The Korean Communications
in Statistics Vol. 9, No. 1, 2002
pp. 21-31

A Bayesian Approach to Optimal Replacement Policy for a Repairable System with Warranty Period

Gi Mun Jung[1] and Sung Sil Han[2]

Abstract

This paper considers a Bayesian approach to determine an optimal replacement policy for a repairable system with warranty period. The mathematical formula of the expected cost rate per unit time is obtained for two cases : RFRW(renewing free-replacement warranty) and RPRW(renewing pro-rata warranty). When the failure time is Weibull distribution with uncertain parameters, a Bayesian approach is established to formally express and update the uncertain parameters for determining an optimal replacement policy. Some numerical examples are presented for illustrative purpose.

Keywords : Bayesian approach, maintenance period, minimal repair, replacement policy, RFRW, RPRW, Weibull distribution

1. 서론

보증정책(warranty policy)이란 생산자 또는 판매자가 생산, 판매한 시스템에 대해 일정기간 동안 발생하게 되는 고장에 대하여 이를 수리(repair)해 주거나 또는 교체(replacement)해 주는 것이다. 이러한 보증정책은 보증기간(warranty period)의 재생 여부에 따라 재생보증(renewing warranty)과 비재생보증(non-renewing warranty)으로 나눌 수 있으며, 소비자들이 보증기간 동안에 비용을 부담하는 정도에 따라 무료보증(free-replacement warranty), 비례보증(pro-rata warranty), 그리고 혼합보증(combination warranty)으로 구분된다. 보증기간이 있는 시스템에 대한 보전정책(maintenance policy)은 보증기간 내에서의 보증비용(warranty cost)을 최소화하기 위한 생산자 관점에서의 보전정책과 보증기간 동안 소비자가 부담해야 하는 비용과 보전기간(maintenance period)내에서의 시스템의 유지비용을 최소화하기 위한 소비자 관점에서의 보전정책으로 구분할 수 있다.

고전적인 관점에서 보증기간이 있는 시스템의 보전정책에 관한 연구들이 활발하게 진행되고 있다. Chun(1992), Jack과 Dagpunar(1994), Yeh와 Lo(2001) 등은 보증기간 내에서 생산자가 부담하게 되는 보증비용을 최소화하기 위한 생산자 측면에서의 최적의 예방보전정책(optimal preventive maintenance policy)을 제안하였으며, Jung, Lee와 Park(2000)은 소비자 측면에서 보증기간 내에서

1) Research Professor, BK21 Education Center for Transports in Systems, Chosun University, Kwangju, 501-759, Korea
E-mail : jgm@mail.chosun.ac.kr
2) Post Doctoral Researcher, BK21, Ewha Womans University, Seoul, 120-750, Korea
E-mail : hsungsil@hanmail.net

소비자가 부담해야 하는 비용과 보증기간이 종료된 이후에 발생하는 수리비용(repair cost), 예방보전비용(preventive maintenance cost) 및 교체비용(replacement cost)을 고려한 최적의 예방보전정책을 제안하였다. 또한, Sahin과 Polatoglu(1996)는 소비자 관점에서 시스템이 교체될 때까지 소비자가 부담하게 되는 비용을 최소화하기 위한 최적의 교체정책(optimal replacement policy)을 제안하였다. 그런데, 이러한 교체정책에서 고려되는 모형에서 시스템의 고장률분포는 실제로 알려지지 않거나 또는 알려진 형태라 하더라도 불확실성(uncertainty)을 나타내는 모수들을 포함하고 있으므로 이러한 문제를 해결하기 위한 베이즈 관점에서의 연구가 필요하다.

Mazzuchi와 Soyer(1996), Sheu, Yeh, Lin과 Juang(1999) 등은 보증기간이 없는 수리 가능한 시스템에 대하여 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용(expected cost rate per unit time)을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 교체정책을 제안하였으며, Han, Jung과 Kwon(2001)은 주기적인 예방보전정책의 베이즈 접근방법을 제안하였다.

