韓國經營科學會誌
第27卷 第2號
2002年 6月

준비기간을 포함한 다양한 휴가형태에서의 $M^X/G/1$ 시스템 분석*

허 선** · 윤영호** · 안선응**

An analysis of the $M^X/G/1$ system with various vacations and set-up time*

Sun Hur** · Young-Ho Yoon** · Suneung Ahn**

■ Abstract ■

In this paper, we analyze an $M^X/G/1$ with three types of vacation periods including setup time. Three types of vacations are : N-policy, single vacation, and multiple vacation. We consider compound Poisson arrival process and general service time, where the server starts his service when a setup is completed. We find the PGF of the number of customers in system and LST of waiting time, with which we obtain their means. A decomposition property for the system size and waiting time is described also.

Keyword : batch arrival, vacation, threshold, setup

1. 서 론

대기모형에서 광의의 휴가형 대기행렬시스템(server vacation system)이란 시스템 내에 고객이 존재함에도 불구하고 어떠한 이유로 서버가 서비스를 제공하지 않는 모든 대기시스템을 통칭한다. 이에 속하는 시스템은 N-정책시스템, 준비기간을 갖는 시스템, T-정책시스템, D-정책시스템, 복수

논문접수일 : 2001년 12월 26일 논문게재확정일 : 2002년 4월 24일
* 이 논문은 2001년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었음
** 한양대학교 산업공학과

휴가 시스템, 단수휴가 시스템 등이 포함된다. 협의로는 서버가 시스템을 떠나서 고객에게 서비스를 제공하지 못하는 기간이 존재하는 시스템을 말한다. 서버휴가형 대기행렬은 60년대에 소개가 되었으나, 70년대와 80년대를 거치면서 통신 시스템, 생산 시스템들이 발전하기 시작하면서 휴가형 대기모형의 유용성이 증가되었고, 많은 분야에서 이를 사용하기 시작했다.

본 연구에서는 시스템에 도착한 모든 고객이 서비스를 받고 시스템에 고객이 없을 때, 서버가 어떠한 이유로 고객이 도착하였음에도 불구하고 서비스를 행하지 않는 휴가기간을 가지고 있고, 이 휴가기간이 끝난 후에 서버는 랜덤한 길이의 준비기간을 거쳐 고객을 서비스하게 된다.

이러한 준비기간을 갖는 시스템에 대한 기존 연구를 살펴보면, Hur and Paik[8]의 연구에서는 상이한 도착율을 가지는 N-정책과 준비기간을 가지는 모형을 연구하였고, 이순석[2]은 다양한 형태의 휴가와 N-정책이 혼합된 $M^X/G/1$모형에 대해서 연구를 하였다. 그리고, Lee, et al.[5], Lee, et al.[6], Lee, et al.[7]에서는 집단도착 시스템에서의 휴가모형에 대해 연구하였다. 또한 Choudhury[4]는 준비기간이 포함된 복수휴가 모형에서의 $M^X/G/1$에 대해서 연구를 하였다. 하지만 Choudhury[4]가 구한 안정상태 고객수분포의 결과는 그 값이 틀렸으므로 본 연구에서는 이를 수정하였고, 여기서 다루지 않은 대기시간분포를 구하였다.

본 연구에서는 이순석[2]의 연구결과를 바탕으로 고객들의 도착이 집단(집단의 크기는 확률변수)으로 이루어지되, 집단의 도착은 포아송과정을 따르며 다양한 형태의 휴가가 끝나고 준비기간을 가지는 시스템으로 확장하였다. 즉, 이러한 서버 휴가형 시스템을 ①대기 고객수가 N명이 될 때까지 기다렸다가 준비기간을 거쳐 서비스를 시작하는 N-정책과 준비기간이 있는 모형, ②단수휴가를 다녀온 후 준비기간을 거쳐 서비스를 시작하는 단수휴가와 준비기간이 있는 모형, ③복수휴가를 다녀온 후 준비기간을 거쳐 서비스를 시작하는 복수휴가와 준비기간이 있는 모형으로 각각 나누어 분석하였다.

또한 이를 통하여 안정상태에서 시스템의 각종 성능을 분석하고 고객수분포에 대한 PGF(probability generating function)와 평균고객수를 유도한다. 그리고 대기시간분포에 대한 LST(Laplace-Stieltjes transform)와 평균대기시간을 유도한다.

2. N-정책과 준비기간을 갖는 모형

본 모형에서는 시스템에 도착한 모든 고객이 서비스를 받고 시스템에 고객이 아무도 없는 경우 대기열에 N명 이상의 고객이 도착 할 때까지 기다려 N명 이상의 고객이 대기열에 차면 즉시 랜덤한 길이의 준비기간을 거쳐 바쁜 기간이 시작된다.

2.1 변수 정의

본 절에서 사용할 확률변수들과 각종 기호들은 아래와 같다.

