

## 혼합모드 하중하의 A5052 합금판재에서의 피로시험에 관한 연구

구 재 민\*

(2001년 6월 9일 접수, 2002년 2월 21일 심사완료)

### A Study on the Fatigue Test in A5052 Alloy Sheet Under Mixed Mode Loading

Jae Mean Koo

**Key Words :** Mixed Mode Fatigue Crack Growth(혼합모드 피로균열성장), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Maximum Tangential Stress Criterion(최대 원주응력기준), Fatigue Testing Load(피로 시험 하중), Crack Angle(균열각), Crack Propagation Angle(균열진전각)

#### Abstract

In this paper, for the mixed mode fatigue problem, the method of determining testing load was proposed. It is based on the plastic zone size and the limited maximum stress intensity factor by ASTM STANDARD E - 647-00. The application method of maximum tangential stress criterion and the stress intensity factor for the finite width specimen was proposed. In the result of applying the method to mixed mode fatigue test for A5052 H34, it obtained the satisfactory experimental results on the stable crack growth.

#### 기호설명

$\Delta K$  : 응력확대계수 폭,  $N/m^{3/2}$   
a : 균열길이, mm  
N : 사이클 수  
 $\beta$  : 균열각, 도  
 $\theta_0$  : 균열진전각, 도

#### 1. 서론

일반적인 하중이 작용하는 혼합모드 문제는 그 적용의 범용성에도 불구하고 균열이 진전하는 하중뿐만 아니라 진전방향도 고려하여야 하기 때문에 많은 관심에도 불구하고 연구자들이 접근에 어려움을 느끼는 것이 현실이다. 이 분야에 대한 최초의 연구는 1963년 Erdogan과 Sih<sup>(1)</sup>에 의해서 이루어졌으며, 이후 많은 연구자들에 의하여 다루어져 왔다. 우리나라에서도 이 분야에 대한 연구가

활발히 이루어지고 있는 실정이다.<sup>(2-4)</sup>

이와 같은 혼합 모드 균열 문제에 대한 연구는 정하중이 작용하는 경우에 대하여, 주로 이루어져 왔다. 그러나, 사용 중인 기계나 구조물에 일반적으로 작용하는 피로 하중에 대한 연구는 정하중이 작용하는 경우에 비하여 상대적으로 적었다. 피로 하중하의 혼합 모드 균열 성장문제가 중요함에도 불구하고 이와 같은 연구가 활발치 못했던 것은 균열 성장 시작각과 하중 이외에도 균열 성장 경로를 예측하는데 따르는 어려움이 있기 때문이다.

이외에도 혼합 모드 피로 시험에 대한 연구를 어렵게 하는 데는 시험법에 대한 표준이 정해지지 않은 원인도 있는데, 그 중의 하나가 피로 시험 조건으로서 필수적인 소규모 항복 조건을 만족시키는 하중을 찾아내는 문제이며, 시험결과의 정리 방법이다.

본 연구에서는 A5052 합금 판재에 대한 혼합모드 피로시험의 필요 조건인 소규모 항복조건을 만족할 수 있는 하중을 소성 영역크기로부터 구하는 방법과 중앙균열시험편(MT)에 대한 응력확대계수를 제안하였으며, 피로시험결과를 정리하는 방법

\* 회원, 성균관대학교 기계공학부  
E-mail : kjm9000@hanmail.net  
TEL : (031)290-7477 FAX : (031)290-5849

