

설계파라미터 변경에 따른 구조물의 동특성 변화 해석

이 정 윤*

(2001년 8월 14일 접수, 2002년 1월 11일 심사완료)

A Structural Eigenderivative Analysis by Modification of Design Parameter

Jung Youn Lee

Key Words: Natural Frequency(고유진동수), Vibrational Mode(진동모드), Generalized Mass(일반질량), Generalized Stiffness(일반강성), Sensitivity Analysis(감도 해석), Sensitivity Coefficient(감도 계수), F.E.M(유한요소법)

Abstract

This study predicts the modified structural eigenvectors and eigenvalues due to the change in the mass and stiffness of a structure by iterative calculation of the sensitivity coefficient using the original dynamic characteristics. The method is applied to examples of a cantilever and 3 degree of freedom lumped mass model by modifying the mass and stiffness. The predicted dynamic characteristics are in good agreement with these from the structural reanalysis using the modified mass and stiffness.

1. 서론

종래의 구조물 설계와 개선은 주로 설계자의 축적된 경험과 실험을 통하여 수행되었으며, 따라서 많은 시간, 경비 그리고 자원이 낭비되는 측면이 있었다. 특히 제품이 경량화, 다양화함에 따라 생산하기 전에 정확한 제품의 동특성을 파악하는 것이 중요하게 되었다. 감도 해석은 전산 최적설계 기술의 필수적인 한 단계이다. 또한 감도 해석은 어떤 설계항목의 변화가 전체 구조물 시스템에 어떠한 영향을 미치는가를 미리 예측하고, 설계의 변경에 대한 지침을 수립하고자 할 때 매우 유용하다.

고유치에 대한 감도해석 분류 방법에는 기준에 따라 여러 가지 방법으로 나누어지며 크게 두 가지로 나누어진다. 하나는 직접법(direct method)과 다른 하나는 모달 방법(modal method)이다. 직접법(direct method)은 Nelson⁽¹⁾이 1976년에 발표하였고 잘 활용되고 있으나 이 방법은 오직 반복된 고유치가 없을 경우 적용되었다. Mills-Curran⁽²⁾은 반복된 고유치의 경우에 적용할 수 있는 방법을 발표하였으나, 실용적인 면에서 이 방법은 문제가 있었다. Rudisill⁽³⁾은 고유진동수와 고유모드 1차 변화율 및 고유진동수의 2차 변화율을 구하였다.

모달방법(modal method) 대한 연구로는 Fox와 Kapoor⁽⁴⁾가 고유모드 변화량을 변경전 구조의 고유모드 선형결합으로서 표시하고 질량 정규화 및 직교성 조건으로부터 감도 계수를 결정하여 고유모드의 1차 변화율을 구하였으며, Brandon⁽⁵⁾은 고유진동수의 2차 변화율을 1차 변화율로부터 구하

* 회원, 경기대학교 전자·기계공학부

E-mail : jylee@kuic.kyonggi.ac.kr

TEL : (031)249-9811 FAX : (031)249-9796

였고, Wang^(6,7)은 모드합성기술의 모드 가속도법을 감도 해석에 적용하여 계산정도를 개선하였다. 민현기, 탁태호, 이장무⁽⁸⁾는 직접미분법을 이용하여 자동차 현가장치의 기구학적 감도 해석을 하였으며, 백성남, 지태한, 박영조⁽⁹⁾는 체결력에 따른 볼트 결합부의 동적 파라미터 해석을 하였고, 박윤식, 지영춘⁽¹⁰⁾은 고유치 오차 최소화 기준에 따른 실험데이터에 의한 유한요소 모델개선에 대해 연구하였다.

모달 방법은 구조 변경의 모드(mode) 변화량이 변경전 모드에 감도 계수를 곱한 합으로 표시하여 용이하게 감도 해석을 수행하나 동특성 변화를 구할 때 구조 변경 후 모드 변화량이 없다고 가정하였기 때문에 구조 변경량이 많으면 오차가 증가하여 변경량이 많은 구조물에 적용하는 데 문제가 있었다. 이를 개선하기 위해 이정윤, 오재웅⁽¹¹⁾은 설계 파라미터 변경에 따른 연속계의 고유진동수 및 고유 벡터 변화량을 구조 변경 후 모드 변화량까지 고려하여 예측하였으나 연속계이기 때문에 복잡한 구조물이나 이산계에는 적용할 수 없었고 적분이 가능한 단순한 구조물에만 적용이 가능하였다.