본 논문에서는 Sahin과 Polatoglu(1996)가 고려한 보증기간이 있는 수리 가능한 시스템의 최적의 교체정책에 대한 베이즈 접근방법을 제안하고자 한다. 여기서 고려되는 교체정책에서 시스템은 보증기간(w)이 있으며, 이 보증기간은 재생(renewing)되고, 보증기간이 종료된 이후에 보전기간(maintenance period) x 동안에는 시스템이 고장나면 최소수리(minimal repair)를 한다. 그리고, 보증기간이 종료된 이후에 $w+x$에서 새 시스템으로 교체하며, 최소수리시간 및 교체시간은 고려하지 않는다. 이와 같이 정의되는 보증기간이 있는 시스템의 교체정책에 대해서 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 보전기간 x^*를 결정함으로써 최적의 베이즈 교체정책을 설정하는 방법을 고려한다.

2장에서는 재생보증하에서의 시스템에 대한 교체정책을 설명한다. 이를 위해서 재생무료보증(renewing free-replacement warranty : RFRW)인 경우와 재생비례보증(renewing pro-rata warranty : RPRW)인 경우에 대해서 각각 단위시간당 기대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 교체정책에 대하여 설명한다. 3장에서는 2장에서 고려한 RFRW인 경우와 RPRW인 경우의 시스템에 대하여 각각 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 교체정책과 순응적 교체정책(adaptive replacement policy)에 대하여 설명한다. 4장에서는 수치적 예를 통해서 본 논문에서 제시한 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책을 설명한다.

2. 재생보증하에서의 교체정책

w를 보증기간이라고 할 때 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생하면, 재생보증인 경우에는 보증기간이 처음부터 다시 시작된다. 이러한 재생보증은 보증기간이 종료되기 전에 시스템에 고장이 발생하는 경우 생산자가 시스템을 무료로 교체해주는 재생무료보증(RFRW)과 시스템의 사용기간에 비례하여 시스템을 교체하는데 드는 비용의 일부를 소비자가 부담하도록 하는 재생비례보증(RPRW)으로 구분된다.

시스템의 고장시간을 T라 하고, 보증기간이 종료된 이후의 보전기간을 x라 하자. 그리고, $F(t)$를 고장시간 T의 수명분포함수(life distribution function), $f(t)$를 고장시간 T의 밀도함수(density function)라고 하면, 고장률함수(hazard rate function)는 $\overline{F}(t)>0$를 만족하는 t에 대하여 $h(t)=f(t)\ /\ \overline{F}(t)$와 같이 정의된다. 여기서, $\overline{F}(t)=1-F(t)$이다.

재생보증하에서 시스템을 운용하는데 발생하는 전체기대비용(total expected cost)을 $E[C_T(x)]$ 라 하면, 이는 다음과 같이 구해진다.

$$E[C_T(x)] = E[C_W] + E[C_R] + E[C_M] + E[C_F]. \tag{1}$$

식 (1)에서 $E[C_W]$는 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생하여 이를 교체할 때 소비자가 부담하게 되는 기대비용으로 c_r을 시스템의 교체비용(replacement cost)이라 할 때

$$E[C_W] = \begin{cases} \dfrac{c_r}{w} I(w), & RPRW \text{인 경우} \\ 0, & RFRW \text{인 경우} \end{cases}$$

와 같다. 여기서, $I(w) = \int_0^w tf(t)dt$이다. 또한, $E[C_R] = c_r\overline{F}(w)$은 $w+x$에서 시스템을 새 것으로 교체하기 위한 기대비용이고, $E[C_M]$은 보증기간(w)이 종료된 이후부터 보전기간 동안에 발생되는 고장에 대해서 최소수리를 하는데 드는 기대비용으로

$$E[C_M] = c_m\overline{F}(w) \int_w^{w+x} h(t)dt$$

이며, c_m은 시스템의 최소수리비용(minimal repair cost)을 나타낸다. 그리고, $E[C_F]$는 보증기간 동안에 발생하는 시스템의 고장과 보증기간이 종료된 이후에 보전기간 동안 발생하는 시스템의 고장으로 야기되는 기대비용으로 다음과 같다.

$$E[C_F] = c_{f,w}F(w) + c_{f,m}\overline{F}(w) \int_w^{w+x} h(t)dt.$$

여기서, $c_{f,w}$는 보증기간 동안에 발생하는 고장에 의해 야기되는 비용(failure cost during warranty)이며, $c_{f,m}$은 보전기간 동안에 발생하는 고장으로 야기되는 비용(failure cost during maintenance)이다.

