 값이 균열선단으로부터 거리 $r$에서 $\theta$의 위치에 따라 조금씩 변하였으므로, $\theta=90°$ 에서의 결과를 참고로 구했다. 식 (9)로부터 $\theta=180°$ 상에서의 DSIF는 다음처럼 표현된다.

$$K_I = \frac{vE}{4(1-\nu^2)}\left\{\frac{2\pi}{r}\right\}^{1/2} \tag{10}$$

Fig. 3에는, 시간증분 $c_s\Delta t/a=0.01$, 특이요소내의 1/4절점( $r_q/a=0.0125$) ( $c_s\Delta t/l=2.0$, $l=0.005a$ = 최소요소길이, $c_s\Delta t/r_q=8.0$), 그리고 $\theta=90°$ 와 180° 에서의 DSIF 수치결과를 무차원

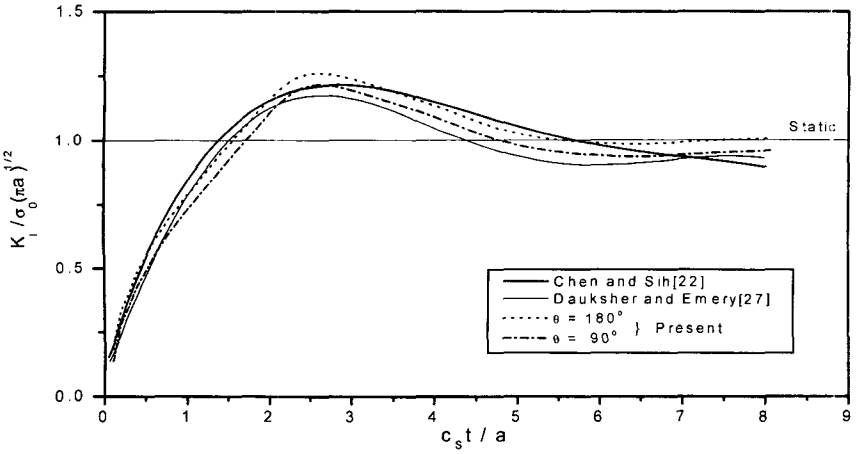
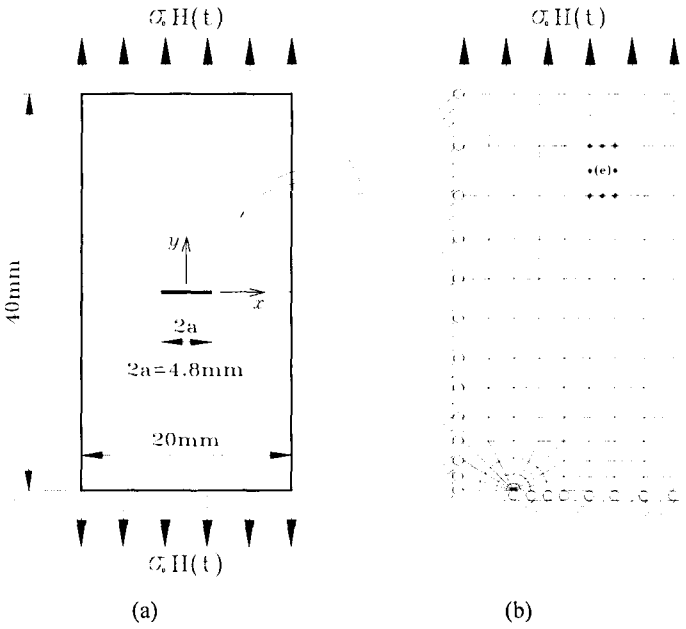