본 연구는 이러한 문제점을 개선하기 위해 복잡한 구조물이나 이산계에 적용할 수 있도록 유한요소법의 질량 및 강성행렬을 사용하여 감도 계수로부터 설계파라미터가 변경된 구조물의 고유진동수 및 진동 모드를 현재의 고유진동수, 진동모드, 질량 변화 및 강성 변화만으로 예측할 수 있는 방안을 제시하였다. 타당성을 검증하기 위해 외팔보와 3자유도계에 적용하여 고유진동수 및 진동모드 변화량을 예측하고 재해석치와 비교하였다.

2. 이론

2.1 구조물의 동특성 변화

구조물에 질량 또는 강성이 변경되면 동특성이 변하게 된다. 이때 구조 변경 전 후의 동특성은 다음과 같이 된다.

$$(K_o - \lambda_o M_o) \phi_o = 0 \quad (1)$$

$$(K - \lambda M) \phi = [K_o + \Delta K - (\lambda_o + \Delta \lambda)$$

$$(M_o + \Delta M)] (\phi_o + \Delta \phi) = 0 \quad (2)$$

여기서 K_o , M_o , K , M , ΔK 과 ΔM 은 각각 변경 전 강성 행렬, 변경 전 질량 행렬, 변경 후 강성행렬, 변경 후 질량행렬, 강성 행렬과 질량행렬의 변화량이며 λ , ϕ , λ_o , ϕ_o , $\Delta \lambda$ 와 $\Delta \phi$ 는 각각 구조 변경 후 고유치, 진동모드, 변경 전 고유치, 변경 전 진동모드, 고유치 변화량과 진동모드 변화량이다.

2.2 질량 및 강성 변경에 의한 일반질량의 해석 정규화시킨 i 차 모드의 일반질량은 다음과 같다

$$m_{oii} = \{\phi_o\}_i^T [M_o] \{\phi_o\}_i = 1 \quad (3)$$

$$m_{ii} = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1 \quad (4)$$

여기서 m_{oii} , m_{ii} 는 각각 i 차 모드의 변경 전 및 변경 후 일반질량이다. 또한 i 차 모드의 변경 후 일반질량은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i \\ &= \{\phi_o + \Delta \phi\}_i^T [M_o + \Delta M] \{\phi_o + \Delta \phi\}_i \\ &= \{\phi_o\}_i^T [M_o] \{\phi_o\}_i + \{\phi_o\}_i^T [M_o] \{\Delta \phi\}_i + \{\phi_o\}_i^T [\Delta M] \{\phi_o\}_i + \{\phi_o\}_i^T [\Delta M] \{\Delta \phi\}_i + \{\Delta \phi\}_i^T [M_o] \{\phi_o\}_i + \{\Delta \phi\}_i^T [M_o] \{\Delta \phi\}_i + \{\Delta \phi\}_i^T [\Delta M] \{\phi_o\}_i + \{\Delta \phi\}_i^T [\Delta M] \{\Delta \phi\}_i \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 고유 벡터의 변화량을 변경 전 고유 벡터의 진동모드의 선형결합으로 표시될 수 있다고 가정하면⁽⁴⁾ 다음과 같이 된다.

$$\{\Delta \phi\}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \phi_{ok} \quad (6)$$

여기서 α_{ki} 는 i 차 모드에 대한 k 차 모드의 감도 계수이다.

$\{\phi_o\}_i^T [\Delta M] \{\phi_o\}_j = \Delta M_{ij}$ 으로 나타내면 일반질량 m_{ii} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} m_{ii} &= m_{oii} + 2\alpha_{ii} m_{oii} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 m_{oii} + \Delta M_{ii} \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{ik} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{qk} \end{aligned} \quad (7)$$

또한 정규화된 일반질량은 1이므로 α_{ii} 는 다음과 같이 표현된다.

$$1 = 1 + 2\alpha_{ii} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 + \Delta M_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{ik}$$

$$+ \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{qk} \quad (8)$$

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 + \Delta M_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{ik} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{qk} \right) \quad (9)$$

한편 m_{ij} 는 다음과 같이 표현된다.

$$m_{ij} = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j$$

$$\begin{aligned} &= \{\phi_o + \Delta\phi\}_i^T [M_o + \Delta M] \{\phi_o + \Delta\phi\}_j \\ &= m_{oij} + \alpha_{ij} m_{oii} + \alpha_{ji} m_{oij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} m_{okk} \\ &+ \Delta M_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta M_{jk} \\ &+ \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta M_{pk} \end{aligned} \quad (10)$$

정규화된 일반질량 $m_{oij} = 0$, $m_{oii} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = & - \left\{ \Delta M_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta M_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta M_{jk} \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta M_{pk} \right\} - \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} \end{aligned} \quad (11)$$

이다.