λ : Group arrival rate
X : Random variable of the group size
g_k : $\Pr[X=k], \quad k=1,2,\cdots,$
$X(z)$: PGF of X
S : Random variable of the service time
R : Random variable of the setup time
$s(x), S^*(\theta)$: pdf, LST of S
$r(x), R^*(\theta)$: pdf, LST of R
$S^+(t)$: remaining service time of the customer in service at time t
$R^+(t)$: remaining setup time at time t
$N(t)$: system size at time t

$$Y(t)=\begin{cases} 0 & : \text{ if server idle} \\ 1 & : \text{ if server setup} \\ 2 & : \text{ if server busy} \end{cases}$$

$$D_n(t)=\Pr[N(t)=n,\ Y(t)=0],\quad 0\le n\le N-1,$$

$$D_n=\lim_{t\to\infty} D_n(t),$$

$$R_n(x,t)dx=\Pr[N(t)=n, Y(t)=1, x\le R^+(t)\le x+dx],\quad n\ge N,$$

$$R_n(x)dx = \lim_{t\to\infty} R_n(x,t)dx,$$
$$P_n(x,t)dx = \Pr[N(t)=n,\ Y(t) = 2,\ x \le S^+(t) \le x+dx],\quad n \ge 1,$$
$$P_n(x)dx = \lim_{t\to\infty} P_n(x,t)dx.$$

2.2 고객수 분포

본 모형의 분석을 위해 잔여시간 부가변수법을 사용하였다. 부가변수법의 일반적인 절차는 이호우[1]와 이순석과 이호우[3]를 참고하기 바란다. $Y(t)$는 서버의 상태를 나타내기 위한 변수로, 서버가 유휴중인 경우, 서버가 준비기간중인 경우, 서버가 바쁜기간중인 경우로 나누어 정의하였다.

Δt 동안에 일어나는 확률의 변화량을 추적하면, 다음과 같은 변이상태 시스템 방정식을 세울 수 있다.

$$D_0(t+\Delta t) = D_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(0,t)\Delta t \quad (1)$$

$$D_n(t+\Delta t) = D_n(t)(1-\lambda\Delta t) + \sum_{k=1}^{n} D_{n-k}(t)\lambda g_k \Delta t, \quad 1 \le n \le N-1 \quad (2)$$

$$R_N(x-\Delta t, t+\Delta t) = R_N(x,t)(1-\lambda\Delta t) + \sum_{k=0}^{N-1} D_k(t)\lambda g_{N-k} r(x)\Delta t \quad (3)$$

$$R_n(x-\Delta t, t+\Delta t) = R_n(x,t)(1-\lambda\Delta t) + \sum_{k=0}^{N-1} D_k(t)\lambda g_{n-k} r(x)\Delta t + \sum_{k=1}^{n-N} R_{n-k}(x,t)\lambda g_k \Delta t,\quad n \ge N+1 \quad (4)$$

$$P_1(x-\Delta t, t+\Delta t) = P_1(x,t)(1-\lambda\Delta t) + P_2(0,t)s(x)\Delta t \quad (5)$$

$$P_m(x-\Delta t, t+\Delta t) = P_m(x,t)(1-\lambda\Delta t) + P_{m+1}(0,t)s(x)\Delta t + \sum_{k=1}^{m-1} P_{m-k}(x,t)\lambda g_k \Delta t,\quad 2 \le m \le N-1 \quad (6)$$

$$P_n(x-\Delta t, t+\Delta t) = P_n(x,t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n+1}(0,t)s(x)\Delta t + R_n(0,t)s(x)\Delta t + \sum_{k=1}^{n-1} - P_{n-k}(x,t)\lambda g_k \Delta t,\quad n \ge N. \quad (7)$$

위의 변이상태 시스템 방정식(1)~(7)의 양변을 Δt로 나눈 후 $\Delta t \to 0$을 취하고 $t\to\infty$로 하여 안정상태 시스템 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$0 = -\lambda D_0 + P_1(0) \quad (8)$$

$$0 = -\lambda D_n + \lambda\sum_{k=1}^{n} D_{n-k} g_k,\quad 1 \le n \le N-1 \quad (9)$$

$$-\frac{d}{dx}R_N(x) = -\lambda R_N(x) + \lambda\sum_{k=0}^{N-1} - D_k g_{N-k} r(x) \quad (10)$$

$$-\frac{d}{dx}R_n(x) = -\lambda R_n(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n-N} R_{n-k}(x) g_k + \lambda\sum_{k=0}^{N-1} D_k g_{n-k} r(x),\quad n \ge N+1 \quad (11)$$

$$-\frac{d}{dx}P_1(x) = -\lambda P_1(x) + P_2(0)s(x) \quad (12)$$

$$-\frac{d}{dx}P_m(x) = -\lambda P_m(x) + P_{m+1}(0)s(x) + \lambda\sum_{k=1}^{m-1} P_{m-k}(x) g_k,\quad 2 \le m \le N-1 \quad (13)$$

$$-\frac{d}{dx}P_n(x) = -\lambda P_n(x) + P_{n+1}(0)s(x) + R_n(0)s(x) + \lambda\sum_{k=1}^{n-1} P_{n-k}(x) g_k,\quad n \ge N. \quad (14)$$

위의 안정상태 시스템 방정식들 (10)~(14)의 양변에 LST를 적용하여, 다음과 같은 차등방정식을 구한다.