**Fig. 3** Comparisons of dynamic stress intensity factors for an infinite medium with centered crack

화시켜서 체비셰프요소(Chebyshev spectral finite elements)를 사용한 Dauksher와 Emery[27]의 유한요소해석과, 무한 탄성체에 대한 Chen과 Sih[22]의 이론해와 비교하였다. 무한체를 유한의 크기로 근사했으므로, 수치결과는 자유경계면으로부터 반사된 응력파가 균열주위의 응력장에 영향을 끼치지 않는 시간범위 내에서 그려졌다. 이론해[22]에 따르면 DSIF가 $c_s t/a \simeq 3.0$( $t \simeq 22.63\mu$sec)에서 최대치 1.215에 도달했다가 점차로 감소하여 정적해(1.0)에 근접하는데, 본 해석( $\theta = 180°$ 의 결과)에서는 최고치가 조금 높게 나타났으며, 시간이 지남에 따라 정적해에 빨리 수렴함을 알 수가 있다. 반면에 Dauksher와 Emery의 해는 최고치가 이론해보다 조금 낮게 계산되고 있다. 그리고, 과도-동적인 해는 시간이 흐름에 따라 정적해로 수렴해야 하는데, Chen과 Sih의 이론해는 후반에 가서 정적해보다 낮은 값을 보이고 있다.

### 3.2 양단에서 충격하중을 받는 중앙균열을 지닌 유한평판

Fig. 4(a)에서처럼 중앙에 균열을 지닌 유한평판이 양단에서 균일한 충격하중 $\sigma = \sigma_0 H(t)$을 받을 때, 균열주위의 응력과 변위장에 대한 동적 응력확대계수를 구한다. 이때, 사용된 물성은 $\nu = 0.3$, $\rho = 5.0 \times 10^3$ kg/m$^3$ 이며, 나머지 물성은 앞 예제와 동일하다. 여기서 물성치가 앞 예제와 조금 다른 이유는 수치결과를 비교할 대상이 되는 논문들에서 사용한 물성값들이 서로 다르기 때문이며, 이 정도의 차이는 동탄성 수치결과에는 크게 영향을 끼치지 않음을 확인하였다. 유한요소해석을 위한 모델은 Fig. 4(b)에서처럼 평판의 1/4만을 분할하였으며, 이때 사용된 총요소수는 134개, 총절점수는 439 개다. 이 문제에 대한 이론해는 존재하지 않으나, Chen[28]은 유한차분법을 사용하여, 평면변형 조건하에, 처음으로 수치해(DSIF)를 구하였다. 본 논문에서는 시간증분을 $c_d \Delta t/a = 0.05$ ( $c_d \Delta t/l = 1.0$, $l$=최소요소길이, $c_s \Delta t/a = 0.026$)로 하고, $\theta = 180°$ 상의 1/4절점에서 구한 수치결과를 다른 유한요소해법을 사용한 구한 Aberson외 2인,[29] Tan과 Meguid,[30] Dauksher와 Emery[27]의 수치결과들과 함께 Fig. 5에 비교하였다. 비록 이론해가 존재하지 않지만,




(a) (b)

**Fig. 4** (a) Centrally-cracked rectangular specimen subject to a uniform impact load at the end (b) Finite element model