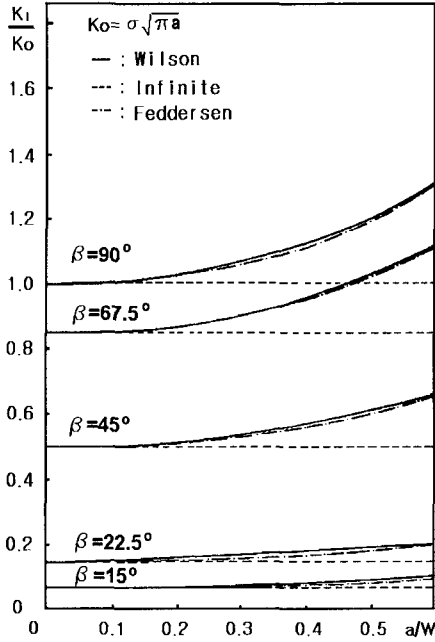


Fig. 1  $K_I$  for a center inclined crack

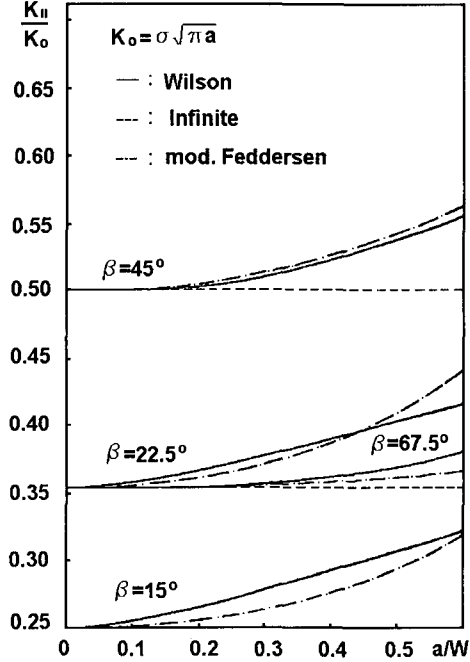


Fig. 2  $K_{II}$  for a center inclined crack

을 제시하여, 중앙균열시험편(MT)에 의한 혼합모드 피로시험결과의 측정 및 정리를 가능케 하고자 하였다.

## 2. 혼합모드 피로시험 이론

### 2.1 유한폭 판재에서의 응력확대계수

무한 경계에  $\sigma$ 의 응력이 작용하는 판재의 중앙에 길이  $2a$ 의 균열이 응력방향에 대하여  $\beta$ 만큼 경사진 균열첨단 부근의 미소요소에 대한 Williams<sup>(5)</sup>의 응력해에서 비특이항을 무시한 결과 중 원주방향응력은 다음과 같다.

$$\sigma_{\theta} = 1/2(2\pi)^{-1/2} [K_I(1 + \cos\theta)\cos(\theta/2) - K_{II}(3\sin\theta)\cos(\theta/2)]. \quad (1)$$

여기에서

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \sin^2 \beta$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (2)$$

이다. 식 (2)는 무한 판재에 대한 식으로써 유한폭 문제에 적용 하는데 한계가 있다. 본 연구에서는 Feddersen<sup>(6)</sup>의 수정계수를 수정하여 다음과 같이 유한폭 판재에서의 응력 확대계수를 정의 한다.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \sin^2 \beta}$$

$$K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi a}{2W} \cos \beta\right) \sin \beta \cos \beta}. \quad (3)$$

이 결과를 Wilson<sup>(7)</sup>의 경계배열방법(Boundary Collocation Method)에 의한 결과와 비교한 것은 Figs 1, 2와 같다.  $K_I$ 은 Wilson의 결과와 약 15% 이내의 오차가 발생하고,  $K_{II}$ 는 약 6%이내의 오차가 발생하고 있다.

### 2.2 하중 설정법

Magill과 Zwerneman<sup>(8)</sup>은 A572 강판을 사용한 평판에 대한 혼합 모드 피로 시험에서 최대 작용 하중  $P_{max}$ 이 소성 변형을 일으키는 것에는 관계치 않고,  $\Delta P = P_{max} - P_{min}$ 을 변화시켜서 소규모항복조건에 의한 안정 균열 성장 속도를 찾았다고 하였다.

Paul<sup>(9)</sup>은 얇은 원판형 알루미늄 2024-O 시험편을 사용한 평면 응력 상태의 혼합 모드 피로 균열 진전에 대한 연구에서는, 모드I 하중에 의하여 예 균열(pre-crack)을 줄 때의 최대하중과 평균하중의 80%을 혼합모드 피로시험의  $P_{max}$ 과  $P_{mean}$ 으로 하였다.

Mageed와 Pandey<sup>(10)</sup>은 알루미늄으로 만든 중앙 균열개 시험편을 사용한 혼합 모드 피로 균열 시험에서 0.2% 항복응력의 20%을 변동 하중 폭으로 설정하였다.

