The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 1, 2002
pp. 33-38

Optimality of Blocked Complete Diallel Crosses Using BIBD

Jin Kim[1], Jongsung Bae[2]

Abstract

We prove that blocked complete diallel crosses using balance incomplete block design are A-, D-, E-optimal design. Also, we provide such blocked complete diallel crosses and their average efficiency with table.

Keywords : balanced incomplete block design, blocked complete diallel crosses, A-,D-,E-optimal design

1. 서론

이면교배(diallel crosses)는 동물 또는 식물 육종학에서 자식대의 근교계통(inbred line)들간의 유전적인 성질을 분석하여 어미대의 유전적인 성질을 연구하는데 사용되는 짝짓기 계획이다.

서로 다른 특성을 갖는 p개의 근교계통이 있을 때, i번째 근교계통과 j번째 근교계통간의 교배를 (i,j), $i<j=1,\cdots,p$ 로 나타내고, 실험에 사용되는 서로 다른 교배수를 n_c라 하자. Griffing(1956)은 교배의 수에 따라 $n_c=p^2$, $n_c=p(p+1)/2$, $n_c=p(p-1)$, $n_c=p(p-1)/2$인 경우 각각 타입 I, II, III. IV로 분류하였으며 그중 타입 IV를 수정 혹은 반 이면교배(modified or half diallel cross)라 하였다. 특히, 식물 육종에서는 정역 교배간에 차이가 없으므로 $(i,j)=(j,i)$로서 타입 Ⅳ가 가장 일반적으로 사용되고 있다. Griffing의 타입 Ⅳ에서 p가 증가하면 실험할 교배의 수가 급격히 증가하여 실제로 모든 교배를 실험하기가 어려운 경우가 있다. 이런 경우 타입 Ⅳ에서 일부분의 교배($n=ps/2$, $s<p-1$)만 사용하는 이면교배실험을 부분이면교배(Partial Diallel Cross : PDC)실험이라 한다. 통계학자들은 부분이면교배 실험에 대응된다는 의미에서 타입 Ⅳ를 완전이면교배(Complete Diallel Cross : CDC)실험이라 한다.

근교계통의 수 p가 증가하면 교배수의 증가로 인하여 n개의 교배를 동일한 환경에서 동시에 실험하기가 곤란해진다. 이러한 경우는 동일한 조건하에서 실험 가능한 교배를 블록에 나누어 배치함으로써 실험오차를 줄이는 블록화 방법을 사용한다.

완전이면교배의 블록화 방법에 대한 연구로 Agarwal 과 Das(1990)는 균형된 불완비 블록계획

---

1) Course of Doctor, Information and Telecommunication Research Institute, Department of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea
E-mail : jink@chonnam.ac.kr
2) Professor, Research Institute for Basic Science, Department of Statistics, Chonnam National University, Kwangju, 500-757, Korea
E-mail : jsbae@chonnam.ac.kr

(Balanced Incomplete Block Design : BIBD)를 이용하였으며, Divecha 와 Ghosh(1994)는 삼각형 PBIBD(Partially Balanced Incomplete Block Design)를 이용하여 블록 완전이면교배를 설계하였다. Dey 와 Midha(1996)는 $\lambda_1=0$인 삼각형 PBIBD를 이용하여 설계한 블록완전이면교배가 총체적 최적(universal optimality)임을 보였다. Das, Dey 와 Dean(1998)는 특별한 모수 조건을 만족하는 삼각형 PBIBD를 이용하여 설계한 블록완전이면교배는 총체적 최적이 됨을 보였다.

본 논문에서는 완전이면교배의 블록화 방법으로 BIBD를 사용했을 때 블록완전이면교배가 A-, D-, E-최적계획이 됨을 보이고, Raghavarao(1971)에서 $v=p(p-1)/2$를 만족하는 BIBD를 찾아 블록완전이면교배와 그 효율을 표로 제시하였다.

