구조물 동적시스템 재현기법

Structural Dynamic System Reconstruction

김 형 윤
(Hyeung-Yun Kim)

Abstract : To determine the natural frequencies and damping ratios of composite laminated plates, we present an efficient modal parameter estimation technique by developing residual spectrum based structural system reconstruction. The modal parameters can be estimated from poles and residues of the system transfer functions, derived from the state space system matrices. From vibration tests on cross-ply and angle-ply composite laminates, the natural frequencies and damping ratios can be estimated using the modal coordinates of the structural dynamic system reconstructed from the experimental frequency response functions. These results are compared with those of finite element analysis and single-degree-of-freedom curve fitting.

Keywords : system reconstruction, residual spectrum, structural vibration, frequency response function, modal parameter estimation, composite laminate

I. 서론

정확한 모달변수는 복합재료 구조물의 제어 및 건전성 검증과 역학적 물성치를 확인하는데 있어서 중요하다. 구조물의 모달변수는 주파수 전달함수로부터 multiple reference orthogonal polynomial 및 polyreference frequency domain 등의 curve-fitting방법에 의하여 일반적으로 구해진다. 이러한 방법들은 단일주파수 밴드 및 저차계 진동시스템 해석에 있어서 적절하나, 상태변수에 근거한 손상확인 및 제어기 설계에는 적절하지 못하다. 따라서 구조물 동적시스템 재현기법으로 측정 주파수 전달함수에서 모달변수를 효과적으로 추정하는 기법이 요구된다. 고차원 다변수 시스템 구현에 있어서 기저시스템 확인 (Subspace System Identification)기법들이 제시되어 왔다. Kalman 등은 임펄스응답 시간 데이터로부터 시스템 행렬을 구하는 방법을 제시하였으며, 스토케스틱 시스템에 대하여 잡음을 줄이기 위하여 SVD(singular value decomposition) 기법을 적용한 ERA 및 ERA/DC(Eigensystem Realization Algorithm /Data Covariance) 등이 개발되었다[1]. Liu 등은 ORSE (Observability Range Space Extraction)기법을 제안하였으며[2], 주파수 영역에서 ORSE기법을 확장한 FORSE 방법을 개발하였다[3][4].

복합재 구조물의 역학적 거동을 이해하는 것은 복합재료 구조물 설계/적용에 있어 중요함으로 역학적 물성치를 확인하고자 하는 연구가 많이 수행되어 왔다. 복합재료 물성치를 확인하는 방법은 정적시험의 대안으로 수치계산을 포함한 진동시험 방법이 널리 적용되고 있다. 이러한 방법들은 Rayleigh-Ritz, Superposition 및 유한요소 해석 등을 일반적으로 사용된다. 그러나 시스템확인 기법을 적용하여 복합재 구조물의 모달변수를 구하고자 하는 연구는 많지 않다[5].

본 논문은 상태계 시스템확인 기법인 구조물 동적시스템 재현기법을 개발하여 복합재료 판의 모달변수를 구하였다. 모달변수는 동적시스템 재현기법으로 진동 스팩트럼(spectrum) 데이터에서 시스템 행렬을 구현하여 시스템 행렬의 특성치(eigenvalue)로부터 구하였다. 복합재료 판의 진동시험에서 구한 고유진동수 및 감쇠비를 재현기법에서 구한 결과와 비교 검토하였다. 유한요소 해석과 SDOF(single-degree-of-freedom) 근사화 방법을 적용하여 제시된 기법의 효과를 검증하였다.

접수일자 : 2001. 11. 10., 수정완료 : 2002. 2. 14.
김형윤 : 국방과학연구소 기-4-3(hyukim@postech.ac.kr)

II. 잔류 스펙트럼함수에 의한 기저시스템 확인

이 절에서는 스펙트럼함수 데이터를 이용하여 가관측 영역공간(observability range space)을 기학학적 개념으로 살펴보고자 한다. 기저시스템 확인에 있어서 시스템 행렬 추정치는 가관측 행렬에서 구하고, 입력행렬 추정치는 주파수 영역의 입출력 관계로부터 시스템 행렬 변수화(parameterization) 방법으로 구하였다. 이산시스템의 상태변수 모델은 다음과 같이 나타내어진다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (1)$$

여기서 $x(k)$, $y(k)$ 및 $u(k)$는 시스템 상태, 측정 및 입력 벡터이다. 또한 상태변수 시스템이 제어 및 관측 가능한 시스템이며, D=0으로 가정한다.