Pustejovsky<sup>(11)</sup>는 Ti-6Al-4V 재료를 사용한 혼합 모드 피로 시험에서 균열 침단 부근에서 가능한 평면 변형률 조건이 되도록 하여야 하는데, 균열 침단 부근의 소성영역이 시험편의 두께에 비하여 작은 비가 된다면 이 조건을 만족시킬 수 있다고 하였다. 소성영역의 크기는 다음식으로부터 대략적으로 구할 수 있다고 하였다.

$$r_p = 1/(2\pi)(K_I/\sigma_{1s})^2 \quad (4)$$

여기에서, 균열길기와 시편의 폭의 관계가  $a < 0.1W$  인 경우  $F \approx 1$ 과 같기 때문에  $K_I \approx \sigma\sqrt{\pi a}$  로 하여 계산하였다. 소성영역의 크기를 시험편의 두께에 비하여 10% 이하로 되게 하여 최대 작용 응력을 결정하였다.

이역섭 등<sup>(4)</sup>은 SUS304 재료를 사용한 혼합모드 하중하의 피로시험에서 항복하중의 약 40%를  $P_{max}$  로 하였다.

혼합모드 하중 하에서는 같은 균열길이일지라도 균열각에 따라 균열이 진전하는 값이 크게 차이가 나는 것은 여러 연구자들에 의하여 밝혀졌다.<sup>(11,12,13)</sup> 따라서, 초기 균열각에 따라 피로하중설계를 하여야 함에도 불구하고, 대부분의 연구는 모드 I 하중에 기초를 둔 해석을 하고 있거나, 선택의 기준이 없이  $\Delta P = P_{max} - P_{min}$  을 변화시켜서 소규모항복조건에 의한 안정 균열 성장 속도를 찾았다.

본 연구에서는 이들과는 달리 초기 균열각을 고려하여 피로하중설정을 다음과 같은 방법으로 하였다.

모드 I 인 경우( $\beta = 90^\circ$ ,  $\theta = 0$ ), 식 (4)의 양변을 시험편의 반폭  $W$ 로 나누면,

$$\frac{r_p}{W} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\sigma_{1s}\sqrt{2W}} \right)^2 \quad (5)$$

이 된다. 이 식에서 소규모 항복 조건에 의한 피로 시험이 가능한 한계치를 각각,  $r_{maxL}$ ,  $K_{maxL}$  이라 하면, 식 (5)를 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\frac{r_{maxL}}{W} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{maxL}}{\sigma_{1s}\sqrt{2W}} \right)^2 \quad (6)$$

ASTM STANDARD E647-00 내용 중 M(T) 시편인 경우를 식 (6)에 의하여 수정한 결과는 Fig. 3 과 같다.  $\frac{r}{W}$  ( $r$ : arbitrary distance from crack tip)이  $\frac{r_{maxL}}{W}$

보다 작은 값을 갖도록 하중설정을 한다면, 소규모 항복 조건을 만족시킬 수 있다고 하겠다. 식 (6)에서

$$K_{maxL} = \sigma_{1s}\sqrt{2\pi r_{maxL}} \quad (7)$$

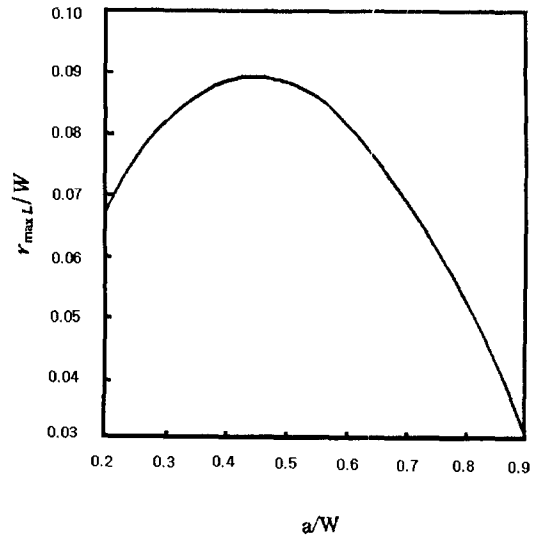


Fig. 3  $r_{maxL}/W$  for M(T) specimens

와 같이 나타낼 수 있다. 또한 식 (1)로부터

$$\sigma_\theta\sqrt{2\pi r} = \frac{1}{2} \left( K_I(1 + \cos\theta)\cos\frac{\theta}{2} - K_{II}(3\sin\theta)\cos\frac{\theta}{2} \right) \quad (8)$$