2.3 질량 및 강성변경에 의한 일반강성의 해석
정규화시킨 일반강성은 다음과 같다

$$k_{oii} = \{\phi_o\}_i^T [K_o] \{\phi_o\}_i = \lambda_o = \omega_{oi}^2 \quad (12)$$

$$k_{ii} = \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i = \lambda = \omega_i^2 \quad (13)$$

여기서 k_{oii} , k_{ii} 는 각각 i 차 모드의 변경 전 및 변경 후 일반강성이며 ω_i^2 , ω_{oi}^2 는 각각 i 차 모드의 변경 전 및 변경 후의 고유진동수이다. 또한 변경 후 i 차 모드의 일반강성은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} k_{ii} = \omega_i^2 = & \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_i \\ = & \{\phi_o + \Delta\phi\}_i^T [K_o + \Delta K] \{\phi_o + \Delta\phi\}_i \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $\{\phi_o\}_i^T [\Delta K] \{\phi_o\}_i = \Delta K_{ij}$ 으로 나타내면 일반강성 k_{ii} 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} k_{ii} = & k_{oii} + \alpha_{ii} k_{oii} + \Delta K_{ii} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{ik} \\ & + \alpha_{ii} k_{oii} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 k_{okk} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{ki} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{qk} \quad (15)$$

한편 k_{ij} 는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} k_{ij} = & \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j \\ = & \{\phi_o + \Delta\phi\}_i^T [K_o + \Delta K] \{\phi_o + \Delta\phi\}_j \\ = & k_{oij} + \alpha_{ij} \omega_{oi}^2 + \Delta K_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta K_{ik} + \alpha_{ji} \omega_{oj}^2 \\ & + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} \omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{kj} \\ & + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta K_{pk} \end{aligned} \quad (16)$$

정규화된 일반강성 $k_{oij} = 0$, $k_{ij} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} \omega_{oi}^2 + \alpha_{ji} \omega_{oj}^2 = & \Delta K_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta K_{ik} \\ & + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj} \omega_{ok}^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{kj} \\ & + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta K_{qk} \end{aligned} \quad (17)$$

이 된다.

2.4 반복법을 이용한 감도 계수 해석

질량 및 강성 변경에 의한 진동모드 변화가 없다고 가정하여 1차 감도 계수 α_{ii} , α_{ij} 를 구하고 반복법을 이용해 감도 계수 α_{ij} , α_{ij} 를 수렴할 때까지 구한다.

$\alpha_{ij}(m)$ 은 m 번 반복해서 구한 감도 계수라고 정의하면 식 (9), (11)과 (17)으로부터 일차 및 $(m+1)$ 차 감도 계수는 다음과 같이 된다.

$$\alpha_{ii}(1) = -\frac{\Delta M_{ii}}{2} \quad (18)$$

$$\alpha_{ij}(1) = \frac{-\Delta M_{ij} \omega_{oj}^2 + \Delta K_{ij}}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}(m+1) = & -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2(m) + \Delta M_{ii} \right. \\ & \left. + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{ik} \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{qk} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\alpha_{ij}(m+1) = \frac{1}{\omega_{oi}^2 - \omega_{oj}^2} \left\{ \Delta K_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \right.$$

$$\begin{aligned} & \Delta K_{kj} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta K_{jk} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \\ & \Delta K_{qk} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta K_{qk} \\ & + \sum_{k=1}^n \omega_{ok}^2 \alpha_{ki}(m) \alpha_{kj}(m) \left\} - \frac{\omega_{oj}^2}{\omega_{oj}^2 - \omega_{oi}^2} \right. \\ & \left. \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \alpha_{kj}(m) + \Delta M_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{kj} \right. \right. \\ & + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}(m) \Delta M_{ik} \\ & \left. \left. + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi}(m) \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}(m) \Delta M_{qk} \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

여기서 $\alpha_{ii}(1)$, $\alpha_{ij}(1)$ 의 결과는 유한요소법의 Fox이론⁽⁴⁾과 같음을 알 수 있다.