$$\theta R_N^*(\theta) - R_N(0) = \lambda R_N^*(\theta) - \lambda\sum_{k=0}^{N-1} D_k g_{N-k} R^*(\theta) \quad (15)$$

$$\begin{aligned}&\theta R_n^*(\theta)-R_n(0)\\&\quad=\lambda R_n^*(\theta)-\lambda\sum_{k=0}^{N-1}D_k g_{n-k}R^*(\theta)\\&\quad\quad-\lambda\sum_{k=1}^{n-N}R_{n-k}^*(\theta)g_k,\ \ n\ge N+1\end{aligned}\tag{16}$$

$$\theta P_1^*(\theta)-P_1(0)=\lambda P_1^*(\theta)-P_2(0)S^*(\theta)\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\theta P_m^*(\theta)-P_m(0)\\&\quad=\lambda P_m^*(\theta)-P_{m+1}(0)S^*(\theta)\\&\quad\quad-\lambda\sum_{k=1}^{m-1}P_{m-k}^*(\theta)g_k,\\&\quad\quad 2\le m\le N-1\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\theta P_n^*(\theta)-P_n(0)\\&\quad=\lambda P_n^*(\theta)-P_{n+1}(0)S^*(\theta)\\&\quad\quad-R_n(0)S^*(\theta)-\lambda\sum_{k=1}^{n-1}P_{n-k}^*(\theta)g_k,\\&\quad\quad n\ge N.\end{aligned}\tag{19}$$

다음과 같은 생성함수(GF : Generating Function)를 정의하자.

$$D(z)=\sum_{n=0}^{N-1}D_n z^n,$$

$$R^*(z,\theta)=\sum_{n=N}^{\infty}R_n^*(\theta)z^n,$$

$$R(z,0)=\sum_{n=N}^{\infty}R_n(0)z^n,$$

$$P^*(z,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n^*(\theta)z^n,$$

$$P(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(0)z^n.$$

여기서 $D(z)$는 유휴기간에서의 고객수 GF, $R^*(z,\theta)$는 준비기간에서의 고객수와 잔여준비기간의 결합분포, $R(z,0)$는 준비기간 종료시점에서의 고객수 GF, $P^*(z,\theta)$는 바쁜기간에서의 고객수와 잔여서비스기간의 결합분포, $P(z,0)$는 서비스 종료시점에서의 고객수 GF를 나타낸다.

식 (9)로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}&\lambda\sum_{n=N}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{N-1}D_k\cdot g_{n-k}\right\}z^n\\&\quad=\lambda[D(z)X(z)-D(z)+D_0]\end{aligned}\tag{20}$$

식 (15)와 (16)에 각각 z^N과 z^n을 곱하고 양변을 모두 더해 줌으로서 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}&[\theta-\lambda+\lambda X(z)]R^*(z,\theta)\\&=R(z,0)-\lambda R^*(\theta)[X(z)D(z)-D(z)+D_0]\end{aligned}\tag{21}$$

여기서 $R(z,0)$는 식 (21)에 $\theta=\lambda-\lambda X(z)$를 대입함으로서 얻을 수 있고 이를 다시 식 (21)에 대입하여 식 (22)를 얻는다.

$$R^*(z,\theta)=\frac{\lambda[R^*(\lambda-\lambda X(z))-R^*(\theta)][D_0-D(z)(1-X(z))]}{\theta-\lambda+\lambda X(z)}\tag{22}$$

비슷한 방법으로, 식 (17), (18)과 (19)에 z, z^m, z^n을 각각 곱하고 양변을 더하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}&[\theta-\lambda+\lambda X(z)]\ P^*(z,\theta)\\&\quad=P(z,0)-\frac{S^*(\theta)}{z}[P(z,0)-P_1(0)z]\\&\quad\quad-S^*(\theta)R(z,0)\end{aligned}\tag{23}$$

역시 $\theta=\lambda-\lambda X(z)$를 대입하여 $P(z,0)$를 얻고 이로써 다음 식 (24)을 얻는다.

$$\begin{aligned}P^*(z,\theta)=&\frac{z[S^*(\lambda-\lambda X(z))-S^*(\theta)]}{S^*(\lambda-\lambda X(z))-z}\cdot\\&\{\lambda D_0[1-R^*(\lambda-\lambda X(z))]-\lambda R^*(\lambda-\lambda X(z))\cdot\\&[X(z)D(z)-D(z)]\}/\{\theta-\lambda+\lambda X(z)\}.\end{aligned}\tag{24}$$

한편, $D(z)=D_0\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n z^n$이고, π_n은 서버가 유휴상태에 있을 때 시스템의 상태(시스템 내에 존재하는 고객수)가 n을 거쳐갈 확률로, $\pi_n=\sum_{k=1}^{n}g_k\cdot\pi_{n-k}$으로 계산된다[2].

임의시점에서의 고객수 PGF를 $P(z)$라 할 때, $P(z)=D(z)+R^*(z,\theta)|_{\theta=0}+P^*(z,\theta)|_{\theta=0}$ 이고, 또 경계조건 $P(1)=1$을 이용하면 아래와 같은 고객수의 PGF를 구할 수 있다.

$$P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)S^*(\lambda-\lambda X(z))}{S^*(\lambda-\lambda X(z))-z} \cdot \frac{R^*(\lambda-\lambda X(z))[\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n z^n[X(z)-1]+1]-1}{\left(\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\lambda E(R)\right)(X(z)-1)} \tag{25}$$

$P(z)$를 z에 대하여 미분하고 $z=1$을 대입하면 임의시점에서의 시스템 내 평균고객수를 유도할 수 있다.

$$L_N=\frac{\lambda E(S)E(X(X-1))+\lambda^2E^2(X)E(S^2)}{2(1-\rho)}+\rho+\frac{2\left(\lambda E(R)E(X)\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\sum_{n=1}^{N-1}n\pi_n\right)+\lambda^2E^2(X)E(R^2)}{2\left(\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\lambda E(R)\right)} \tag{26}$$