2. 블록완전이면교배의 설계

2.1 블록화된 완전이며교배 설계방법

근교계통 p, 블록 크기 K, 블록 수 B, 교배의 반복수가 R인 블록완전이면교배 $D(p,K,B,R)$를 설계하여 보자. 완전이면교배를 블록화하기 위해 처리수 $v=p(p-1)/2$, 블록수 $b=B$, 블록크기 $k=K$, 처리반복수 $r=R$, 동반수 λ인 BIBD $d(v,b,k,r,\lambda)$를 찾아 $p(p-1)/2$개의 교배에 $1,2,\cdots,p(p-1)/2$ 번호를 아래와 같이 랜덤하게 주고, BIBD의 처리번호를 교배번호로 대치시켜 주면 블록완전이면교배를 얻을 수 있다(Agarwal 과 Das, 1990).

$1\to(1,2)\quad 2\to(1,3)\quad \cdots\quad p\to(1,p)\quad \cdots\quad p(p-1)/2\to(p-1,p)$

예제1 $p=4, B=10, R=5, K=3$인 완전이면교배를 $v=p(p-1)/2=6, b=B, r=R, k=K, \lambda$인 BIBD을 사용하여 블록완전이면교배를 설계하여 보자. $p=4$일 때 교배의 종류는 (1,2) (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) (3,4)이다. 블록완전이면교배를 설계하기 위해 $v=6, b=10, r=5, k=3, \lambda=2$인 균형된 불완비 블록 계획의 처리를 교배의 형태로 바꾸어 주면 다음과 같이 블록완전이면교배를 얻을 수 있다.

1→(1,2) 2→(1,3) 3→(1,4) 4→(2,3) 5→(2,4) 6→(3,4)

블록	BIBD	블록 CDC
B1	1 2 5	(1,2) (1,3) (2,4)
B2	2 3 4	(1,3) (1,4) (2,3)
B3	1 2 6	(1,2) (1,3) (3,4)
B4	2 3 5	(1,3) (1,4) (2,4)
B5	1 3 4	(1,2) (1,4) (2,3)
B6	2 4 6	(1,3) (2,3) (3,4)
B7	1 3 6	(1,2) (1,4) (3,4)
B8	3 5 6	(1,4) (2,4) (3,4)
B9	1 4 5	(1,2) (2,3) (2,4)
B10	4 5 6	(2,3) (2,4) (3,4)

2.2 블록완전이면교배의 모형

블록완전이면교배 $D(p,K,B,R)$ 의 모형은 다음과 같다.

$$Y = \mu\, 1_n + \Delta_1 g + \Delta_2 \beta + \varepsilon$$

여기서, Y는 $n\times 1$인 관측벡터, μ는 전체평균, 1_n은 모든 원소가 1인 $n\times 1$ 벡터, g , β는 각각 $p\times 1$과 $B\times 1$인 일반조합능력 효과와 블록 효과를 나타내는 모수 벡터이다. Δ_1, Δ_2 는 각각 $n\times p$와 $n\times B$인 g 와 β 에 대응하는 빈도행렬(incidence matrix)이고, ε은 평균이 0, 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 오차항이다. Δ_1의 (u_1, w_1)원소는 u_1번째 교배가 w_1번째 자식계통을 포함하면 1, 포함하지 않으면 0이고, $u_1 = 1,2,\cdots,n$, $w_1 = 1,2,\cdots,p$ 이다. Δ_2 의 (u_2, w_2) 원소는 u_2번째 교배가 w_2번째 블록에 있으면 1, 아니면 0이고, $u_2 = 1,2,\cdots,n$, $w_2 = 1,2,\cdots,B$이다. $G=\Delta_1'\Delta_1 = (g_{ij})$, g_{ij}는 교배 (i,j)의 반복수 R, g_{ii}는 i번째 근교계통의 출현횟수 $(p-1)R$ 이고 $\Gamma = \Delta_1'\Delta_2 = (n_{il})$이다. 여기서 n_{il} 은 i번째 자식계통이 l 번째 블록에 나타나는 횟수이고, $\sum_{i=1}^{p} n_{il} = 2K$ 이다. 일반조합능력의 효과벡터 g를 추정하기 위한 정보행렬 C는 다음과 같다.

$$C = G - (1/K)\Gamma\Gamma'$$

정리1 BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배의 정보행렬 C는 완전대칭행렬(completely symmetric matrix)이다.