1. 잔류 스펙트럼 추정

진동 실험에서 구한 discrete변환된 입력 및 출력의 이산신호 데이터를 $\tilde{u}(z)$와 $\tilde{y}(z)$하고 (1)에서 q단계 예측모델의 입력 및 출력 벡터를 $u_q(z)$ 및 $y_q(z)$하면 주파수 영역에서 확장된(augmented) q단계 예측 모델식은 다음과 같이 나타내어진다.

$$Y(z) = \tilde{O}_q X(z) + \tilde{H}_q U(z) \quad (2)$$

여기서,

$$Y(z)=[\tilde{y}_q(z),\tilde{y}_q(z)e^{j2\pi/M},\ldots,\tilde{y}_q(z)e^{j2\pi(q-1)/M}] \quad (3)$$
$$U(z)=[\tilde{u}_q(z),\tilde{u}_q(z)e^{j2\pi/M},\ldots,\tilde{u}_q(z)e^{j2\pi(q-1)/M}]$$

또한 $\tilde{O}_q\in\Re^{qn_y\times n_x}$ 및 $\tilde{H}_q\in\Re^{qn_y\times n_u}$ 는 가관측(observability) 및 Toeplitz행렬로 다음과 같다.

$$\tilde{O}_q=\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{q-1}\end{bmatrix},\quad \tilde{H}_q=\begin{bmatrix}D & 0 & \cdots & 0\\CB & D & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\CA^{q-2}B & CA^{q-3}B & \cdots & D\end{bmatrix} \quad (4)$$

가관측 행렬이 갖는 영역공간(range space)은 직교 연산자(orthogonal projector) $P_U^{\perp}=I-U^H(UU^H)^{\dagger}U$ 를 사용하여 구한다. 여기서 첨자 †와 H는 Moore-Penrose역행렬과 Hermitian 연산자를 나타낸다. (2)의 상관함수(covariance) 행렬에 대하여 직교연산자를 적용하고 $UP_U^{\perp}=0$ 관계로부터 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\tilde{O}_q XP_U^{\perp}X^H\tilde{O}_q=YP_U^{\perp}Y^H \quad (5)$$

여기서, $YP_U^{\perp}Y^H=YY^H-YU^H(UU^H)^{\dagger}UY^H$ 이다.

잡음을 갖는 데이터의 스펙트럼 추정치는 일정 시간에서 평균화된 Periodogram $\{S_{YY}^M,S_{UU}^M,S_{YU}^M\}$ 으로 주어진다[6]. 여기서 M은 주파수 데이터 개수를 나타낸다. 가관측 영역공간을 구하기 위한 잔류 전력밀도 추정치 L_q와 주파수 이동행렬 I_q을 정의하면 다음과 같다.

$$L_q\triangleq E[YY^H-YU^H(UU^H)^{\dagger}UY^H]$$
$$=L_{YY}-L_{YU}L_{UU}^{\dagger}L_{YU} \quad (6)$$

여기서

$$\{L_{YY},L_{UU},L_{YU}\}=\sum_{z=1}^{M}I_q(z)\otimes\{S_{YY}^M,S_{UU}^M,S_{YU}^M\} \quad (7)$$

$$I_q\triangleq\begin{bmatrix}1 & e^{j2\pi z/M} & \cdots & e^{j2\pi z(q-1)/M}\\e^{j2\pi z/M} & 1 & \cdots & e^{j2\pi(q-2)z/M}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\e^{j2\pi z(q-1)/M} & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix} \quad (8)$$

⊗는 Kronecker matrix product를 나타내며 E는 Expectation연산자이다.

2. 시스템 행렬 추정

시스템이 최소화(minimal)되어 있고 가관측 행렬이 non-singular하면 시스템행렬 A는 다음과 같이 구해진다.

$$A=O_{q-1}^{\dagger}\bar{O}_{q-1} \quad (9)$$

여기서, $O_{q-1}=\begin{bmatrix}C\\CA\\\vdots\\CA^{q-2}\end{bmatrix},\ \bar{O}_{q-1}=\begin{bmatrix}CA\\CA^2\\\vdots\\CA^{q-1}\end{bmatrix}$ 이다.