재생보증하에서는 보증기간이 종료되기 전에 시스템에 고장이 발생하면 즉, $T < w$이면 시스템을 새 것으로 교체하게 되고, 따라서 보증기간이 이 시점부터 새로 시작되며, 보증기간이 종료될 때까지 시스템에 고장이 발생하지 않으면, 즉 $T > w$이면, $w+x$에서 시스템을 새 것으로 교체하게 된다. 그러므로, 시스템의 순환길이(cycle length)를 $L(x)$라 하면, 시스템의 기대순환길이(expected cycle length) $E[L(x)]$는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} E[L(x)] &= E[T \mid T < w]F(w) + E[w+x \mid T > w]\overline{F}(w) \\ &= I(w) + (w+x)\overline{F}(w). \end{aligned} \tag{2}$$

따라서, 재생보증기간이 있는 시스템을 운용하는데 발생하는 단위시간당 기대비용을 $C(x)$라 하면, 이는 식 (1)의 총기대비용을 식 (2)의 기대순환길이로 나눔으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$C(x) = \frac{E[C_T(x)]}{E[L(x)]} \tag{3}$$
$$= \frac{c_1 + c_r\overline{F}(w) + c_{f,w}F(w) + (c_m + c_{f,m})\overline{F}(w)\int_w^{w+x} h(t)dt}{I(w) + (w+x)\overline{F}(w)}.$$

단, $c_1 = \begin{cases} \frac{c_r}{w} I(w), & RPRW\text{인 경우} \\ 0, & RFRW\text{인 경우}. \end{cases}$

일반적으로 신뢰성 분야에서 고장시간 T의 분포로 가장 널리 사용되는 분포는 와이블분포(Weibull distribution)이다. 따라서, 본 논문에서도 시스템의 고장률함수로 와이블분포를 사용하고자 한다. 그런데, 본 논문에서 고려하고자 하는 재생보증하에서 시스템의 고장률함수는 증가함수이어야 하므로 $\beta > 1$이라고 가정하자.

$$h(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 1. \tag{4}$$

식 (4)의 고장률함수를 이용하여 α와 β가 주어진 경우 식 (3)에서 정의된 단위시간당 기대비용을 구하면 다음과 같다.

$$C(x) = \frac{c_2 + c_{f,w} + (c_r - c_{f,w})e^{-\alpha w^\beta} + (c_m + c_{f,m})e^{-\alpha w^\beta}\alpha\{(w+x)^\beta - w^\beta\}}{\int_0^w \alpha\beta t^\beta e^{-\alpha t^\beta}dt + (w+x)e^{-\alpha w^\beta}}. \tag{5}$$

단, $c_2 = \begin{cases} \frac{c_r}{w}\int_0^w \alpha\beta t^\beta e^{-\alpha t^\beta}dt, & RPRW\text{인 경우} \\ 0, & RFRW\text{인 경우}. \end{cases}$

식 (5)에서 구해진 단위시간당 기대비용을 최소화하는 x가 보증기간이 종료된 이후의 최적의 보전기간 x^*가 되며, Sahin과 Polatoglu(1996)은 이러한 최적의 보전기간 x^*를 찾을 수 있음을 보였다.

3. 재생보증하에서의 베이즈 교체정책

이 장에서는 2장에서 설명한 Sahin과 Polatoglu(1996)의 교체정책에 대한 베이즈 접근방법을 고려한다. 식 (4)에서 정의된 고장률함수 $h(t)$에 포함된 두 모수 α와 β에 대한 사전확률분포(prior probability distribution)를 Mazzuchi와 Soyer(1996)의 연구에서와 같이 설정하자. 즉, α는 다음과 같은 감마분포를 따른다고 가정하자.

$$f(\alpha) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}e^{-b\alpha}, \ \alpha > 0. \tag{6}$$

여기서, $a, b > 0$이고, 이 값은 사전확률분포의 초모수(hyperparameter)를 나타낸다. 또한, 형태모수 β의 사전확률분포로 베타분포를 고려하고자 한다. 그런데, 사전정보의 불확실성(prior uncertainty)을 가능한 잘 나타내도록 하기 위해서는 다음과 같이 이산형 베타분포(discretization of beta density)의 형태로 변형시켜서 사용하는 것이 좋다(Soland(1969) 참조).

$$g(\beta)=\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\frac{(\beta-\beta_L)^{c-1}(\beta_U-\beta)^{d-1}}{(\beta_U-\beta_L)^{c+d-1}},\quad 0\le\beta_L\le\beta\le\beta_U. \tag{7}$$