와 같이 표현 할 수 있는데,  $\sigma_\theta = \sigma_{1s}$  이고,  $r = r_{maxL}$  인 경우에는  $K_{maxL}$  이 됨을 알 수 있다. 식 (8)에서 균열각이  $\beta$  이고, 균열진전각이  $\theta_0$  일 때,  $\theta = \theta_0$  를 대입하여  $K_{maxL} > \sigma_\theta\sqrt{2\pi r}$  이 되는 작용응력  $\sigma$  를 구하면 소규모 항복조건을 만족시켜 안정 균열 성장이 될 수 있다

### 2.3 혼합모드 피로 균열 성장

A.T. Yokobori Jr., et al.<sup>(14)</sup>는 5083P-O 알루미늄 합금에 의한 실험 결과, 거시적으로 모드 I 과 II 의 혼합모드 하에서 최대 주 인장응력  $\sigma_1$  에 거의 수직인 방향으로 피로 균열이 성장한다고 하였다. 또한, 최대 주 인장응력에 수직인 방향으로 투영한 균열길이를  $b$  라고 할 때, 응력확대 계수를 다음과 같이 정의하였다.

$$K_{\beta} = \sigma_1\sqrt{\pi b} \quad (9)$$

이 응력확대계수를 사용하여,  $\Delta K_{\beta} - db/dN$  관계를 정의하였다.

Sih 와 Barthelemy<sup>(15)</sup>는 Fig. 4(a)와 같이 A 에서 B 로의 작은 균열 증분에 의한 새로운 OAB 의 굽은 균열을 OB 의 직선 균열로 보고, Fig. 4(b)의 새로운 균열각을  $\beta_1$ , 반균열 길이를  $a$  이라 할 때,

$$\beta_1 = \beta + \frac{\Delta a_1 \sin\theta_0}{a_0 + \Delta a_1 \cos\theta_0} \quad (10)$$

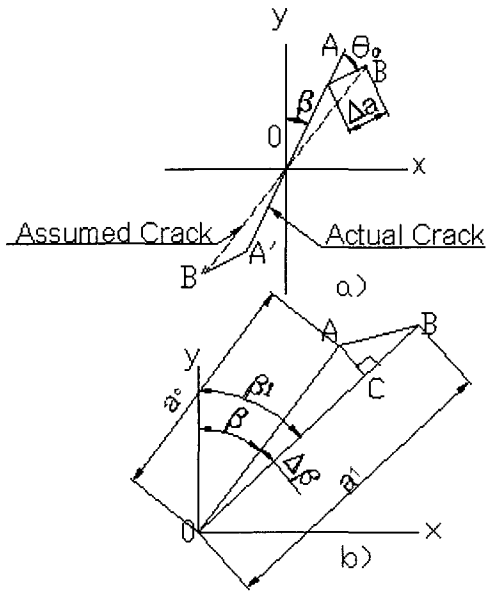


Fig. 4 (a) First increment of crack growth (b) straight line approximation

$$a_1 = a_0 + \frac{\Delta a_1 + a_0 \cos \theta_0}{a_0 + \Delta a_1 \cos \theta_0} \Delta a_1 \quad (11)$$

의 관계를 제안하였다. 이 가상적인 균열의 응력 확대계수  $K_I, K_{II}$ 를 다음과 같이 고려하였다.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a_1} \sin^2 \beta_1$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a_1} \sin \beta_1 \cos \beta_1 \quad (12)$$

이역섭 등<sup>(4)</sup>은 모드 II가 지배적인 조건일 때, Sih와 Barthelemy<sup>(15)</sup>의 방법을 사용하여, 최대 원주응력으로 예측한 방향과 실험치와 사이에 차이가 있다고 하였다.

본 연구에서는 다음과 같은 방법으로 균열성장 방향을 예측하고, 실험결과치를 정리하였다.

Fig. 5에서 원점을 (0,0), A 점을  $(x_0, y_0)$ 라 하고 B 점을  $(x_1, y_1)$ 라 한다면, 가상 균열길이와 각은 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$a_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (13)$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \left( \frac{y_1}{x_1} \right) \quad (14)$$

또한, 균열진전각  $\theta_0$ 는

$$\theta_0 = \tan^{-1} \left( \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) - \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \quad (15)$$

와 같이 정의 되어지는데, 일축인장의 경우  $\tan^{-1} \left( \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) < 0$ 의 값을 갖는다.