잔류 전력밀도함수 추정치에 SVD를 적용하면 다음과 같다.

$$\Re[L_q]=[V\quad V_n]\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\0 & \Sigma_n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}V\\V_n\end{pmatrix} \quad (10)$$

가관측 행렬의 기저공간(subspace) 영역인 $V\in\Re^{qn_y\times n_x}$ 과 $V_n\in\Re^{qn_y\times(qn_y-n_x)}$ 은 unitary행렬이다. 또한, $\Sigma=diag[\cdots,\sigma_i,\cdots]\in\Re^{n_x\times n_x}$ 는 singular value $\sigma_i, i=1,\ldots,n_x$ 갖고, $\Sigma_n=diag[\cdots,\sigma_{n_x+l},\cdots]\in\Re^{(qn_y-n_x)\times(qn_y-n_x)}$ 는 $\sigma_{n_x+l}, i=1,\ldots,qn_y-n_x$ 를 갖는 대각 행렬이다. 시스템 차수 n_x에 대하여 주어진 singular value의 허용치 $\bar{\sigma}$를 선택하면 $\bar{\sigma}$는 다음과 같다.

$$\sigma_i>\bar{\sigma},\ i=1,\ldots,n_x \text{ 이고}$$
$$\sigma_{n_x+l}<\bar{\sigma},\ i=1,\ldots,qn_y-n_x$$

가관측 행렬 O_q의 기저공간 행렬 V로부터 시스템 행렬 $\tilde{A}$ 및 $\tilde{C}$추정치를 (9)와 같이 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{A}=V_{q-1}^{\dagger}\bar{V}_{q-1},\ \tilde{C}=V_1 \quad (11)$$

그러나, 잡음을 갖는 데이터에서 나머지 시스템행렬 $\tilde{B}$ 및 $\tilde{D}$를 구하기는 쉽지 않다. 더구나 Inverse Discrete Fourier 변환시 Window필터로 인하여 임펄스응답이 왜곡될 수 있다. 여기서는 스펙트럼 데이타로부터 시스템 행렬 $\tilde{B}$ 및 $\tilde{D}$를 구하기 위하여 주파수 영역에서 변수화 기법을 적용하였다. Auto-spectrum 추정치 S_{UU}와 Cross-spectrum 추정치 S_{YU} 관계에서 Frobenius norm을 최소화하는 $\tilde{B}$ 및 $\tilde{D}$는 다음과 같다:

$$\tilde{B},\tilde{D}=\arg\min_{\tilde{B}\tilde{D}}\left\|S_{YU}(z)-\left[\tilde{C}\left(e^{-j2\pi z/M}I_{n_x}-\tilde{A}\right)^{-1},I_{n_u}\right]\begin{bmatrix}\tilde{B}\\\tilde{D}\end{bmatrix}S_{UU}(z)\right\|_F^2 \quad (12)$$

Kronecker matrix product의 $vec(ABC)=(C^T\otimes A)\,vec(B)$ 관계를 이용하여 (12)을 정리하면 다음과 같다.

$$vec\left(S_{YU}(z)\right)=\left[S_{UU}^T(z)\otimes\left[\tilde{C}\left(e^{-j2\pi z/M}I_{n_x}-\tilde{A}\right)^{-1},I_{n_u}\right]\right]vec\begin{bmatrix}\tilde{B}\\\tilde{D}\end{bmatrix}. \quad (13)$$

(13)에서 $Q(z) \triangleq \left[\tilde{C}\left(e^{\lambda_1 z}\Phi_{n_x}\cdots\tilde{A}\right)^{L}, I_{n_x}\right]$을 정의하고를 이용하여 $vec[\tilde{B}, \tilde{D}]^T$ 를 구하면 다음과 같다.

$$vec\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ \tilde{D}\end{bmatrix}_z = \frac{vec[Q^H(z)S_{YU}(z)S_{UU}^H(z)]}{[S_{UU}^H(z)S_{UU}(z)]^T \otimes [Q^H(z)Q(z)]}. \quad (14)$$

시스템 행렬 $\tilde{B}$ 및 $\tilde{D}$를 각 주파수 점을 고려하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ \tilde{D}\end{bmatrix} = \sum_{z=1}^{M} \Re\left(\frac{Q^H S_{YU} S_{UU}^H}{[Q^H Q][S_{UU}^H S_{UU}]}\right). \quad (15)$$

구조물 시스템의 진동수 ω_{ni}와 감쇠비 ζ_{ni}는 시스템 행렬 $\tilde{A}$의 complex conjugated eigenvalue로부터 다음식과 같이 구한다.

$$\sigma_i \pm j\omega_i = -\zeta_i\omega_{ni} \pm j\omega_{ni}\sqrt{1-\zeta_i^2} \quad (16)$$