2.3 고객수 분포의 분해성질

식 (25)의 고객수 PGF를 다시 보면, 우변의 첫 번째 항은 N정책이 없고 준비기간도 없는 보통의 $M^X/G/1$ 모형의 임의시점 고객수의 PGF이다. 또한 두 번째 항은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{R^*(\lambda-\lambda X(z))[\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n z^n[X(z)-1]+1]-1}{\left(\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\lambda E(R)\right)(X(z)-1)}=\frac{D(z)+R^*(z,\theta)|_{\theta=0}}{1-\rho}.$$

따라서, 이 두 번째 항은 서버가 유휴하거나 준비기간중(이를 "비바쁜기간"이라고 정의하자)일 때의 고객수 분포를 나타낸다. 그러므로, 본 모형에서 임의시점의 고객수는 보통의 $M^X/G/1$ 모형에서의 임의시점 고객수와, 서버가 유휴하거나 준비중인 때의 대기중인 고객수의 합으로 이루어짐을 알 수 있다.

2.4 대기시간 분포

$T_N^*(\theta)$을 N정책과 준비기간을 갖는 모형에서의 유휴기간 LST이라 하자. 첫 번째 도착하는 집단의 크기에 대한 조건부 확률과 고객의 도착이 포아송 과정에 따름을 이용하면,

$$\begin{aligned}T_N^*(\theta)&=\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\left[\sum_{k=1}^{N-1}g_k T_{N-k}^*(\theta)+\sum_{k=N}^{\infty}g_k\right]\\&=\frac{\lambda}{\lambda+\theta}\left[1+\sum_{k=1}^{N-1}g_k[T_{N-k}^*(\theta)-1]\right].\end{aligned} \tag{27}$$

임의고객의 대기시간은 다음과 같이 임의고객이 유휴기간에 도착했을 경우, 준비기간에 도착했을 경우, 그리고 바쁜기간에 도착했을 경우로 나누어 구할 수 있다.

1) 서버가 유휴기간중일 때 도착하는 임의 고객의 대기시간의 LST $W_I^*(\theta)$는 이순석[2]에 의해서 아래와 같이 구할 수 있다.

$$W_I^*(\theta)=\frac{(1-\rho)\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n[S^*(\theta)]^n}{\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n}\cdot\left\{\sum_{r=1}^{N-n-1}\frac{g_r[1-[S^*(\theta)]^r]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}[T_{N-n-r}^*(\theta)-1]+\frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\right\}\cdot R^*(\theta) \tag{28}$$

2) 서버가 준비기간중일 때 도착하는 임의 고객의 대기시간은 다음 ①~④의 시간들의 합으로 구성된다

① 유휴기간중에 도착한 고객들의 총 서비스시간 (N명 이상)

② 준비기간 내에서 임의 고객집단보다 먼저 도착한 고객들의 총 서비스시간과, 현재 진행중인 서버의 잔여 준비시간이 합

③ 같은 집단 안에서 자기 앞에 위치한 고객들의 서비스시간

①의 LST를 먼저 구해보면, 유휴기간중 도착한 총 고객수의 PGF는 $1-(1-X(z))\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n z^n$이므로([2]), 이들에 대한 총 서비스시간의 LST는 $z=S^*(\theta)$를 대입함으로서 얻는다. 다음으로 R을 재생간격을 간주할 때 경과시간과 잔여시간의 결합 LST는 $\frac{R^*(\theta_1)-R^*(\theta_2)}{E(R)(\theta_2-\theta_1)}$이다([1]). 여기서 θ_1은 경과시간을 나타내고 θ_2는 잔여시간을 나타낸다. 따라서 경과시간동안 도착한 고객수를 얻기 위해서 $\theta_1=\lambda-\lambda X(z)$를 대입하고 다시 z 대신 $S^*(\theta)$를 대입하면 경과 준비시간동안 도착한 고객들의 총 서비스시간의 LST를 얻는다. 또한 $\theta_2=\theta$를 대입함으로서 ②의 LST를 얻는다. 마지막으로 임의의 집단에서 임의고객보다 앞서있는 고객의 수의 PGF는 $\frac{1-X(z)}{E(X)(1-z)}$이므로 역시 $z=S^*(\theta)$를 대입하면 ③의 LST를 얻는다.

위의 세가지 시간들은 서로 독립이므로 다음을 얻는다.

$$W_R^*(\theta)=\frac{(1-\rho)\lambda E(R)}{\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\lambda E(R)}\cdot\frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\cdot\left(1-[1-X(S^*(\theta))]\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n(S^*(\theta))^n\right)\cdot\frac{R^*(\lambda-\lambda X[S^*(\theta)])-R^*(\theta)}{E(R)[\theta-\lambda+\lambda X[S^*(\theta)]]}. \tag{29}$$

3) 서버가 바쁜기간중일 때 도착하는 임의 고객의 대기시간은 다음 ①~③의 시간들의 합으로 구성된다.