원주응력에 식 (3)의 유효판재의 응력확대 계수를 적용하여 균열진전각을 결정한 다음, 균열

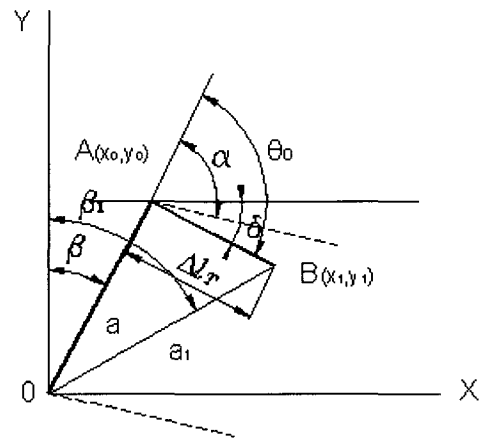


Fig. 5 Mixed mode fatigue crack growth path

증분의 크기에 따라 균열성장 경로가 차이가 지기 때문에, 하중설계시에 소규모항복조건을 만족하도록 사용하였던  $r=0.2\text{mm}$ , 즉  $r/W=0.008$  만큼 균열을 성장시킨 후, 다시 식 (13)-(15)를 사용하여, 다시 최대원주응력에 의하여 균열진전각을 해석하였다.

#### 2.4 혼합모드 피로균열성장 속도

본 논문에서 실험 결과는 다음과 같이 정리하였다.

원 경사균열을  $a$  라고 할 때, 균열성장증분  $\Delta a$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta a = a_1 - a \quad (16)$$

임의의 시점에서의 가상 균열길이를  $a_i$ , 균열경사각을  $\beta_i$ , 균열진전각을  $\theta_{oi}$ 라 하고, 가상 균열이  $a_i$ 에서  $a_{i+1}$ 로 진전할 때의 평균 가상 균열길이와 평균 균열각, 평균 균열진전각을 각각,  $\bar{a}_i, \bar{\beta}_i$ 와  $\bar{\theta}_{oi}$ 라 할 때, 응력 확대 계수와 원주응력에 의한 응력확대계수는 다음과 같이 정의할 수 있다

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \bar{a}_i \sec \left( \frac{\pi \bar{a}_i}{2W} \right) \sin^2 \bar{\beta}_i}$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi \bar{a}_i \sec \left( \frac{\pi \bar{a}_i}{2W} \cos \bar{\beta}_i \right) \sin \bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i} \quad (17)$$

$$K_{\theta} = \sigma_{\theta} \sqrt{2\pi r}$$

여기에서  $\sigma_{\theta}$ 는  $\bar{\theta}_{oi}$ 의 함수이다.

또한, 식 (17)를 적용해서 다음과 같은 변동폭 원주응력확대계수를 사용하여 피로균열성장거동을 구하였다.

$$\Delta K_{\theta} = \Delta \sigma_g \sqrt{2\pi r} \quad (18)$$

### 3. 실험 및 고찰

#### 3.1 시편 및 하중설정

시편에 사용된 재료는 A5052 H34 알루미늄합금이며, 기계적 성질은 Table 1 과 같다. 또한, 시편의 형상은 Fig. 6 과 같이 두께가 3mm 이고, 폭이 50mm 인 중앙 경사 균열 피로 시편이다. y' 방향

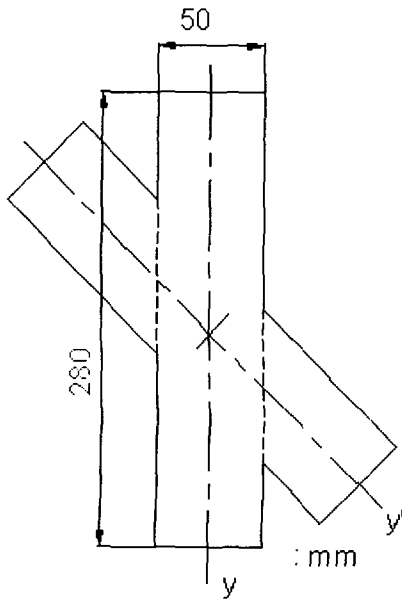


Fig. 6 Geometry of specimen

Table 1 Mechanical properties of A5052 H34

Tensile Strength (MPa)	Yield Strength (MPa)	Young's Modulus (GPa)	Elongation (%)
261.9	213.5	70.3	10

으로 하중을 작용시켜 예균열(Precracking)을 넣은 후, 점선으로 표시된 절취선을 따라 시편을 절취하여, y 방향으로 하중 제어 시험을 하였다.