III. 재현기법에 의한 복합재료 판의 모달변수 확인

복합재료 판의 고유진동수 및 감쇠 비를 확인하기 위하여 잔류 전력밀도에 근거한 구조물 동적시스템 재현기법을 적용하였다. 여러 가지 적층각도의 복합재료 판에 대한 진동시험을 통하여 전력밀도함수와 해당 주파수응답함수(Frequency Response Function)를 구하였다. 단면 비 1.5를 갖는 사각형 복합재료 판은 탄소섬유/에폭시의 프리프레그로 제작되었으며 적층각도는 다음과 같다: [0\90]s, [45\-45\45\-45]s, [0\90\0\90]s와 [0\45\-45\90]2s. 표 1은 탄소섬유\에폭시 프리프레그에 대한 역학적 물성치를 나타낸다.

그림 1은 복합재료 판 진동실험을 나타낸다. 진동실험은 끝단지지 복합재료 판을 임펄스 햄머로 가진하고 비접촉 변위센서로 자유단의 변위를 측정하였다. 측정된 아날로그 신호를 512Hz로 샘플링한 후 동특성 분석장비로부터 전력밀도함수를 구하였다.

구조물 동적시스템 재현기법으로 측정된 주파수 응답함수에서 시스템행렬에 의한 주파수함수를 구현하였다. 그림

표 1. 카본/에폭시 프리프레그 소재의 역학적 특성.
Table 1. Mechanical properties of carbon/epoxy prepreg lamina.

Properties	Symbol	Value
Young's modulus in fiber direction	E_1	114.7×10^9Pa
Young's modulus in fiber direction	E_2	7.58×10^9Pa
Shear modulus	G_{12}	4.77×10^9Pa
Poisson ratio	μ_{12}	0.28
Volume density	ρ	1510kg/m^3
Damping capacity	φ_1, φ_2, φ_{12}	1.4%, 4.9%, 7.4%
Volume fraction of fiber	V_f	0.6

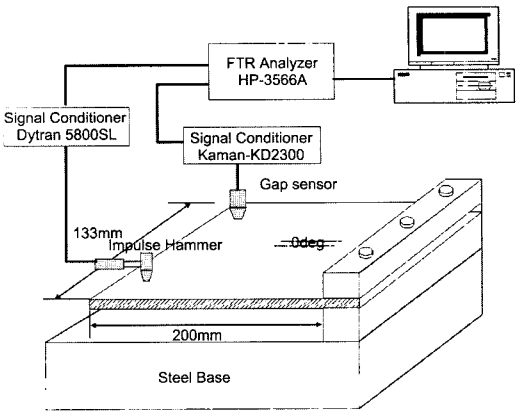

그림 1. 전동시험 개략구성도.
Fig. 1. A schematic drawing of the vibration test set-up.

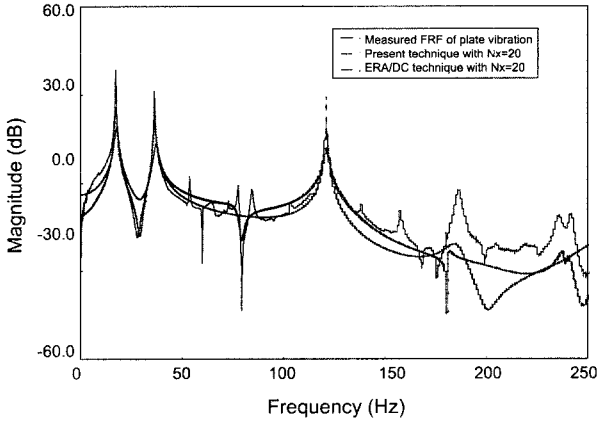

그림 2. [0/90]s 적층판 FRF의 재현기법 결과 비교.
Fig. 2. A comparison of FRFs of the [0/90]s laminate for different methods.

2는 재현된 주파수 함수를 ERA/DC[1] 결과와 비교한 그림이다. 주파수 170Hz 이상의 공진점들을 제외한 주파수 영역에서 측정 주파수 응답함수를 정확하게 재현함을 알 수 있다. 그러나 ERA/DC기법은 170Hz 이상의 주파수영역에서 정확도가 떨어지며 저주파수 대역의 공진점에서 피크치가 완만함을 알 수 있다. 그러나 제시된 재현기법은 모든 주파수대역에서 측정 주파수 응답함수를 상대적으로 정확하게 재현함을 알 수 있다.