2.5 고유 진동수 및 진동모드 변화 해석

고유진동수 변화는 식 (15)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \omega_i^2 &= \omega_{oi}^2 (1 + 2\alpha_{ii}) + \sum_{k=1}^n \omega_k^2 \alpha_{ki}^2 + \Delta K_{ii} \\ &+ 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{ik} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta K_{qk} \quad (22) \end{aligned}$$

진동모드의 변화는 식 (6)으로부터 다음과 같이 된다.

$$\{\phi\} = \{\phi_o\} + \{\Delta\phi\}_i = \{\phi_o\} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \phi_{ok} \quad (23)$$

3. 적용 예

Fig. 1은 위에서 해석한 이론을 적용하기 위해 사용한 외팔보의 모델을 나타낸다. 변경전의 외팔보의 질량, 길이, 탄성계수는 1로 하였으며 질량과 강성을 동시에 변화를 주기 위해서 5번 요소의 단면을 20% 감소시켜 EI는 48.8%, 질량은 20%를 감소시켰고 10번 요소는 10번 요소의 질량만 100% 증가시켜 감도 해석을 하였다.

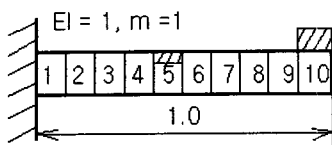


Fig. 1 Model of cantilever

Fig. 2는 3 자유도계의 모델로 변경 전 질량은 각각 2kg, 1kg, 1kg과 강성은 2N/m, 1N/m, 1N/m로 하였으며 변경 후 질량은 2kg, 1kg, 1.5kg과 강성은 2N/m, 2N/m, 1N/m로 하여 감도 해석을 하였다.

변화량에 대한 예측 정도 E_{st} 는 아래와 같이 나타내었다.

$$E_{st} = \frac{(z_p - z_o)}{(z_e - z_o)} \quad (24)$$

여기서 z_p 는 구조 변경 후 예측치, z_e 는 구조 변경 후 이론치, z_o 는 구조 변경 전 이론치이며 E_{st} 가 1에 가까울수록 정도가 좋다.

4. 결과 및 고찰

4.1 고유진동수 변화 검토

Table 1은 외팔보의 5번 요소의 단면을 20% 감소하였고 10번 요소에 질량을 100% 추가하였을 때 4차까지 고유진동수 예측정도를 나타낸 그림이다. Fox이론보다 새로 제시한 방법이 구조변경 후 재해석치와 잘 일치함을 알 수 있다. 이는 여기서 제안한 방법은 구조 변경 후 진동모드의 변화량까지 고려하여 고유진동수를 구했으나 Fox이론은 구조 변경 후에도 진동모드가 변하지 않는다고 가정하였기 때문에 오차가 커졌다.

Table 2는 질량 및 강성을 동시에 변경하기 위해 3자유도계의 세 번째 질량에 0.5kg을 추가하고 두 번째 스프링 강성을 1N/m에서 2N/m로 변

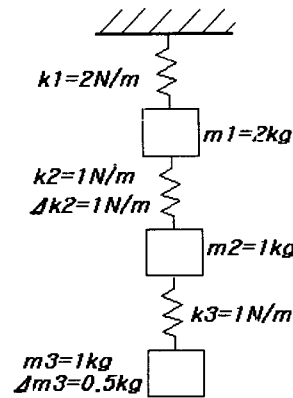


Fig. 2 Model of 3 degree of freedom

Table 1 Comparison of natural frequencies by modifying structure in cantilever beam

	mode No.	original	modify		Est. (%)
			exact	predict	
Fox	1	3.513	2.937	2.815	121.18
	2	22.036	19.390	18.572	130.91
	3	61.714	57.880	56.216	143.40
	4	121.108	112.747	110.780	123.52
Proposed	1	3.513	2.937	2.933	100.69
	2	22.036	19.390	19.391	99.96
	3	61.714	57.880	57.882	99.95
	4	121.108	112.747	112.748	99.99

Table 2 Comparison of natural frequencies by modifying structure in 3 D.O.F model (rad/sec)

	mode No.	original	modify		Est. (%)
			exact	predict	
Fox	1	0.5053	0.5012	0.5117	-156.09
	2	1.1642	1.1333	1.2979	-432.69
	3	1.6997	2.0324	2.1935	148.42
Proposed	1	0.5053	0.5012	0.5012	100.00
	2	1.1642	1.1333	1.1333	100.00
	3	1.6997	2.0324	2.0324	100.00

경하였을 때 3차까지 고유진동수 예측정도를 나타낸 그림이다. 여기서도 Fox이론보다 새로 제안한 방법이 구조 변경 후 재해석치와 잘 일치함을 알 수 있다.

4.2 진동모드의 변화 검토

Fig. 3은 외팔보의 진동모드 변화를 나타낸 그림으로 Fox방법은 외팔보 자유단으로 갈수록 오차가 증가하나 제안한 방법은 재 해석치와 잘 일치하여 두 곡선이 겹쳐 보임을 알 수 있다.