25 톤 용량의 다이내믹 범용 시험기(Dynamic Universal Testing Machine(Instron Model 1332))를 사용하여 하중 제어 방식으로 30Hz 의 주파수에, sine 파형으로 인장-인장 시험을 하였다

Fig. 3 에서  $\frac{a}{W} = 0.9$  일 때,  $\frac{r_{maxL}}{W} = 0.029$  이므로, 이 보다 작은 값을 사용하면 소규모 항복 조건을 만족할 수 있다. 본 연구에서는  $r=0.2mm$ , 즉  $\frac{r}{w} = 0.008$  이 되도록 하중설계를 하였다. 이 값과 본 연구에서 사용된 재료의 항복 강도 및 시편폭을 식 (6)에 대입하여  $K_{maxL} = 7.58MN/m^{3/2}$  를 구하였다.

일축인장하중하의  $\beta = 30^\circ$  인 경우 최대 원주 응력 기준에 의하면,  $\theta_o = -59.92^\circ$  가 되는데, 이 결과를 식 (8)에 대입하여 구한 결과는:  $P_{maxL} = 13.69kN$  이며,  $\beta = 45^\circ$  인 경우  $\theta_o = -52.97^\circ$ ,  $P_{maxL} = 9.96kN$  이고,  $\beta = 60^\circ$  인 경우  $\theta_o = -42.66^\circ$ ,  $P_{maxL} = 7.94kN$  을 구할 수 있었다. 이 값들을 보다 작게 하기 위하여,  $\beta = 30^\circ$  일 때는  $P_{max} = 10.79kN$ ,  $P_{min} = 1.079kN$ ,  $\beta = 45^\circ$  일 때는  $P_{max} = 9.81kN$ ,  $P_{min} = 0.981kN$ ,  $\beta = 60^\circ$  일 때는  $P_{max} = 7.85kN$ ,  $P_{min} = 0.785kN$  으로 하였으며, 응력비 R=0.1 로 하였다.

피로 균열 진전은 1/100mm 의 정밀도를 갖는 이동식 현미경을 사용하여 측정하였다.

#### 3.2 피로균열 성장

최대원주응력기준에 의한 해석 결과와 실험경로를 비교한 것은 각각 Figs. 7-9 인데, 예측된 피로 균열 성장 경로는 실험결과와 비교적 잘 일치하고 있으나, 초기 균열각이 커질수록 해석결과와 실험치가 차이가 있음을 알 수 있다.

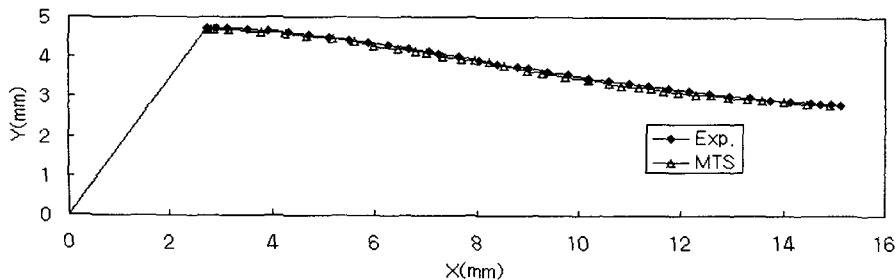


Fig. 7 Mixed mode fatigue crack growing path for an inclined crack with  $\beta = 30^\circ$

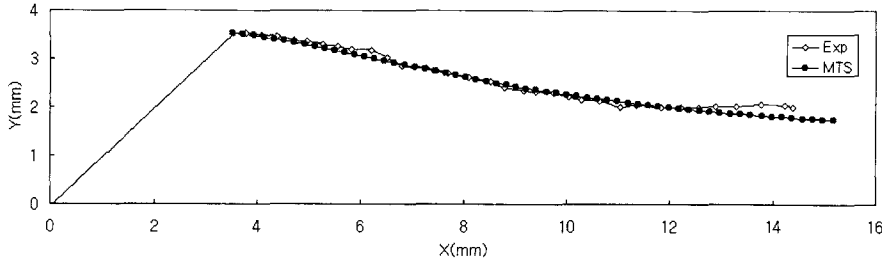


Fig. 8 Mixed mode fatigue crack growing path for an inclined crack with  $\beta=45^\circ$