그림 3은 시스템 차수 n_x에 대하여 재현기법으로 구한 시스템행렬의 주파수함수 특성을 검토하였다. 시스템 차수 n_x가 증가함에 따라 감쇠 비가 작아짐을 알 수 있다. 즉 n_x가 증가함에 따라 재현된 주파수함수가 공진점에서 예리해짐을 알 수 있다. 따라서 시스템 차수 n_x는 상태계 시스템 확인기법의 정확도에 있어서 중요한 변수이며, 주어진 주파수 응답함수의 경우에 대하여 시스템 차수는 20 이상이 적절하였다.

그림 4는 예측모델의 차수 q변화에 대하여 재현된 시스템 행렬의 주파수함수 공진점에 있어서 감쇠비의 추정치를 나타낸다. 시스템 차수 n_x=20에 대하여, 예측모델의 차수가 50, 70, 90, 200및 300일때 모든 공진점에서 감쇠비의 평균은 각각 3.98%, 2.34%, 1.91%, 1.01% 및 0.91%을 상대적으로 나

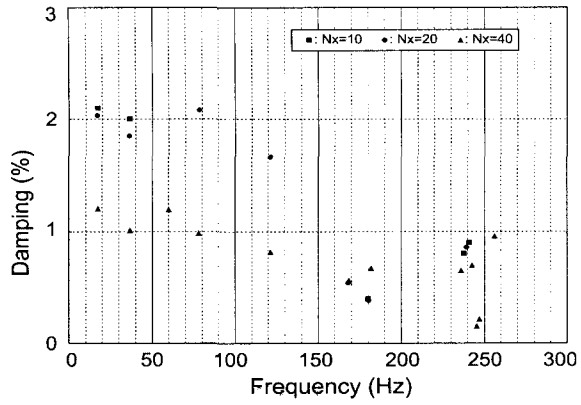

그림 3. 시스템 차수에 대한 [0/90]s 적층판의 고유진동수 및 감쇠비 특성분해도.

Fig. 3. Eigenresolution for natural frequencies and damping ratios of the [0/90]s laminate for differing the system orders(q=200).

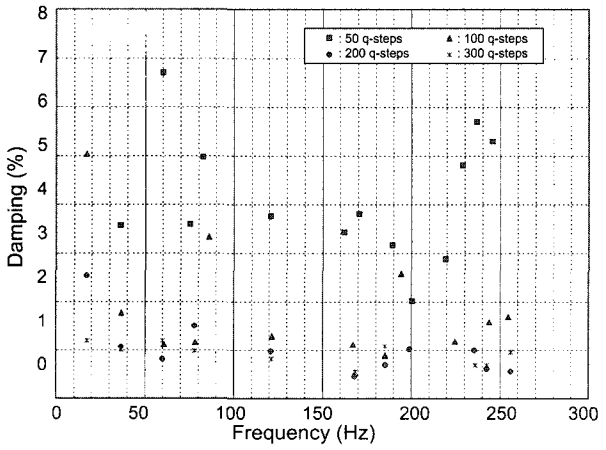

그림 4. q단계-예측 차수에 대한 [0/90]s 적층판의 고유진동수 및 감쇠비 특성분해도.

Fig. 4. Eigenresolution for natural frequencies and damping ratios of the [0/90]s laminate for q-step prediction orders (n_x=20).

타낸다. 예측모델의 차수 q가 증가함에 따라 주파수 함수의 평균 감쇠비가 감소함을 알 수 있다. 주어진 주파수 응답함수의 경우에 대하여 예측모델의 차수는 200 이상이 적절하였다.

제시된 구조물 동적시스템 재현기법의 효과를 확인하기 위하여 유한요소 해석과 SDOF 근사화 방법으로 구한 고유진동수 및 감쇠비를 비교하였다. 표 2는 각 방법에 의한 복합재료 적층판의 고유진동수 및 감쇠 비를 나타낸다. 적용된 유한요소 해석은 12자유도를 갖는 4점 쉘 요소를 사용하였으며, 비 감쇠비(specific damping capacity) 개념을 적용하였다[7]. 고유진동수와 감쇠비는 질량 및 강성 행렬의 특이 값(eigenvalue)으로 구하였다.

고유진동수 및 감쇠비를 추정하는데 있어서 상대오차는 SDOF근사화 및 유한요소해석 결과와 비교하여 각각 1%와 3%를 갖는다. 감쇠비에 있어서 예측모델 차수 q로 인하여 제시된 기법은 정확도가 다소 떨어진다. 그러나 SDOF근사

표 2. 여러 적층각도 적층판의 고유진동수 및 감쇠비에 있어서 다른 모달변수 추정 기법과 제시된 기법의 비교.

