韓國經營科學會誌
第27卷 第2號
2002年 6月

임의의 횟수의 휴가를 갖는 $M^X/G/1$ 및 $Geo^X/G/1$ 대기행렬의 분석*

채경철** · 김남기** · 이호우***

Analysis of $M^X/G/1$ and $Geo^X/G/1$ Queues with Random Number of Vacations

Kyung-Chul Chae** · Nam-Ki Kim** · Ho-Woo Lee***

■ Abstract ■

By using the arrival time approach of Chae et al.[6], we derive various performance measures including the queue length distributions (in PGFs) and the waiting time distributions (in LST and PGF) for both $M^X/G/1$ and $Geo^X/G/1$ queueing systems, both under the assumption that the server, when it becomes idle, takes multiple vacations up to a random maximum number. This is an extension of both Choudhury[7] and Zhang and Tian[11]. A few mistakes in Zhang and Tian are corrected and meaningful interpretations are supplemented.

Keyword : Arrival Time Approach, Vacation Queue, Bulk Arrival Queue, Idle and Busy Period

1. 서 론

휴가형 대기행렬시스템 중에서 대표적인 두 가지는 복수휴가시스템과 단수휴가시스템이다(각각 이호우[2]의 8장 2절과 3절 참조). 복수휴가시스템은 다음과 같이 진행된다. 서어버는 서비스할 고객

논문접수일 : 2002년 1월 11일 논문게재확정일 : 2002년 4월 10일
* 본 연구는 서울대학교 복잡계통계연구센터를 통한 한국과학재단의 지원에 의하여 수행되었음. 본 연구의 내용이 독자들께 보다 명확하게 전달될 수 있도록 꼼꼼히 지적해 주신 두 분 심사위원께 감사드립니다.
** 한국과학기술원 산업공학과
*** 성균관대학교 시스템경영공학부

이 없으면 길이 V_1의 휴가를 떠난다. 돌아와서 고객이 없으면 길이 V_2 의 휴가를 떠난다. 이와 같이 반복하여 휴가에서 돌아왔을 때 한 명 이상의 고객이 있으면 즉시 바쁜기간(busy period)이 시작된다. 반면에, 단수휴가시스템은 다음과 같이 진행된다. 서비스할 고객이 없으면 서어버는 길이 V의 휴가를 떠난다. 휴가에서 돌아왔을 때 고객이 있으면 즉시 바쁜기간이 시작되고, 없으면 기다렸다가 첫 고객의 도착 즉시 바쁜기간이 시작된다.

복수휴가시스템에서 휴가의 횟수를 최대 L회로 제한한 경우가 바로 제한된 횟수의 휴가를 갖는 시스템인데, 편의상 이를 LNV(limited number of vacations)라 부르자. LNV에서 L은 확률변수인데, "$P(L=1)=1$"이면 단수휴가시스템이 되고 "$P(L=유한)=0$"이면 복수휴가시스템이 된다. (비고 : "$P(L=0)=1$"이면 휴가가 없는 대기행렬시스템이 됨.) LNV를 이산시간 대기행렬인 Geo/G/1 시스템에 적용한 결과는 최근에 Zhang & Tian[11]이 발표했다. 반면에, 연속시간 대기행렬인 M/G/1 시스템에 LNV를 적용한 결과는 부분적으로만 알려져 있다([비고 11] 참조).

본 연구의 목적은 두 가지이다. 첫째로, M/G/1 시스템에 LNV를 적용한 완전한 결과를 제시한다. 아울러, 고객이 집단으로 도착하는 $M^X/G/1$ 시스템에 LNV를 적용한 결과도 제시한다. 둘째로, Zhang & Tian[11]의 결과를 고객이 집단으로 도착하는 $Geo^X/G/1$ 시스템으로 확장한다. 아울러, Zhang & Tian의 결과들을 의미 있게 해석하고 또한 일부 틀린 결과를 수정한다([비고 14] 참조).