따라서, β의 분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}P_l &= P(\beta=\beta_l)\\ &=\int_{\beta_l-\delta/2}^{\beta_l+\delta/2} g(\beta)d\beta\ ,\ \ l=1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{8}$$

여기서, $\beta_l=\beta_L+\delta(2l-1)/2$ 이고, $\delta=(\beta_U-\beta_L)/m$이며, $c,d>0$는 사전확률분포의 초모수이다. 모수들이 사전독립(prior independent)이라고 가정하면, α와 β의 결합사전확률분포(joint prior probability distribution)는 식 (6)과 식 (8)에 의해 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned}p(\alpha,\beta) &= f(\alpha)\,P(\beta=\beta_l)\\ &=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\alpha^{a-1}e^{-b\alpha}\cdot P_l.\end{aligned} \tag{9}$$

따라서, 모수 α와 β의 사전확률분포를 고려하여 RFRW인 경우와 RPRW인 경우 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용을 다음과 같이 구할 수 있다

$$\begin{aligned}C(x) &= \frac{E_{\alpha,\beta}[E[C_T(x)\mid\alpha,\beta]]}{E_{\alpha,\beta}[E[L(x)\mid\alpha,\beta]]}\\ &= \frac{E_{\alpha,\beta}[E[C_W\mid\alpha,\beta]]+E_{\alpha,\beta}[E[C_R\mid\alpha,\beta]]+E_{\alpha,\beta}[E[C_M\mid\alpha,\beta]]+E_{\alpha,\beta}[E[C_F\mid\alpha,\beta]]}{E_{\alpha,\beta}[E[L(x)\mid\alpha,\beta]]}\end{aligned} \tag{10}$$

식 (10)의 분모와 분자의 각 항을 구하면

i) $$\begin{aligned}E_{\alpha,\beta}[E[C_W\mid\alpha,\beta]] &= E_{\alpha,\beta}\left[\frac{c_r}{w}I(w)\right]\\ &=\begin{cases}\dfrac{c_r}{w}\sum_{l=1}^{m}\left[\int_0^w \beta_l s^{\beta_l}\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1}ds\right]P_l, & RPRW\text{인 경우}\\ 0, & RFRW\text{인 경우}\end{cases}\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}E_{\alpha,\beta}[E[C_R\mid\alpha,\beta]] &= E_{\alpha,\beta}[c_r\overline{F}(w)]\\ &= c_r\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^a P_l\end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned}E_{\alpha,\beta}[E[C_M\mid\alpha,\beta]] &= E_{\alpha,\beta}\left[c_m\overline{F}(w)\int_w^{w+x}h(t)dt\right]\\ &= c_m\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a+1}\{(w+x)^{\beta_l}-w^{\beta_l}\}P_l\end{aligned}$$

$$\text{iv)}\ E_{\alpha,\beta}[E[C_F \mid \alpha,\beta]] = E_{\alpha,\beta}\left[c_{f,w}F(w) + c_{f,m}\overline{F}(w)\int_w^{w+x} h(t)dt\right]$$
$$= \sum_{l=1}^{m}\left[c_{f,w}\left\{1-\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}\right\} + c_{f,m}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a+1}\{(w+x)^{\beta_l} - w^{\beta_l}\}\right]P_l$$

$$\text{v)}\ E_{\alpha,\beta}[E[L(x) \mid \alpha,\beta]] = E_{\alpha,\beta}[I(w) + (w+x)\overline{F}(w)]$$
$$= \sum_{l=1}^{m}\left[\int_0^w \beta_l s^{\beta_l}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds + (w+x)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}\right]P_l$$

이 된다. 따라서, 구하고자 하는 베이즈 관점에서의 단위시간당 기대비용은 다음과 같다.

$$C(x) = \frac{\sum_{l=1}^{m}\left[c_3 + c_{f,w} + (c_r - c_{f,w})\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a} + (c_m + c_{f,m})\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a+1}\{(w+x)^{\beta_l} - w^{\beta_l}\}\right]P_l}{\sum_{l=1}^{m}\left[\int_0^w \beta_l s^{\beta_l}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds + (w+x)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}\right]P_l}. \tag{11}$$

단, $c_3 = \begin{cases} \frac{c_r}{w}\int_0^w \beta_l s^{\beta_l}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds, & RPRW\text{인 경우} \\ 0, & RFRW\text{인 경우}. \end{cases}$