Fig. 4는 3자유도계의 진동모드 변화를 질량위치에 따라 나타낸 그림으로 여기서도 Fox 방법은 오차가 증가하였지만, 제안한 방법은 재 해석치와 잘 일치하여 두 곡선이 겹쳐 보임을 알 수 있다.

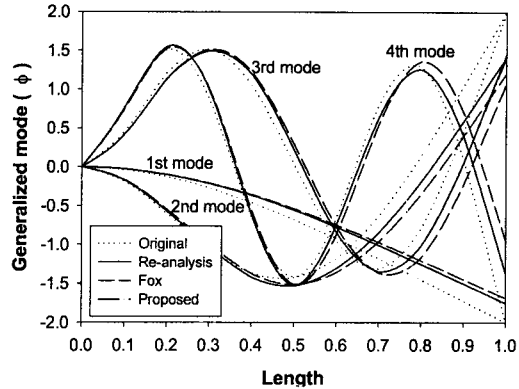


Fig. 3 Variation of mode shape by modifying structure in the cantilever beam

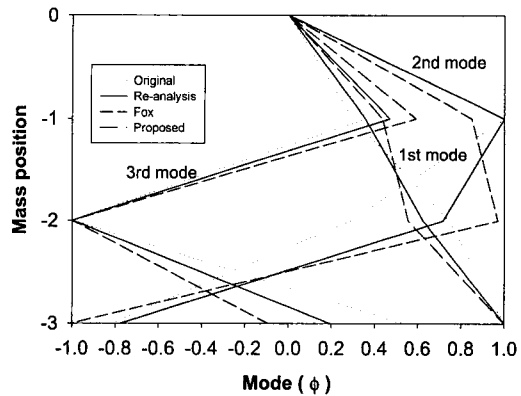


Fig. 4 Variation of mode shape by modifying structure in the 3 D.O.F model

5. 결론

질량 및 강성의 변경에 따른 구조물의 감도 해석을 새로 제안한 방법을 사용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 구조 변경 시 진동모드 변화량을 고려한 일반질량, 일반강성 및 감도 계수 변화를 비선형 부분까지 고려하여 해석하였으며 반복법을 사용하여 감도 계수를 구하는 방법을 제시하였다.
- (2) 감도 계수를 이용하여 고유진동수 및 진동모드 변화량을 보다 정확히 예측할 수 있는 알고리즘을 개발하였다.
- (3) 알고리즘을 구조 변경한 외팔보와 3자유도계에 적용한 결과 기존의 Fox이론 보다 고유진동수 및 진동 모드 변화량을 잘 예측하였다.

후 기

본 연구는 2000학년도 경기대학교 교원교비 해외파견 지원에 의하여 수행되었음.

참고문헌

- (1) Nelson, R.B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," AIAA, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.
- (2) Mills-Curran, W.C., 1988, "Calculation of Eigenvector Derivatives for Structure with Repeated Eigenvalues," AIAA, Vol. 26, No. 7, pp. 867~871.
- (3) Rudisill, C.S., 1974, "Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix," AIAA, Vol. 12, No. 5, pp. 721~722.
- (4) Fox, R.S., and Kapoor, M.P., 1968. "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors," AIAA, Vol. 6, No. 12, pp. 2426~2429.
- (5) Brandon, J., 1991, "Second-Order Design Sensitivities to Assess the Applicability of Sensitivity Analysis," AIAA, Vol. 29, No. 1, pp. 135~139.
- (6) Wang, B.P., 1991, "Improved Approximate Methods for Computing Eigenvector Derivatives," AIAA, Vol. 29, No. 6, pp. 1018~1020.
- (7) Wang, B.P. and Polkey, W.D., 1986, "Eigenvalues Reanalysis of Locally Modified Structures Using a Generalized Rayleigh's Method," AIAA, Vol. 24, No. 6, pp. 983~990.
- (8) 민현기, 탁태호, 이장무, 1997, "직접미분법을 이용한 현가장치의 기구학적 민감도해석," 한국자동차학회논문집, 제5권, 제1호, pp. 38~48.
- (9) 백성남, 지태한, 박영필, 1996, "체결력에 따른 볼트 결합부의 동적 파라미터 해석," 대한기계학회논문집, 제20권, 제1호, pp. 53~67.
- (10) 박윤식, 지영춘 1995, "고유치 오차 최소화 기준에 따른 실험데이터에 의한 유한요소 모델 개선," 대한기계학회논문집, 제19권, 제2호, pp. 363~373.
- (11) 이정윤, 오재웅, 1998, "설계파라미터 변경에 따른 연속계의 고유진동수 및 고유벡터 변화량 예측," 대한기계학회논문집, 제22권, 제6호, pp. 1073~1078.