① 진행중인 서버의 잔여 서비스시간

② 시스템에 도착하는 시점에 시스템이서 이미 기다리고 있는 고객들의 총 서비스시간

③ 같은 집단 안에서 자기 앞에 위치한 고객들의 서비스시간

2)와 같은 방법을 사용하여 서버가 바쁜기간중일 때 도착하는 고객의 대기시간의 LST $W_B^*(\theta)$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}W_B^*(\theta)&=\frac{P^*(S^*(\theta),\theta)}{S^*(\theta)}\cdot\frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\\&=\frac{1-\rho}{\theta-\lambda+\lambda X[S^*(\theta)]}\cdot\frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\\&\cdot\frac{\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n S^*(\theta)^n}{\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\lambda E(R)}R^*(\lambda-\lambda X[S^*(\theta)])\end{aligned} \tag{30}$$

위 1), 2), 3)에서 구한 LST들은 서버의 상태 및 대기시간의 결합 LST이므로 임의고객의 대기시간 $W_q^*(\theta)$는 $W_I^*(\theta)+W_R^*(\theta)+W_B^*(\theta)$이 된다.

$W_q^*(\theta)$를 θ에 대하여 미분하고 $\theta=0$을 대입하여, 평균대기시간을 유도한다.

$$E(W_q)=\frac{\lambda E^2(X)E(S^2)+E(S)E(X(X-1))}{2E(X)(1-\rho)}+\frac{2\left[\lambda E(R)E(X)\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\sum_{n=1}^{N-1}n\pi_n\right]+\lambda^2E(X)E(R^2)}{2\lambda E(X)\left[\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n+\lambda E(R)\right]} \tag{31}$$

3. 단수휴가와 준비기간을 갖는 모형

본 모형은 고객의 도착시점에 따라 두 가지의 형태로 나누어 볼 수 있다.

시스템에 도착한 모든 고객이 서비스를 받고 시스템에 고객이 아무도 없어 휴가를 떠나고 휴가 후 돌아와 고객이 없으면 시스템 내에서 기다리고 있다가(유휴기간) 첫 고객이 도착하는 즉시 랜덤한 길이의 준비기간을 거쳐 바쁜기간이 시작되는 경우와, 고객이 있으면 즉시 랜덤한 길이의

준비기간을 거쳐 바쁜기간이 시작되는 경우로 나눌 수 있다.

3.1 변수 정의

본 절에서 사용할 확률변수들과 각종 기호들 중 2절에서 정의되지 않았던 것은 다음과 같다.

V : Random variable of the vacation time
$v(x)$, $V^*(\theta)$: pdf, LST of V
$V^+(t)$: remaining vacation time at time t

$$Y(t)=\begin{cases} 0 & : \text{if server on vacation} \\ 1 & : \text{if server idle} \\ 2 & : \text{if server setup} \\ 3 & : \text{if server busy} \end{cases}$$

$$Q_n(x,t)dx = \Pr[N(t)=n, Y(t)=0, x \le V^+(t) \le x+dx], \quad n \ge 0,$$

$$Q_n(x)dx = \lim_{t\to\infty} Q_n(x,t)dx$$

$$D_0(t) = \Pr[N(t)=0, Y(t)=1]$$

$$D_0 = \lim_{t\to\infty} D_0(t)$$

$$R_n(x,t)dx = \Pr[N(t)=n, Y(t)=2, x \le R^+(t) \le x+dx], \quad n \ge 1$$

$$R_n(x)dx = \lim_{t\to\infty} R_n(x,t)dx$$

$$P_n(x,t)dx = \Pr[N(t)=n, Y(t)=3, x \le S^+(t) \le x+dx], \quad n \ge 1$$

$$P_n(x)dx = \lim_{t\to\infty} P_n(x,t)dx.$$

3.2 고객수 분포

본 절에서 고객수 분포를 구하는 것은 2장에서 구한 고객수 분포 유도과정과 유사하다. 단, 여기서는 $Y(t)$에 서버가 휴가기간 중인 경우를 포함하여 고객수 분포를 얻었다.

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)S^*(\lambda-\lambda X(z))}{S^*(\lambda-\lambda X(z))-z} \left[\frac{(R^*(\lambda-\lambda X(z))[V^*(\lambda-\lambda X(z))-V^*(\lambda)+V^*(\lambda)X(z)]}{[V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(R)](X(z)-1)} - \frac{1}{[V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(R)](X(z)-1)}\right] \tag{32}$$

여기에 $P(z)$를 z에 대하여 미분하고 $z=1$을 대입하여, 평균고객수를 유도한다.

$$L_{SV} = \frac{\lambda E(S)E(X(X-1))+\lambda^2E^2(X)E(S^2)}{2(1-\rho)} + \rho + \frac{\lambda^2E(X)[E(R^2)+E(V^2)]}{2[\lambda E(R)+\lambda E(V)+V^*(\lambda)]} + \frac{\lambda E(X)E(R)[\lambda E(V)+V^*(\lambda)]}{\lambda E(R)+\lambda E(V)+V^*(\lambda)}. \tag{33}$$

3.3 대기시간 분포

임의의 시험고객의 대기시간은 시험고객이 속해 있는 집단에서 첫 번째 고객의 대기시간 ($T_{q,g}$)과 같은 집단 내에서 시험고객의 앞에 위치한 고객들을 서비스하는데 걸리는 시간 ($T_{q,a}$)등 서로 독립인 두 시간의 합이다[1].