식 (11)을 최소화하는 x가 보증기간이 종료된 이후의 베이즈 관점에서의 최적의 보전기간 x^*가 되며, 이를 찾기 위해서 식 (11)을 x에 관해서 1차 미분하여 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$\left(\sum_{l=1}^{m}\left\{\int_0^w \beta_l s^{\beta_l}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds + (w+x)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}\right\}P_l\right)$$
$$\cdot\left(\sum_{l=1}^{m}(c_m + c_{f,m})\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a+1}\beta_l(w+x)^{\beta_l-1}P_l\right)$$
$$-\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}P_l\right)\left(\sum_{l=1}^{m}(c_m + c_{f,m})\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a+1}\{(w+x)^{\beta_l} - w^{\beta_l}\}P_l\right)$$
$$= \left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}P_l\right)\left(\sum_{l=1}^{m}\left\{c_3 + c_{f,w} + (c_r - c_{f,w})\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a}\right\}P_l\right). \tag{12}$$

단, $c_3 = \begin{cases} \frac{c_r}{w}\int_0^w \beta_l s^{\beta_l}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds, & RPRW\text{인 경우} \\ 0, & RFRW\text{인 경우}. \end{cases}$

정리 1. *시스템의 고장률함수 $h(t)$가 순증가함수(strictly increasing function)라고 하자. 이 때, $D_1 \geq D_2$이면 최적의 보전기간은 $x^* = 0$이고, $D_1 < D_2$이면 최적의 보전기간은 식 (12)를 만족하는 x^*이다. 여기서, D_1과 D_2는 각각 다음과 같다.*

$$D_1 = \left(\sum_{l=1}^{m} \left\{ \int_0^w \beta_l s^{\beta_l} \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds + w\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^a \right\} P_l \right)\left(\sum_{l=1}^{m} (c_m + c_{f,m})\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^{a+1} \beta_l w^{\beta_l - 1} P_l \right),$$

$$D_2 = \left(\sum_{l=1}^{m} \left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^a P_l \right)\left(\sum_{l=1}^{m} \left\{ c_3 + c_{f,w} + (c_r - c_{f,w})\left(\frac{b}{b+w^{\beta_l}}\right)^a \right\} P_l \right).$$

단, $c_3 = \begin{cases} \dfrac{c_r}{w} \displaystyle\int_0^w \beta_l s^{\beta_l} \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{b+s^{\beta_l}}\right)^{a+1} ds, & RPRW \text{인 경우} \\ 0, & RFRW \text{인 경우}. \end{cases}$

정리 1은 Sahin과 Polatoglu(1996)의 논문을 참조하면 쉽게 증명할 수 있으며, 이 정리로부터 식 (12)를 만족하는 x의 값이 식 (11)에서 구해진 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 보전기간 x^*가 되고, 시스템을 $w+x^*$에서 교체하는 것이 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책이 된다.

이제, 시스템이 교체되기 전까지 발생된 고장자료로부터 모수 α와 β에 관한 불확실성을 개정할 수 있도록 하기 위해서 Mazzuchi와 Soyer(1996)에 의해 제안된 순응적 교체정책을 고려하고자 한다. 보증기간이 종료된 이후 시스템이 새 시스템으로 교체되기 전까지 발생한 n개의 고장시간(failure time)을 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$이라고 하면, 우도함수(likelihood function)는

$$L(\alpha, \beta \mid \boldsymbol{t}) = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \alpha\beta t_i^{\beta-1} \right\} \exp\{-\alpha u^{\beta}\} \tag{13}$$

와 같이 구해진다. 여기서, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$, $u = w + x$이고, $\prod_{i=1}^{n}\{\cdot\} \equiv 1$인 경우는 시스템의 고장이 전혀 발생하지 않았음을 의미한다. 따라서, 식 (9)에서 정의된 모수들의 결합사전확률분포와 식 (13)의 우도함수를 이용하면 α와 β의 결합사후확률분포(joint posterior probability distribution)는

$$f(\alpha, \beta_l \mid \boldsymbol{t}) \propto \left\{ \prod_{i=1}^{n} \alpha\beta_l t_i^{\beta_l - 1} \right\} \exp\{-\alpha u^{\beta_l}\} \alpha^{a-1} \exp\{-b\alpha\} P_l$$

와 같이 나타낼 수 있으며, 이를 적절히 변화시키면 α와 β의 결합사후확률분포는 다음과 같이 구해진다.