(증명) 완전이면교배를 BIBD $d(v,b,k,r,\lambda)$로 블록화하는 경우

$$G=\Delta_1'\Delta_1 = \begin{pmatrix} r(p-1) & r & r & \cdots & r \\ & r(p-1) & r & \cdots & r \\ & & r(p-1) & \cdots & r \\ & \text{대칭} & & \vdots & \vdots \\ & & & & r(p-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Gamma\Gamma' &= \Delta_1'\Delta_2\Delta_2'\Delta_1 \\ &= \begin{pmatrix} (p-1)[r+(p-2)\lambda] & r+p(p-2)\lambda & \cdots & r+p(p-2)\lambda \\ & (p-1)[r+(p-2)\lambda] & \cdots & r+p(p-2)\lambda \\ \text{대칭} & & \vdots & \\ & & & (p-1)[r+(p-2)\lambda] \end{pmatrix}\end{aligned}$$

이므로

$$C = \frac{(p-2)[r(k-1)+\lambda]}{k} I + \frac{[r(k-1)-p(p-2)\lambda]}{k} J \tag{1}$$

이다. 여기서, J는 모든 원소가 1인 $p \times p$ 행렬이다.

$C\mathbf{1}=0$이고 C행렬은 (1)과 같이 $aI+bJ$형태인 대칭행렬이므로 C행렬은 $p-1$개 고유값이 $w_i=(p-2)[r(k-1)+\lambda]/k=w$이고, 정준효율인자 $e_i=w_i/r=(p-2)[r(k-1)+\lambda]/rk=e$ 이다.

BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배의 효율성의 측도인 평균효율(average efficiency)은

$$\begin{aligned} E &= \frac{Var(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)_{CRBD} \text{ 의 평균}}{Var(\widehat{g}_i-\widehat{g}_j)_{BIBD} \text{ 의 평균}} \\ &= \{\frac{2\sigma^2}{r(p-2)}\}/\{\frac{2k\sigma^2}{(p-2)}[r(k-1)+\lambda]\} \\ &= \frac{r(k-1)+\lambda}{rk}=p-1/\{(p-2)\sum_{i=1}^{p-1}e_i^{-1}\} \end{aligned} \tag{2}$$

이다(Singh 과 Hinkelmann, 1995).

예제2 예제1에서 설계된 블록완전이면교배의 정보행렬 C와 관련된 행렬들은 다음과 같다.

$$G=\begin{pmatrix} 15 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 15 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 15 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 15 \end{pmatrix} \quad \Gamma=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma\Gamma'=\begin{pmatrix} 27 & 21 & 21 & 21 \\ 21 & 27 & 21 & 21 \\ 21 & 21 & 27 & 21 \\ 21 & 21 & 21 & 27 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

고유값 $w=(p-2)[r(k-1)+\lambda]/k=8$, 평균효율인자 $E=[r(k-1)+\lambda]/rk=0.8$ 이다.

3. 블록완전이면교배의 최적성

이 절에서는 2절에서 제시한 방법을 이용하여 설계한 블록완전이면교배의 최적성을 살펴보고자 한다. Kiefer(1975)에 의해 정의된 대표적인 최적기준은 다음과 같다.

① C행렬이 완전대칭행렬이고 $tr(C)$를 최대화 : 총체적 최적(universal optimal)

② $\phi_A = (\sum_{i=1}^{v-1} e_i^{-1})^{-1}$ 를 최대화 : A-최적(A-optimal)

③ $\phi_D = \prod_{i=1}^{v-1} e_i$ 를 최대화 : D-최적(D-optimal)

④ $\phi_E = \min(e_i)$ 를 최대화 : E-최적(E-optimal)

정리2 BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배는 총체적 최적이 아니다.

<증명> (1)에 의해 C행렬은 완전대칭행렬이므로 $tr(C)$가 최대임을 보이자.

$$
\begin{aligned}
tr(C) &= rp(p-1) - \frac{1}{k} p(p-1)[r+(p-2)\lambda] = rp(p-1) - \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{b} \sum_{i=1}^{p} n_{il}^2 \\
&\le rp(p-1) - \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{b} \sum_{i=1}^{p} n_{il} = rp(p-1) - \frac{1}{k}(2bk)
\end{aligned}
$$

이다. 이때,

$$
\begin{aligned}
p(p-1)[r+(p-2)\lambda] &= p(p-1)r + p(p-1)(p-2)\lambda \\
&= 2vr + p(p-1)(p-2)\lambda = 2bk + p(p-1)(p-2)\lambda > 2bk
\end{aligned}
$$

이므로 $tr(C)$는 최대가 아님을 알 수 있다. 따라서 BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배는 총체적 최적이 아니다.