먼저 고객수 분포 유도과정중에 얻은 결합분포를 이용하여 $T_{q,g}$의 LST $W^*_{q,g}(\theta)$를 구하면,

$$W^*_{q,g}(\theta) = (D_0 + Q^*(z,\theta)|_{z=s^*(\theta)})R^*(\theta) + R^*(z,\theta)|_{z=s^*(\theta)} + \frac{P^*(z,\theta)|_{z=s^*(\theta)}}{S^*(\theta)}$$

이고, $T_{q,a}$의 LST $W^*_{q,a}(\theta)$는 $\dfrac{1-X(z)}{E(X)(1-z)}$ 이므로, 다음을 얻는다.

$$W^*_{q,SV}(\theta) = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda X[S^*(\theta)]} \cdot \frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]} \cdot \frac{\lambda-\lambda V^*(\theta)R^*(\theta)+V^*(\lambda)\theta R^*(\theta)}{\theta(V^*(\lambda)+\lambda E(V)+\lambda E(R))}. \tag{34}$$

$W_q^*(\theta)$를 θ에 대하여 미분하고 $\theta=0$을 대입하여, 평균대기시간을 유도한다.

$$E(W_q) = \frac{\lambda E^2(X)E(S^2)+E(S)E(X(X-1))}{2E(X)(1-\rho)} + \frac{\lambda[E(R^2)+E(V^2)]+2E(R)[\lambda E(V)+V^*(\lambda)]}{2[\lambda E(R)+\lambda E(V)+V^*(\lambda)]} \tag{35}$$

3.4 고객수 및 대기시간의 분해성질

식 (32)를 다시 보면, N정책의 경우와 마찬가지로 우변의 첫 번째 항은 보통의 $M^X/G/1$ 모형의 임의시점 고객수의 PGF이고 두 번째 항은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{1-\rho}\left(Q^*(z,\theta)|_{\theta=0}+D_0+R^*(z,\theta)|_{\theta=0}\right).$$

이 두 번째 항은 서버가 휴가중이거나 유휴하거나 준비기간중($Y(t)=0,1$ 또는 2인 "비바쁜기간") 일 때의 고객수 분포를 나타낸다.

또한, 식 (34)에서도 처음 두 개의 항은 역시 보통의 $M^X/G/1$에서의 대기시간의 LST이고. 마지막 항에서 θ대신 $\lambda-\lambda X(z)$를 대입하면 바로 고객수 PGF의 두 번째 항이 나옴을 확인할 수 있다. 그런데, 고객수 PGF의 두 번째 항은, 비바쁜기간의 임의시점까지 도착한 고객수라고도 해석이 가능하므로, 대기시간의 LST인 식 (34)의 마지막 항은 바로 비바쁜기간의 경과기간의 LST라고 볼 수 있으며, 이는 다시 동 기간의 잔여기간이라고 해석할 수 있다.(잔여기간과 경과기간은 확률적으로 동일하다) 따라서, 임의고객은 보통의 $M^X/G/1$에서의 대기시간보다 위에서 언급한 비바쁜기간의 잔여기간만큼 더 기다리게 되는 성질을 보여준다.

4. 복수휴가와 준비기간을 갖는 모형

본 모형은 시스템에 도착한 모든 고객이 서비스를 받고 시스템에 고객이 아무도 없는 경우 휴가를 떠나고 휴가 후 돌아와 시스템을 검사하여 고객이 없으면 다시 휴가를 떠나고 고객이 있으면 즉시 랜덤한 길이의 준비기간을 거쳐 바쁜기간이 시작된다.

4.1 변수 정의

본 절에서 사용할 확률변수들과 각종 기호들 중 2절에서 정의되지 않았던 것은 다음과 같다.

V : Random variable of the vacation time

$v(x)$, $V^*(\theta)$: pdf, LST of V

$V^+(t)$: remaining vacation time at time t

$$Y(t)=\begin{cases}0 & : \text{if server on vacation}\\ 1 & : \text{if server setup}\\ 2 & : \text{if server busy}\end{cases}$$

$Z(t)=j$ if the server is on jth vacation at time t

$$\begin{aligned}
Q_{n,j}(x,\ t)dx &= \Pr[N(t)=n,Y(t)=0,Z(t)=j,\\
&\qquad x\le V^+(t)\le x+dx],\quad n\ge 0\\
Q_{n,j}(x)dx &= \lim_{t\to\infty} Q_{n,j}(x,\ t)dx\\
R_n(x,t)dx &= \Pr[N(t)=n,\ Y(t)=1,\\
&\qquad x\le R^+(t)\le x+dx],\\
&\qquad n\ge 1\\
R_n(x)dx &= \lim_{t\to\infty} R_n(x,\ t)dx\\
P_n(x,\ t)dx &= \Pr[N(t)=n,\ Y(t)=2,\\
&\qquad x\le S^+(t)\le x+dx],\\
&\qquad n\ge 1\\
P_n(x)dx &= \lim_{t\to\infty} P_n(x,\ t)dx.
\end{aligned}$$

4.2 고객수 분포

여기서도 고객수 분포를 구하는 과정은 서버가 휴가기간 중인 경우를 $Y(t)$에 포함시킨 것을 제외하면 2장에서 구한 고객수 분포 유도과정과 유사하다.