$$f(\alpha, \beta_l \mid \boldsymbol{t}) = \frac{\alpha^{n+a-1} \beta_l^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i \right\}^{\beta_l - 1} \exp\{-\alpha(b + u^{\beta_l})\} P_l}{\sum_{j=1}^{m} P_j \beta_j^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i \right\}^{\beta_j - 1} \int_{\alpha} \alpha^{n+a-1} \exp\{-\alpha(b+u^{\beta_j})\} d\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^{n+a-1} \beta_l^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i \right\}^{\beta_l - 1} \exp\{-\alpha(b + u^{\beta_l})\} P_l}{\sum_{j=1}^{m} P_j \beta_j^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} t_i \right\}^{\beta_j - 1} \Gamma(n+a) / (b+u^{\beta_j})^{a+n}}. \tag{14}$$

또한, $f(\alpha \mid \beta_l, \boldsymbol{t}) = f(\alpha, \beta_l, \boldsymbol{t}) / P(\beta = \beta_l, \boldsymbol{t})$이므로 α의 조건부사후확률분포(conditional posterior probability distribution)는

$$f(\alpha \mid \beta_l, \boldsymbol{t}) = \frac{(b+u^{\beta_l})^{a+n}}{\Gamma(n+a)} \alpha^{(a+n)-1}\exp\{-\alpha(b+u^{\beta_l})\} \tag{15}$$

와 같이 구해질 수 있으며, 이는 두 모수가 각각 $a^* = a+n$, $b^* = b+u^{\beta_l}$ 인 감마분포(gamma distribution)임을 알 수 있다. 또한, 식 (14)와 식 (15)를 이용하면 β의 사후확률분포는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} P(\beta=\beta_l \mid \boldsymbol{t}) &= P_l^* \\ &= \frac{\beta_l^n \left\{\prod_{i=1}^n t_i\right\}^{\beta_l-1} \Big/ (b+u^{\beta_l})^{a+n}}{\sum_{j=1}^m P_j\, \beta_j^n \left\{\prod_{i=1}^n t_i\right\}^{\beta_j-1} \Big/ (b+u^{\beta_j})^{a+n}} P_l. \end{aligned} \tag{16}$$

이제 α와 β의 주변사후확률분포는 더 이상 독립이 아니며, 베이즈 관점에서의 최적의 교체정책은 단위시간당 기대비용을 나타내는 식 (11)의 a, b, P_l의 값을 위에서 구한 a^*, b^*, P_l^*로 대체시킨 다음 이를 최소로 하는 최적의 보전기간 x^*를 찾으면 된다.

4. 수치적 예

본 논문에서 고려한 보증기간이 재생되는 경우 수리 가능한 시스템에 대한 최적의 교체정책에 대한 베이즈 접근 방법을 수치적인 예를 통해서 설명하고자 한다. 식 (6)과 식 (7)에 있는 α와 β의 사전확률분포에서 $a=2.1$, $b=3$, $c=2$, $d=2$, $\beta_L=1$, $\beta_U=3$이라고 가정하고, 시스템의 보증기간이 $w=0.3$, 0.5, 0.7인 경우에 대해 시스템의 교체비용 c_r의 변화에 따른 최적의 보전기간과 단위시간당 기대비용의 변화를 살펴보았다. 여기서, 시스템의 최소수리비용은 $c_m=0.3$으로 고정하였고, 보증기간 동안에 발생하는 고장에 의해 야기되는 비용과 보증기간 이후에 발생하는 고장으로 야기되는 비용이 각각 $c_{f,w}=c_{f,m}=0.2$인 경우에 대해 고려하였다.

<표 1>은 사전확률분포만을 이용하여 보증기간과 시스템의 교체비용의 변화에 따라 식 (11)의 단위시간당 기대비용을 최소로 하는 베이즈 관점에서의 최적의 보전기간과 이 때의 단위시간당 기대비용을 구한 결과이다. 이를 살펴보면 보증기간과 시스템의 교체비용의 변화에 따라 최적의 보전기간과 단위시간당 기대비용이 어떠한 형태로 나타나는지를 알 수 있다. RFRW인 경우와 RPRW인 경우 모두 보증기간이 길어지면 최적의 보전기간은 짧아지고, 단위시간당 기대비용도 작아지며, 동일한 보증기간하에서는 시스템의 교체비용 c_r이 커짐에 따라 최적의 보전기간은 길어지고, 단위시간당 기대비용도 커짐을 알 수 있다. 그리고, 최적의 보전기간과 단위시간당 기대비용은 항상 RFRW인 경우가 RPRW인 경우보다 작게 나타남을 알 수 있다.