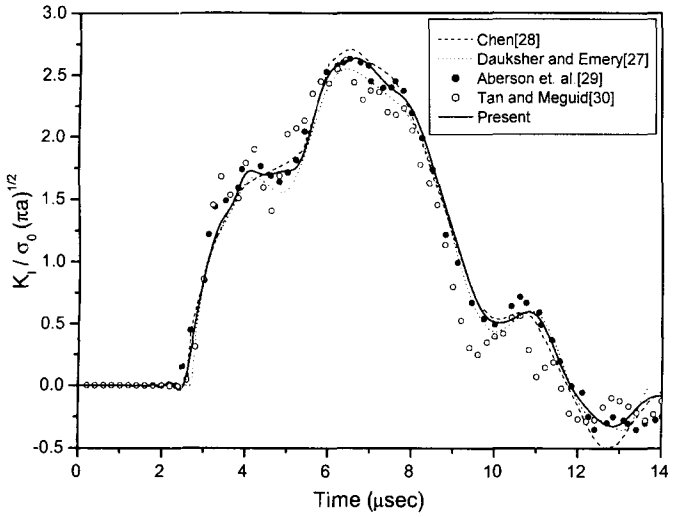



**Fig. 5** Numerical comparisons of dynamic stress intensity factors for a center-cracked specimen

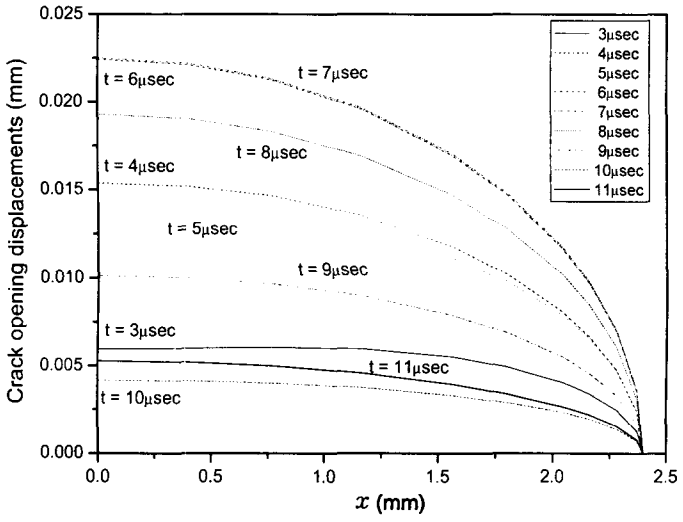



**Fig. 6** Geometry of the crack opening at nine different time steps

본 논문에서 제시한 수치결과가 기존의 해들과 잘 일치함을 알 수가 있다. 참고로, Chen[28]은 유한차분모델에서 약 5100개의 절점을 사용하였고, 체비세프요소를 사용한 Dauksher와 Emery[27]는 유한요소모델에서 1653개의 절점을 사용하였는데 반하여, 본 논문에서는 439개의 절점을 사용하여 프로그램을 수행하였다. 그림에서 충격하중에 의한 최대 응력확대계수가 정적인 경우(1.04)에 비하여 약 2.64배 정도 됨을 알 수 있다. 또한, 시간증분의 변화가 수치결과에 끼치는 영향을 조사하였는데, 전반적으로 시간증분의 크기에 민감하지 않았으나, 시간증분의 크기가 더 커지면 곡선의 변곡점 묘사가 무뎌지고, 더 작아지면 변곡점이 더 잘 묘사되었다. 그러나, 곡선의 전반적 경향에는 변함이 없었다. Fig. 6에는 여러시간에서의 균열개구 형상을 그렸는데, 균열면의 진동 모습이 흥미로우며, 이는 Chen[28]의 결과와도 일치한다.

### 3.3 충격하중을 받는 평판 내의 원공으로부터 성장하는 균열

Fig. 7(a)에서처럼 평판 내의 원공으로부터 성장하는 균열이 경계면에서 균열면에 수직하게 균일한 충격하중 $\sigma=\sigma_0 H(t)$를 받고 있다. 이때, 사용된 물성은 3.2절의 예제와 동일하다. 균열주위의 응력과 변위장에 대한 동적 응력확대계수를 구하기 위하여 유한요소모델은 Fig. 7(b)에서처럼 대칭성을 이용해서 평판의 1/4만을 분할하였다, 이때 사용된 총요소수는 285개, 총절점수는 914개 이다. Fig. 8에는 두 종류의 균열크기 $a/R=0.5$, 1.0 에 대하여, 평면변형 조건하에, 균열면상( $\theta=180^\circ$ )의 특이요소 1/4절점에서, 시간증분을 $c_d\Delta t/a=0.2$ ( $c_d\Delta t/l=2.0$, $l$ = 최소요소길이, $c_s\Delta t/a=0.1067$)로 택하여 해석한 DSIF를 도시하였다. 이후의 거동은 시간이 흐름에 따라 정적해 주위로 많은 진동하면서 점차로 진폭이 감쇠되어 가는데, 정적해에 수렴하기까지는 오랜 시간(종파가 경계면과 균열면 사이를 적어도 50회 왕복시간(0.002sec) 이상)이 걸림을 확인하였다. $a/R=0.5$, 1.0 경우에 동적해(DSIF)의 최대치와 정적해의 비는 각각 3.860/1.83=2.11, 3.064/1.45=2.11 으로 계산되었다. 한편, 원공으로부터 발생하는 균열의 정적해석은 여러 문헌이나 논문에서 많이 참조할 수 있으나, 동적해는 찾을 수가 없었다. Fig. 8은 제시된 수치해법의 정확성과 앞 예제에서의 수치결과의 경향, 그리고 오랜 시간 후에 정적해로 수렴함을 근거로 타당하다고 사료된다. 그러나, 앞으로 타 해법에 의하여 검증을 받을 필요가 있다.