Table 2. Estimated natural frequencies and damping ratios of the composite laminates in the comparison with the results of other modal-parameter estimation methods(n_x=20).

Lay-ups	Present	FEM	SDOF
[0/45/-45/90]2s			
1st mode	55.47Hz	58.39Hz	55.69Hz
	0.47%	0.13%	0.17%
2nd mode	107.3Hz	111.4Hz	107.2Hz
	0.32%	0.19%	0.15%
[0/90/0/90]s			
1st mode	28.39Hz	29.55Hz	28.75Hz
	0.10%	0.12%	0.11%
2nd mode	42.74Hz	41.52Hz	43.69Hz
	0.80%	0.34%	0.28%
[45/-45/45/-45]s			
1st mode	18.29Hz	17.92Hz	18.50Hz
	0.45%	0.25%	0.34%
2nd mode	64.65Hz	63.51Hz	65.88Hz
	0.25%	0.15%	0.14%

화 방법 및 유한요소해석으로 구한 고유진동수는 제시된 시스템 재현기법의 고유진동수와 거의 일치한다. 하여튼 감쇠비에 있어서 각 기법상에 약간의 차이가 있음을 알 수 있다. 제시된 기법에서 구한 감쇠비는 SDOF 및 유한요소 해석에 의한 값보다 일반적으로 크다. 이것은 주파수 응답함수 공진에서 주파수 밴드폭을 고려하여 시스템 차수와 예측모델 차수 q를 증가시켜서 감쇠비를 감소시킬 수 있다.

IV. 결론

복합재료 구조물에 대한 건정성 및 물성치를 확인하는데 있어서 구조물 진동시험 스펙트럼 데이터로부터 모달변수를 추정하는 기법을 제공하였다. 구조물 모달변수를 추정하기 위하여 잔류 스펙트럼에 근거한 구조물 동적시스템 재현기법을 개발하였다. 제시된 재현기법은 단계 예측모델의 주파수 이동행렬을 직접 스펙트럼 추정치에 외적(outer-multiply)하고, 구해진 잔류 전력밀도 함수에 SVD 및 ORSE기법을 적용하여 구하였다. 재현기법으로 구해진 시스템행렬의 특이치로부터 복합재료 구조물의 고유진동수 및 감쇠비는 쉽게 구할 수 있다.

고유진동수와 감쇠비 추정치의 정확도를 확인하기 위하여 시스템 차수 와 예측모델의 차수 변화를 검토하였다. 결과적으로 직교/각도 섬유 복합재료 판의 고유진동수 및 감쇠비는 제시된 모달변수 추정기법을 사용하여 측정 주파수 응답함수로부터 직접적으로 쉽게 구할 수 있었다. 재현된 시스템 행렬의 주파수 함수에 대하여 SDOF근사화 및 유한요소 해석으로 구한 결과로 정확도를 비교 검토하였다.

참고문헌

[1] J. N. Juang and R. S. Pappa, "An eigensystem realization algorithm using data correlation (ERA/DC) for modal parameter identification," *J. Control Theory and Advanced Technology*, vol. 4(1), pp. 5-14, 1985.

[2] K. Liu and D. W. Miller, "Time domain state space identification of structural systems," *ASME J. Dynamic Systems, Measurement Control*, vol. 117, pp. 608-618, 1995.

[3] J. N. Juang, C. W. Chen, and G. Lee, "Frequency domain state-space system identification," *Proc. of 1993 American Control Conferences*, pp. 238-241, San Francisco, CA, 1993.

[4] H. Y. Kim, "System realization using inverse discrete Fourier transformation of frequency response functions," *Proc. of International Conference on 1999 Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 758-763, Atlanta, GA, 1999.

[5] H. Y. Kim and W. Hwang, "Estimation of normal mode and other system parameters of composite laminated plates," *J. Composite Structures*, vol. 53, no. 3, pp. 345-354, 2001.

[6] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.

[7] D. X. Lin, R. G. Ni, and R. D. Adams, "Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates," *J. Composite Materials*, vol. 18, pp. 132-152, 1984.

김 형 윤

1962년 9월 26일생. 1984년 전북대학교 정밀기계과(공학사). 2001 포항공과대학교 기계과(공학박사). 1989년~현재 국방과학연구소 선임연구원. 관심분야는 지능구조물, 복합재 구조물 해석, 시스템확인, 제어응용.