다음으로 순응적 교체정책을 설명하기 위해서 와이블분포로부터 발생된 고장자료를 이용하였으며, 이를 <표 2>와 <표 3>에 제시하였다. 다음에 제시된 <표 2>와 <표 3>은 각각 RFRW인 경우와 RPRW인 경우 베이즈 교체정책에서의 최적의 보전기간 및 단위시간당 기대비용을 나타내고 있다. 먼저, 사전확률분포만을 이용하여 식 (11)의 단위시간당 기대비용을 최소로 하는 베이즈 관

점에서의 최적의 보전기간을 구해 보면, RFRW인 경우 최적의 보전기간은 $x_F^* = 2.042$ 이고, RPRW인 경우 최적의 보전기간은 $x_P^* = 2.170$ 으로 나타났다. 그리고, 이 때의 단위시간당 기대비용은 각각 $C(x_F^*) = 2.03546$ 과 $C(x_P^*) = 2.16907$ 이다. 즉, 보증기간이 종료된 이후에 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 보전기간은 RFRW인 경우는 2.042 단위시간, RPRW인 경우는 2.170 단위시간으로 각각 2.542 단위시간과 2.670 단위시간에서 새로운 시스템으로 교체하는 것이 최적의 베이즈 교체정책이 됨을 알 수 있다.

<표 1> 보증기간과 시스템의 교체비용의 변화에 따른
최적의 보전기간 및 단위시간당 기대비용

		RFRW		RPRW	
w	c_r	x_F^*	$C(x_F^*)$	x_P^*	$C(x_P^*)$
0.3	3	2.221	2.08598	2.407	2.28655
	5	2.842	2.77808	3.070	3.04751
	10	3.912	4.11413	4.211	4.51805
	15	4.687	5.18752	5.037	5.70043
	20	5.316	6.12075	5.707	6.72888
0.5	3	2.042	2.03546	2.170	2.16907
	5	2.671	2.72018	2.827	2.89954
	10	3.753	4.04168	3.957	4.31056
	15	4.535	5.10359	4.774	5.44508
	20	5.169	6.02706	5.436	6.43202
0.7	3	1.905	1.95522	2.014	2.06309
	5	2.555	2.62103	2.689	2.76567
	10	3.671	3.90495	3.846	4.12164
	15	4.476	4.93639	4.680	5.21158
	20	5.129	5.83336	5.357	6.15969

이와 같이 결정된 최적의 베이즈 교체정책($x_F^* = 2.042$, $x_P^* = 2.170$)을 <표 2>와 <표 3>에 제시된 Cycle 1의 시스템 고장자료에 적용함으로써 새로운 최적의 베이즈 교체정책을 결정할 수 있다. 즉, 사전확률분포에 의해 결정된 최적의 보전기간을 이용하여 a^*, b^* 와 P_l^* 를 구하고, 이들 값을 식 (11)에 대입하여 단위시간당 기대비용을 다시 구할 수 있으며, 이와 같이 구해진 단위시간당 기대비용을 최소로 하는 x^* 를 다시 찾으면, RFRW인 경우는 <표 2>에 제시된 바와 같이 $x_F^* = 1.786$ 이고, RPRW인 경우는 <표 3>에 제시된 바와 같이 $x_P^* = 2.174$ 가 된다. 그리고, 이 때

의 단위시간당 기대비용은 각각 $C(x_F^*)=2.38613$과 $C(x_P^*)=2.45630$이다. 같은 방법으로 Cycle 2와 Cycle 3의 시스템 고장자료에 대해서도 RFRW인 경우와 RPRW인 경우에 대해서 각각 베이즈 관점에서의 최적의 보전기간과 단위시간당 기대비용을 구했으며, 이 결과를 <표 2>와 <표 3>에 제시하였다.

이러한 순응적 교체정책은 실제로 발생되는 시스템의 고장자료에 대한 정보와 이전에 얻어진 최적의 교체정책의 정보를 모두 고려하여 새로운 최적의 교체정책을 결정하게 되므로 모수에 대한 불확실성을 개정할 수 있는 방법이 된다.