2. $M^X/G/1$/LNV 대기행렬의 분석

$M^X/G/1$/LNV 대기행렬에 대한 정의 및 가정은 다음과 같다. 서어버가 한 명인 시스템에 고객은 집단으로 도착하는데, 집단들의 도착과정은 도착률이 λ인 포아송과정이고 집단들의 크기 $X_1, X_2, \cdots$는 iid 확률변수이다. 그리고, 도착한 고객은 한 명씩 서비스를 받는데, 서비스 시간 $S_1, S_2, \cdots$는 iid 확률변수이고 도착과정과 독립이다. 서비스가 하나 끝났을 때 차례를 기다리는 고객이 없으면 바쁜기간이 끝난다. 이후, 다시 바쁜기간이 시작될 때까지를 편의상 유휴기간(idle period)이라 부르자. 유휴기간은 서어버가 서비스를 하지 않고 있는 기간으로서, 이 동안에 발생할 길이 $V_1, V_2, \cdots$의 휴가들은 iid 확률변수이고 도착과정 및 서비스시간과 독립이다. 서론에서 언급했듯이, LNV는 휴가의 횟수를 최대 L회로 제한하는 시스템이다. 서어버가 L번째 이전의 휴가에서 돌아왔을 때 고객이 있으면 즉시 바쁜기간이 시작되고, L번째 휴가 후에도 여전히 고객이 없으면 기다렸다가 첫 고객(집단)의 도착 즉시 바쁜기간이 시작된다.

본 연구에서 사용할 확률변수는 모두 비음(non-negative)인데, 어떤 확률변수 Y가 이산이면 확률생성함수(PGF)를 $Y(z)$ 또는 $E(z^Y)$로 표현하고, Y가 연속이면 라플라스변환(LST)을 $Y^*(\theta)$ 또는 $E(e^{-\theta Y})$로 표현한다.

[비고 1] 고객이 한 명씩 도착하는 M/G/1/LNV 대기행렬의 경우에는 아래의 결과에 "$X(z)=z$"와 "$E(X)=1$"을 대입하면 된다.

먼저, PGF와 LST에 대해서 잘 알려진 사실을 요약한다. V동안 도착할 고객수의 PGF는 $V^*(\lambda-\lambda X(z))$이고, 이로부터 $V^*(\lambda)$는 V 동안 0개의 (고객)집단이 도착할 확률을 의미하게 된다. 또한, 0개의 집단이 도착한 휴가의 LST와 하나 이상의 집단이 도착한 휴가의 LST를 각각 $V^*(\theta|0)$와 $V^*(\theta|\neq 0)$라하면 이들은 다음과 같다(이호우[2, pp.263]).

$$V^*(\theta|0) = V^*(\theta+\lambda)/V^*(\lambda) \tag{1.a}$$

$$V^*(\theta|\neq 0) = \{V^*(\theta)-V^*(\theta+\lambda)\}/\{1-V^*(\lambda)\} \tag{1.b}$$

이제, 유휴기간 I의 LST인 $I^*(\theta)$를 구한다. L의 값이 l로 구현된 경우에, n번째의 휴가 중에 처음으로 집단이 도착할 확률은 $1 \le n \le l$에 대해서 $V^*(\lambda)^{n-1}\{1-V^*(\lambda)\}$이고 l번의 휴가중에 0개의 집단이 도착할 확률은 $\{V^*(\lambda)\}^l$이다. 따라서 L이 l로 구현된 경우에 유휴기간의 조건부 LST는 다음과 같다.

$$E(e^{-\theta I}|L=l)$$
$$= \sum_{n=1}^{l} V^*(\lambda)^{n-1}\{1-V^*(\lambda)\}V^*(\theta|0)^{n-1}$$
$$V^*(\theta|\neq 0)+V^*(\lambda)^l V^*(\theta|0)^l\{\lambda/(\theta+\lambda)\} \quad (2)$$

식 (2)의 우변 마지막 항에 있는 '$\lambda/(\theta+\lambda)$'는 (고객)집단이 하나 도착할 때까지 걸리는 지수시간의 LST이다. 식 (2)에 식 (1)을 대입한 다음 "$L=l$"이라는 조건을 풀어준 결과를 L의 PGF인 $L(z)$로 표현하면 다음과 같다(부록 D 참조).

$$I^*(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} P(L=l)E(e^{\theta I}|L=l)$$
$$= \frac{V^*(\theta)-V^*(\theta+\lambda)}{1-V^*(\theta+\lambda)}\{1-L(V^*(\theta+\lambda))\}$$
$$+\frac{\lambda}{\theta+\lambda}L(V^*(\theta+\lambda)) \quad (3)$$

[비고 2] 식 (3)에서 $L(V^*(\theta+\lambda))$는 $L(z)$에서 z 대신 $V^*(\theta+\lambda)$를 대입한 것인데, 복수휴가 시스템에서는 "$L(V^*(\theta+\lambda))=0$"이고 단수휴가 시스템에서는 "$L(V^*(\theta+\lambda))=V^*(\theta+\lambda)$"이다.