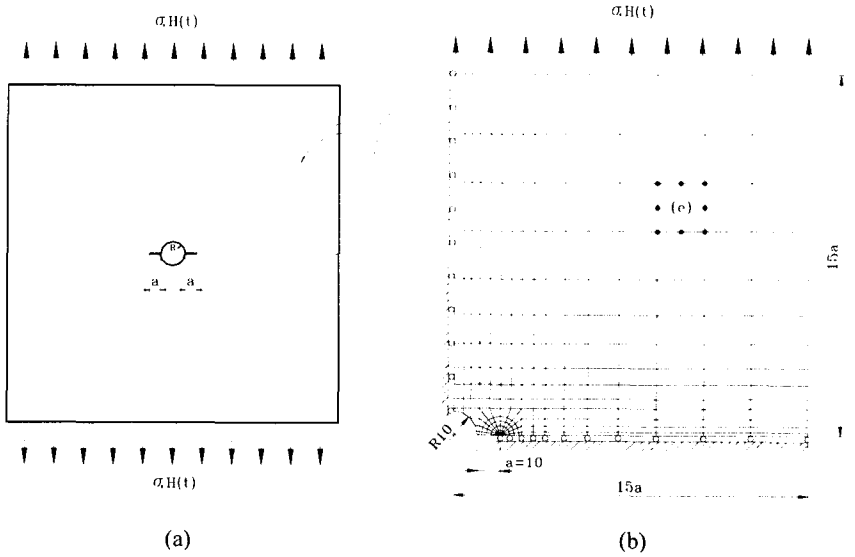



**Fig. 7** (a) Symmetric cracks growing from a round hole (b) Finite element model

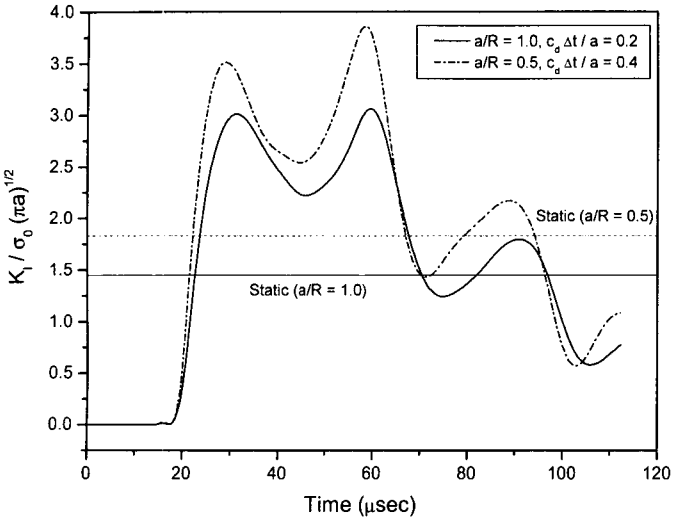



**Fig. 8** Dynamic stress intensity factors for symmetric cracks growing from a round hole

## 4. 결 론

시간적분형 동탄성 운동방정식을 바탕으로 한 무조건적으로 안정한 유한요소방정식을 이용하여 충격하중하 파괴역학문제의 동적 응력확대계수를 구하였다. 유한요소모델의 균열선단에서는 1/4절점을 지닌 삼각형 특이요소를 사용하였으며, 균열면상의 y방향 변위(균열개구변위)로부터 응력확대계수를 구하였다. 전형적인 2차원 문제들을 예제로 해석하고, 기존의 타 해법에 의한 수치해나 이론해와 비교하여, 좋은 수치결과가 얻어짐을 확인함으로써 제시된 유한요소 수치해법이 우수하고 경쟁력있음을 밝혔다. 그리고 이를 근거로 마지막 예제에서는 새로운 동적해(DSIF)를 구하고 제시하였다.

## 참고문헌

(1) Chen, Y.M. and Wilkins, M.L., 1977, "Numerical Analysis of Dynamic Crack Problems," *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Sih, G.C. (ed.), Noordhoff Int Publishing, Leyden.

(2) Reddy, J.N., 1993, *An Introduction to the Finite Element Method* (2nd edn.), McGraw-Hill, London.

(3) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1991, *The Finite Element Method* (4th edn.), McGraw-Hill. London.