<표 2> RFRW인 경우 베이즈 교체정책에서의 최적의 보전기간 및 단위시간당 기대비용

Cycle	고장자료	x_F^*	$C(x_F^*)$
0	-	2.042	2.03546
1	0.72126 0.81027 0.82646 0.94030 0.95923 0.99640 1.16608 2.02939 2.45501	1.786	2.38613
2	0.65234 0.66810 0.94490 0.94637 1.10077 1.16993 1.53093 1.90703	1.630	2.46122
3	0.80873 1.07749 1.18030 1.24215 1.24850 1.39663 1.63564	1.440	2.54425

($w=0.5$, $c_m=0.3$, $c_{f,w}=0.2$, $c_{f,m}=0.2$, $c_r=3$)

<표 3> RPRW인 경우 베이즈 교체정책에서의 최적의 보전기간 및 단위시간당 기대비용

Cycle	고장자료	x_P^*	$C(x_P^*)$
0	-	2.170	2.16907
1	0.72126 0.81027 0.82646 0.94030 0.95923 0.99640 1.16608 2.02939 2.45501	2.174	2.45630
2	0.65234 0.66810 0.94490 0.94637 1.10077 1.16993 1.53093 1.90703 2.50951	2.102	2.47389
3	0.80873 1.07749 1.18030 1.24215 1.24850 1.39663 1.63564 2.46256	1.938	2.47484

($w=0.5$, $c_m=0.3$, $c_{f,w}=0.2$, $c_{f,m}=0.2$, $c_r=3$)

5. 결론

본 논문에서는 보증기간이 재생되는 경우 수리 가능한 시스템의 교체정책에 대한 베이즈 접근방법을 제안하였다. 즉, 시스템의 고장시간이 불확실성을 내포하는 모수 α와 β를 갖는 와이블분포를 한다고 가정할 때 보증기간 w가 있는 재생보증하에서 베이즈 관점에서의 단위시간당 기

대비용을 구하고, 이를 최소화하는 최적의 보전기간을 결정하였다. 그리고, 이전의 교체정책에 대한 정보와 새로운 고장자료를 이용하여 순응적 교체정책을 결정하는 방법을 살펴보았다. 끝으로 와이블분포로부터 발생된 자료(simulated data)를 이용하여 본 논문에서 고려한 최적의 베이즈 교체정책에 대한 단위시간당 기대비용과 보전기간을 구해보았으며, 모수의 불확실성을 개정할 수 있는 순응적 교체정책을 이 자료에 의해 계산된 값을 통하여 설명하였다.

본 논문에서는 보증기간이 재생되는 경우의 두 가지 교체정책인 RPRW와 RFRW하에서의 최적의 베이즈 교체정책에 대해 고려하였으며, 보증기간이 재생되지 않는 경우의 최적의 베이즈 교체정책과 혼합보증인 경우 재생보증과 비재생보증하에서의 최적의 베이즈 교체정책에 관한 연구는 현재 진행 중에 있다.

참고문헌

[1] Chun, Y. H. (1992). Optimal number of periodic maintenance operations under warranty, *Reliability Engineering and System Safety,* Vol. 37, 223-225.

[2] Han, S. S., Jung, G. M. and Kwon, Y. S. (2001). A Bayesian approach to periodic preventive maintenance policy, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 29, 39-48.

[3] Jack, N. and Dagpunar, J. S. (1994). An optimal imperfect maintenance policy over a warranty period, *Microelectronics and Reliability,* Vol. 34, 529-534.

[4] Jung, G. M., Lee, J. H. and Park, D. H. (2000). Periodic preventive maintenance policies following the expiration of warranty, *Asia-Pacific Journal of Operational Research,* Vol. 17, 17-26.

[5] Mazzuchi, T. A. and Soyer, R. (1996). A Bayesian perspective on some replacement strategies, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 51, 295-303.

[6] Sahin, I. and Polatoglu, H. (1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty, *IEEE Transactions on Reliability,* Vol. 45, 220-228.

[7] Sheu, S. H., Yeh, R. H., Lin, Y. B. and Juang, M. G. (1999). A Bayesian perspective on age replacement with minimal repair, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 65, 55-64.

[8] Soland, R. M. (1969). Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale and shape parameters, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 18, 181-184.

[9] Yeh, R. H. and Lo, H. C. (2001). Optimal preventive-maintenance warranty policy for repairable products, *European Journal of Operational Research,* Vol. 134, 59-69.

[2001년 10월 접수, 2002년 1월 채택]