$$\begin{aligned}
P(z)=&\frac{(1-\rho)(1-z)S^*(\lambda-\lambda X(z))}{S^*(\lambda-\lambda X(z))-z}\\
&\cdot\left\{\frac{(R^*(\lambda-\lambda X(z))[V^*(\lambda-\lambda X(z))-V^*(\lambda)]}{\lambda[E(R)(1-V^*(\lambda)))+E(V)](X(z)-1)}\right.\\
&\left.-\frac{(1-V^*(\lambda))}{\lambda[E(R)(1-V^*(\lambda)))+E(V)](X(z)-1)}\right\}
\end{aligned} \tag{36}$$

여기에 $P(z)$를 z에 대하여 미분하고 $z=1$을 대입하여, 평균고객수를 유도한다.

$$\begin{aligned}
L_{MV}=&\\
&\frac{\lambda E(S)E(X(X-1))+\lambda^2E^2(X)E(S^2)}{2(1-\rho)}+\rho\\
&+\frac{\lambda E(X)[E(R^2)(1-V^*(\lambda))+2E(R)E(V)+E(V^2)]}{2[E(R)(1-V^*(\lambda))+E(V)]}
\end{aligned} \tag{37}$$

4.3 대기시간 분포

이 절에서 임의의 시험고객의 대기시간은 3절에서의 풀이과정을 따른다.

$$W_{q,MV}^*(\theta)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}Q_j^*(z,\theta)|_{z=s^*(\theta)}\cdot R^*(\theta)+R^*(z,\theta)|_{z=s^*(\theta)}+\frac{P^*(z,\theta)|_{z=s^*(\theta)}}{S^*(\theta)}\right)\cdot\frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}, \tag{38}$$

이를 정리하면

$$W_{q,MV}^*(\theta)=\frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda X[S^*(\theta)]}\cdot\frac{1-X[S^*(\theta)]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\cdot\frac{1-V^*(\lambda)-R^*(\theta)[V^*(\theta)]-V^*(\lambda)]}{\theta(E(R)[1-V^*(\lambda)]+E(V))}. \tag{39}$$

$W_q^*(\theta)$를 θ에 대하여 미분하고 $\theta=0$을 대입하여, 평균대기시간을 유도한다.

$$E(W_q)=\frac{E(R^2)[1-V^*(\lambda)]+2E(R)E(V)+E(V^2)}{2[E(R)(1-V^*(\lambda))+E(V)]}+\frac{E(S)E(X(X-1))+\lambda E^2(X)E(S^2)}{2E(X)(1-\rho)} \tag{40}$$

4.4 고객수 및 대기시간의 분해성질

여기서도 단수휴가의 경우와 마찬가지의 분해성질을 보일 수 있다. 식 (36)의 우변의 두 번째 항은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{1-\rho}\left(\sum_{j=1}^{\infty}Q_j^*(z,\theta)|_{\theta=0}+R^*(z,\theta)|_{\theta=0}\right)$$

이 두 번째 항은 서버가 휴가중이거나 유휴하거나 준비기간중($Y(t)=0$ 또는 1인 "비바쁜기간") 일 때의 고객수 분포를 나타낸다.

또한, 식 (39)에서도 단수휴가에서와 마찬가지의 추론을 거치면 마지막 항은 고객의 도착이 있는 마지막 휴가의 경과(또는 잔여)시간의 LST 또는 비바쁜기간에 도착하는 고객집단이 보는 비바쁜 기간의 잔여기간의 LST라고 해석할 수 있다.

5. 평균 사이클 길이

본 절에서는 위 세 가지 모형의 평균 사이클 길이를 유도한다. 사이클 길이는 유휴기간, 준비기간, 바쁜기간으로 이루어진다. 따라서, 유휴기간의 분포와 바쁜기간의 분포를 유도하여 평균 사이클 길이를 유도한다.

5.1 바쁜 기간의 길이

N_B를 각 모형의 바쁜기간 시작시점에서의 고객수라 하고, $N_B(z)$를 바쁜기간 시작시점에서의 고객수 PGF라고 하자. 여기서 각 모형의 바쁜기간 LST를 $B_N^*(\theta)$라고 하면 이는 다음과 같다.

$$B_N^*(\theta)=N_B(z)|_{z=B^*(\theta)}=N_B[B^*(\theta)] \tag{41}$$

여기서 $B^*(\theta)$는 1명으로 바쁜기간이 시작되는 경우의 바쁜기간 LST이다.

그러므로, 각 모형의 바쁜기간 LST는 각각의 바쁜기간 시작시점에서의 고객수 PGF를 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 여기서 N정책과 준비기간을 갖는 모형에서의 바쁜기간 시작시점에서의 고객수 PGF를 $N_{N,B}(z)$, 단수휴가와 준비기간을 갖는 모형인 경우에는 $N_{V_1B}(z)$, 복수휴가와 준비기간을 갖는 모형인 경우에는 $N_{V,B}(z)$라고 하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$N_{N,B}(z)=R^*(\lambda-\lambda X(z))\left\{\sum_{n=0}^{N-1}\pi_n z^n[X(z)-1]+1\right\} \tag{42}$$

$$N_{V_1B}(z)=R^*(\lambda-\lambda X(z))\cdot[V^*(\lambda-\lambda X(z))-V^*(\lambda)+V^*(\lambda)X(z)] \tag{43}$$

$$N_{V,B}(z) = \frac{[V^*(\lambda-\lambda X(z)) - V^*(\lambda)]R^*(\lambda-\lambda X(z))}{1-V^*(\lambda)} \tag{44}$$

이를 식 (41)에 적용하여 바쁜기간 LST를 얻을 수 있고, θ에 관하여 미분한 후, $\theta=0$을 이용하여 바쁜기간의 평균길이를 구한다.