정리3 BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배는 A-,D-,E- 최적계획이다.

<증명>

① $\dfrac{p-1}{\sum_{i=1}^{p-1} e_i^{-1}} \le \sum_{i=1}^{p-1} \dfrac{e_i}{p-1}$ (조화평균≤산술평균)

(좌변) $(p-1)/\sum_{i=1}^{p-1} e_i^{-1} = e$, (우변) $\sum_{i=1}^{p-1} e_i/(p-1) = e$

(우변)=(좌변)이므로 BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배는 A-최적계획이다.

② $(\prod_{i=1}^{p-1} e_i)^{\frac{1}{p-1}} \le \sum_{i=1}^{p-1} \dfrac{e_i}{p-1}$ (기하평균≤산술평균)

(좌변) $(\prod e_i)^{\frac{1}{p-1}} = e$, (우변) $\sum e_i/(p-1) = e$

(우변)=(좌변)이므로 BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배는 D-최적계획이다.

③ C행렬이 완전대칭행렬인 경우, A-최적이면 E- 최적이다.
(Theory of optimal designs, Shah 와 Sinha, 1989, p10)
BIBD을 사용하여 설계된 블록완전이면교배의 C행렬은 완전대칭행렬이고 A-최적이므로 E-계획이다.

Raghavarao(1971)에서 제시된 BIBD중 $v = p(p-1)/2$을 만족하는 계획을 찾아 블록완전이면교배와 평균효율을 <표1>로 제시하였다.

<표1> BIBD를 사용하여 A-, D-, E-최적인 블록완전이면교배와 효율

p	B	R	K	λ	E	p	B	R	K	λ	E
4	15	5	2	1	0.60000	7	21	5	5	1	0.84000
4	10	5	3	2	0.80000	7	70	10	3	1	0.70000
4	6	5	5	4	0.96000	7	30	10	7	3	0.90000
4	15	10	4	6	0.90000	7	42	12	6	3	0.87500
5	15	6	4	2	0.83333	7	35	15	9	6	0.93333
5	45	9	2	1	0.55556	8	63	9	4	1	0.77778
5	30	9	3	2	0.74074	8	36	9	7	2	0.88889
5	18	9	5	4	0.88889	9	36	15	15	6	0.96000
5	15	9	6	5	0.92593	9	84	14	6	2	0.85714
5	10	9	9	8	0.98765	10	55	11	9	2	0.90909
6	35	7	3	1	0.71429	10	99	11	5	1	0.81818
6	15	7	7	3	0.91837	10	45	12	12	3	0.93750
6	15	8	8	4	0.93750	12	78	13	11	2	0.92308
6	35	14	6	5	0.89286	14	91	10	10	1	0.91000

References

[1] Agarwal, S.C. and Das, M.N.(1990). Use of n-ary block designs in diallel crossed evaluation, *Journal of Applied Statistics*, 17. 125-131.

[2] Das, A, Dey, A. and Dean, A.M. (1998). Optimal designs for diallel cross experiments, *Statistics & Probability Letters,* 36, 427-436.

[3] Devicha, J. and Ghosh, D.K. (1994). Incomplete block designs for complete diallel crosses and their analysis, *Journal of Applied Statistics*, 21, 5, 395-408.

[4] Dey, A. and Midha, C.K. (1996). Optimal block designs for diallel crosses, *Biometrika*, 83. 484-489.

[5] Griffing, B. (1956). Concept of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences* 9, 463-493.

[6] Kiefer, J. (1975). Construction and optimality of generalized Youden designs, In *A survey of statistical design and linear medels*, ED. J. N. Srivastava, 333-353.

[7] Raghavarao, D.(1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Dover publications.

[8] Shah K. R. and Sinha, B.K. (1989). *Theory of Optiaml Designs*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, Germany.

[9] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995). Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks, *Biometrics*, 51, 1302-1314.

[2001년 6월 접수, 2001년 12월 채택]