(4) Bathe, K.J., 1996, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

(5) Hughes, T.J.R., 1987, *The Finite Element Method*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

(6) Belytschko, T. and Hughes, T.J.R. (eds.), 1983, *Computational Methods for Transient Analysis*. North-Holland, Amsterdam.

(7) Harari, I., Hughes, T.J.R., Grosh, K., Malhotra, M., Pinsky, P.M., Stewart, J.R. and Thompson. L.L., 1996, "Recent Developments in Finite Element Methods for Structural Acoustics," *Archives of Computational Methods in Engineering*. Vol. 3, pp. 131~309.

(8) Banerjee, P.K., 1994, *Boundary Element*

*Methods in Engineering*, McGraw-Hill, London.

(9) Manolis, G.D., and Beskos, D.E., 1988, *Boundary Element Methods in Elastodynamics*, Routledge.

(10) Dominguez, J., 1993, *Boundary Elements in Dynamics*, Elsevier, Amsterdam.

(11) Beskos, D.E., 1997, "Boundary Element Methods in Dynamic Analysis: Part II (1986-1996)," *Trans ASME, Appl. Mech. Rev.*, Vol. 50, No. 3, pp. 149~197.

(12) Achenbach, J.D., 1975, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam.

(13) Washizu, K., 1975, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (2nd edn.), Pergamon Press, Oxford.

(14) Oden, J.T. and Reddy, J.N., 1976, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.

(15) Gurtin, M.E., 1964, "Variational Principles for Linear Elastodynamics," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 16, No. 1, pp. 34~50.

(16) Nickell, R.E. and Sackman, J.L., 1968, "Approximate Solutions in Linear Coupled Thermoelasticity," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 255~266.

(17) Dunham, R.S., Nickell, R.E., and Stickler, D.C., 1972, "Integration Operators for Transient Structural Response," *Computers and Structures*, Vol. 2, pp. 1~15.

(18) Atluri S., 1973, "An Assumed Stress Hybrid Finite Element Model for Linear Elastodynamic Analysis," *AIAA J.*, Vol. 11, No. 7, pp. 1028~1031.

(19) 심우진, 이성희, 2001, "과도 선형 동탄성 문제의 시간영역 유한요소해석," 대한기계학회논문집 A권, 제25권 제4호, pp. 574~581.

(20) Israil, A.S.M. and Banerjee, P.K., 1990, "Advanced Development of Time-Domain BEM for Two-Dimensional Scalar Wave Propagation," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, pp. 1003~1020.

(21) Wang, C.C., Wang, H.C. and Liou, G.S., 1997, "Quadratic Time Domain BEM Formulation for 2D Elastodynamic Transient Analysis," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, No. 1, pp. 129~151.

(22) Chen, E.P., and Sih G.C., 1977, "Transient Response of Cracks to Impact Loads," Sih, G.C. (ed.), *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Noordhoff, Leyden.

(23) Barsum, R.S., 1976, "On The Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 10, pp. 25~37.

(24) Barsum, R.S., 1977, "Triangular Quarter Point Elements as Elastic and Perfectly Plastic Crack Tip Elements," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, No. 1, pp. 85~98.

(25) Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R., 1973, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research, Hellertown.

(26) Parker, A.P., 1981, *The Mechanics of Fracture and Fatigue*, E. & F.N. Spon Ltd., London.

(27) Dauksher, W. and Emery, A.F., 2000, "The Solution of Elastostatic and Elastodynamic Problems with Chebyshev Spectral Finite Elements," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 188, pp. 217~233.

(28) Chen, Y.M., 1975, "Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by a Largrangian Finite Difference Method (the HEMP code)," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 7, pp. 653~660.

(29) Aberson, J.A., Anderson J.M., and King, W.W., 1977, "Dynamic Analysis of Cracked Structures Using Singularity Finite Elements," Sih, G.C. (ed.), *Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems*, Noorhoff, Leyden.

(30) Tan, M. and Meguid, S.A., 1996, "Dynamic Analysis of Cracks Perpendicular to Bimaterial Interfaces Using a New Singular Finite Elements," *Fin. El. Anal. Des.*, Vol. 22, pp. 69~83.

(31) Paris, C.P. and Sih, G.C., 1965, "Stress Analysis of Cracks," *Fracture Toughness Testing and Its Applications, ASTM STP 381*, American Society for Testing and Materials, Philadelphia.