5.2 유휴 기간의 길이

N정책과 준비기간을 갖는 모형에서의 유휴기간 LST $T_N^*(\theta)$는 식 (25)에서 이미 구하였다. 따라서 평균 유휴기간은 식 (25)를 미분하여 $\theta=0$을 대입하면 다음과 같다.

$$E(T_N) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{N-1}\pi_k \tag{45}$$

단수휴가와 준비기간을 갖는 모형에서의 유휴기간의 길이는 휴가만으로 끝나는 경우와 휴가와 유휴기간으로 끝나는 경우의 두 가지로 나눌 수 있다. 여기서 위 모형의 유휴기간의 LST를 $I_{V_1}^*(\theta)$라 하면, 아래와 같이 얻는다.

$$I_{V_1}^*(\theta) = V^*(\theta) - V^*(\theta+\lambda) + V^*(\theta+\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+\theta} \tag{46}$$

또한 이로부터 구한 평균 유휴기간은 다음과 같다.

$$E(I_{V_1}) = E(V) + \frac{1}{\lambda}V^*(\lambda) \tag{47}$$

이와 같은 방법으로 복수휴가와 준비기간을 갖는 모형에서의 유휴기간 LST $I_V^*(\theta)$도 k개의 휴가가발생했다는 조건을 두고 이를 해제하는 방법으로 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$I_V^*(\theta) = \frac{V^*(\theta) - V^*(\theta+\lambda)}{1-V^*(\theta+\lambda)} \tag{48}$$

이로부터 평균 유휴기간을 얻는다.

$$E(I_V) = \frac{E(V)}{1-V^*(\lambda)} \tag{49}$$

5.3 평균 사이클 길이

평균 사이클 길이는 주어진 평균 준비기간과 앞서서 구한 평균 유휴기간, 평균 바쁜기간의 합으로 이루어진다. 그러므로 각 모형의 평균 사이클 길이는 5.1과 5.2에서 구한 평균값으로 얻을 수 있다.

5. 결 론

일반적으로 유연 생산시스템에서 하나의 기계로부터 여러 가지의 작업을 하는 경우, 작업이 바뀔 때마다 그에 필요한 준비기간이 필요하다. 본 연구에서는 이러한 현실 상황에 좀 더 접근하여 작업물품이 집단으로 도착하고, 다양한 형태의 휴가기간과 준비기간을 가지는 집단도착 시스템을 분석하였다.

본 연구에서 유도한 평균고객수 및 평균대기시간에 준비기간을 0으로 두고 평균고객수, 평균대기시간 등을 구해 보면 각각 기존에 연구되어진 휴가기간을 가진 $M^X/G/1$ 모형에서와 같음을 알 수 있다. 또한 Choudhury[4]의 결과값을 정확하게 수정하였고 세 모형에 대해서 Little의 법칙, 즉 $E(P) = \lambda E(X)(E(W_q) + E(S))$도 성립함을 확인할 수 있다. 한편, 임의시점의 고객수는 휴가가 없는 보통의 $M^X/G/1$ 모형에서의 임의시점 고객수와, 비바쁜기간에서의 임의시점 고객수의 합으로 표현되는 분해성질이 성립함을 알 수 있었으며, 대기시간에 있어서도 $M^X/G/1$에서보다 비바쁜 기간의 잔여시간만큼 더 기다린다는 성질을 보였다.

추후 연구과제로는 제어정책과 휴가정책이 준비기간을 함께 갖는 집단도착 시스템으로 연장할 수 있으며, 복수휴가와 준비기간을 갖는 시스템의 경우, 예외적 첫 번째 휴가기간을 갖는 시스템 등으

로 확장이 가능하다.

참 고 문 헌

[1] 이호우, 「대기행렬이론」, 개정판, 시그마프레스, 1998.

[2] 이순석, "Threshold와 휴가가 있는 집단 대기행렬의 운영특성", 박사학위논문, 성균관대학교, 1993.

[3] 이순석, 이호우, "부가변수를 이용한 휴가형 대기행렬의 모형화", 「대한산업공학회지」, 제16권, 제1호(1990), pp.107-114.

[4] Choudhury, G., "An $M^X/G/1$ Queueing system with a Setup Period and a Vacation Period," *Queueing Systems*, Vol.36(2000), pp.23-38.

[5] Lee, H.W., Lee, S.S. and K.C. Chae, "Operating characteristics of $M^X/G/1$ queue with N-policy," *Queueing Systems*, Vol.15(1994), pp. 387-399.

[6] Lee, H.W., S.S. Lee, J.O. Park, and K.C. Chae, "Analysis of $M^X/G/1$ queue with N-Policy and multiple vacations," *J. Appl. Prob.*, Vol.31 (1994), pp.467-496.

[7] Lee, S.S., H.W. Lee, S.H. Yoon, and K.C. Chae, "Batch arrival queue with N-policy and single vacations," *Comput. Oper. Res.* Vol.22 (1995), pp.173-189.

[8] Hur, S. and S.J. Paik, "The effect of different arrival rates on the N-policy of $M/G/1$ wiith server setup," *Applied Mathematical Modeling*, Vol.23(1999), pp.289-299.