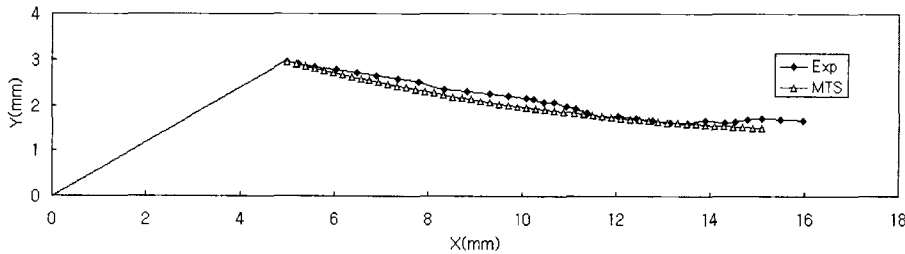


Fig. 9 Mixed mode fatigue crack growing path for an inclined crack with  $\beta=60^\circ$

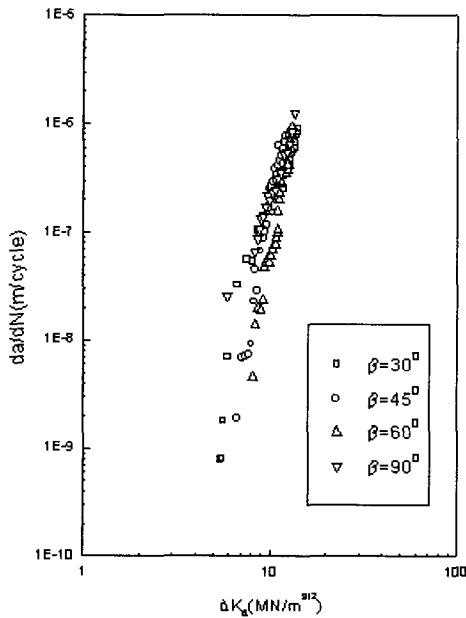


Fig. 10  $da/dN$ - $\Delta K_{I\beta}$  plot under mixed mode loading

해석 결과는 본 논문의 유한폭 판재에서의 응력확대계수를 사용하여 식 (12), (13)의 가상 균열

에 대한 식을 적용하였다. 매 단계의 균열진전은 하중설계시에 소규모항복조건을 만족하도록 사용하여  $r=0.2\text{mm}$ , 즉  $r/W=0.008$  로 하였기 때문에 실험치와 해석결과가 잘 일치한다고 생각되며, 초기 균열각이 커질수록 실험결과의 경로의 편차가 커지는 이유는 하중설계시 균열각  $\beta=30^\circ$  일 때는  $P_{max}$  을  $P_{maxL}$  의 21.2% 작은 값을 선택하였으나,  $\beta=45, 60^\circ$  인 경우는 각각 1.5%, 1.1% 작은 값을 선택하여, 안정 균열성장에 영향을 미치지 않았나 생각된다.

그러나, 경로에 대한 해석결과와 실험결과가 비교적 잘 일치하기 때문에, 최대 원주 응력기준의 정확성과 더불어, 본 논문의 유한폭 판재에서의 응력확대계수와 가상균열에 의한 해석이 유용함을 보여준다.

Fig. 10 은 식 (16)와 (18)에 의하여 정리한 결과이다. 실험에서 이동식 현미경을 사용하여 측정된  $x, y$  값으로부터, 식 (13)-(15)에 의하여 가상 균열길이와 가상 균열각, 균열진전각을 구한 후, 그 값들의 평균을 사용하여 식 (18)에 따라  $\Delta K_{I\beta}$  을 구하였다. 이 과정에서 기존의 연구자<sup>(4,10,15)</sup>들은 각  $\beta$  에 이론적인 해석에 의한 균열진전각을 적용하였으나, 정하중하의 균열진전에 대한 많은 연구<sup>(1)</sup>에서 밝혀진 바와 같이 일축인장인 경우 실험치와 최대 접선응력을 사용하여 해석할 때 오차가 적기 때문에, 매 균열을 진전할 때마다 해석한다는 것은 너무 많은 노력을 필요로 하는 불필요한 과정

이므로 생략하고 실험에 의하여 산출한 평균 균열 진전각을 적용하였다.

이와 같은 과정을 거쳐 정리한 결과, Fig. 10 에서 보는 바와 같이 혼합모드의 피로균열성장 거동과 ASTM STANDARD E647-00 의 시컨트법(secant method)에 의하여 정리한 모드 I( $\beta = 90^\circ$ )의 경우와 비교할 때, 본 논문에서 사용한 피로 실험결과 정리법이 유용하다고 생각한다.

#### 4. 결 론

이상의 연구로부터 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

(1) 피로 시험에 의하여 측정된 경로와 본 연구의 유한요소 판재 응력확대계수를 최대 원주응력 기준에 적용하여 해석한 결과를 비교할 때 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

(2) 본 연구의 하중설정법에 따라 소규모 하중 조건이 되도록 하중을 설정하였을 때, 만족스러운 시험결과를 얻을 수 있었다.

(3) 본 연구에서 제시한, 실험결과로부터 산출한 평균 균열진전각과 가상균열을 사용하여 피로시험 결과를 정리한 결과와 시컨트법(secant method)에 의하여 정리한 모드 I 결과와 비교할 때, 만족할 만한 결과를 얻을 수 있었다.

#### 참고문헌

(1) Erdogan, F. and Sih, G. C., 1963, "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear," *J. Basic Engng., Trans. ASME* Vol. 85, pp. 519~527.  
 (2) 조명래, 최용식, 양원호, 1993, "균열의 두께가 변화하는 부재내의 혼합모드(모드 I/II) 응력확대 계수," 대한기계학회논문집, Vol. 17, No. 8, pp. 1875~1882.  
 (3) 정남용, 장진모, 1997, "Al/Steel 이종재료의 접착이음에 대한 혼합모드의 파괴기준," 대한기계학회논문집 A, Vol. 21, No. 8, pp. 1322~1331.

(4) 이억섭, 류황희, 김동준, 1999, "혼합모드하중에서의 피로균열진파 방향과 피로수명 예측," 대한기계학회논문집 A, Vol. 23, No. 9, pp. 1550~1558.  
 (5) Williams, M. L., 1957, "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack," *J. Appl. Mech.*, Vol. 24, No. 1, pp. 109~114.  
 (6) ASTM STANDARD E647-00, 2000, "Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates," Annual Book of ASTM Standards.  
 (7) Rook, D.P. and Cartwright, D. J., 1976, "Compendium of Stress Intensity Factors," London Her Majesty's Stationery Office by The Hillingdon Press, pp. 74~75.  
 (8) Magill, M. A. and Zwerneman, F. J., 1996, "Sustained Mode I and Mode II Fatigue Crack Growth in Flat Plates," *Engng. Frature Mech.*, Vol. 55, No. 6, pp.883~899.  
 (9) Paul, T. K., 1995, "Plane Stress Mixed Mode Fatigue Crack Propagation," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 52, No. 1 pp. 121~137.  
 (10) Abdel Mageed, A.M. and Pandey, R. K., 1991, "Mixed Mode Crack Growth under Static and Cyclic Loading in Al-alloy Sheets," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 40, No. 2, pp. 371~385.  
 (11) Pustejovsky, M. A., 1979, "Fatigue Crack Propagation in Titanium under General In-Plane Loading-I: Experimentals," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 11, pp. 9~15.  
 (12) Williams, J. G. and Ewing, P. D., 1972, "Fracture under Complex Stress - The Angled Crack Problem," *Int. J. of Fracture Mech.*, vol. 8, No. 4, pp. 441~446.  
 (13) Sih, G. C., 1974, "The Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems," *Int. J. of Fracture*, Vol. 10, No. 3, pp. 305~321.  
 (14) Yokobori, A.T. Jr, Yokobori, T., Sato, K. and Syoji, K., 1985, "Fatigue Crack Growth under Mixed Modes I and II," *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, Vol. 8, No. 4, pp. 315~325.  
 (15) Sih, G.C. and Barthelemy, B.M., 1980, "Mixed Mode Fatigue Crack Growth Prediction," *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 13, pp. 439~451.