식 (3)으로부터 유휴기간의 기대치를 구하면 다음과 같다.

$$E(I)=\frac{1-L(V^*(\lambda))}{1-V^*(\lambda)}E(V)+\frac{L(V^*(\lambda))}{\lambda} \quad (4)$$

식 (4)를 의미 있게 해석하기 위해서 유휴기간 동안에 실제로 발생하는 휴가의 횟수를 N이라 하자. 그러면 (부록 A 참조),

$$E(N)=\{1-L(V^*(\lambda))\}/\{1-V^*(\lambda)\} \quad (5)$$

이므로, 식 (4)는 다음과 같이 Wald의 공식 형태로 표현된다.

$$E(I)=E(N)E(V)+L(V^*(\lambda))/\lambda \quad (6)$$

식 (6)으로부터 다음과 같은 조건부 확률을 얻는다. 시간축에서 바쁜기간들을 모두 제거하여 유휴기간들만 남긴 다음 재생보상(renewal reward) 정리를 적용하면 유휴기간 중의 임의 관찰시점에 서어버가 휴가중일 확률 $P(V|I)$와 고객을 기다리고 있을 확률 $P(D|I)$를 다음과 같이 얻는다(D는 미발동(dormant)을 의미함).

$$P(V|I)=\frac{E(N)E(V)}{E(I)} = \frac{\lambda E(N)E(V)}{\lambda E(N)E(V)+L(V^*(\lambda))} \quad (7.a)$$

$$P(D|I)=\frac{L(V^*(\lambda))/\lambda}{E(I)} = \frac{L(V^*(\lambda))}{\lambda E(N)E(V)+L(V^*(\lambda))} \quad (7.b)$$

[비고 3] PASTA(Wolff[10]) 속성에 의해서, 식 (7)은 유휴기간에 도착하는 임의 (고객)집단의 도착시에 각각 서어버가 휴가중일 확률과 고객을 기다리는 중일 확률이 된다.

[비고 4] 임의 시점에 서비스를 받고 있는 고객수는 0 또는 1이므로 이의 기대치는 서어버가 바쁠 확률 $P(B)$와 같다. 그리고 서비스를 받으러 서어버에게 가는 고객수는 단위시간당 평균 $\lambda E(X)$이고 서비스를 받는 시간은 평균 $E(S)$이므로 Little의 공식으로부터 "$P(B)=\lambda E(X)E(S)$"를 얻는데 편의상 이를 ρ로 표현한다. 따라서, 임의 관찰시점이 유휴기간일 확률은 "$P(I)=1-\rho$"이며

PASTA 속성에 의해서 $P(I)$와 $P(B)$는 임의 (고객)집단의 도착시점이 각각 유휴기간과 바쁜기간일 확률이 된다. 물론, 안정상태(steady state) 확률이 존재하기 위한 조건은 $\rho < 1$ 이다.

이제 안정상태 고객수의 PGF를 구하는데, 의미있는 해석이 가능케 하기 위해서 Chae et al.[6]의 도착시점방법을 이용한다. 임의 (고객)집단이 도착시에 보는 (서비스를 받고 있는 고객을 제외한) 대기중인 고객수의 PGF를 $\pi^a_{g,q}(z)$라 하고 (a, g, q 는 각각 도착(arrival), 집단(group), 대기장소(queue)를 의미함), 임의 집단의 도착시점이 각각 유휴기간과 바쁜기간에 속한다는 조건하에 조건부 PGF를 $\pi^a_{g,q}(z \mid I)$와 $\pi^a_{g,q}(z \mid B)$라 하면 다음을 얻는다([비고4] 참조).

$$\pi^a_{g,q}(z) = P(I)\pi^a_{g,q}(z|I) + P(B)\pi^a_{g,q}(z|B) \quad (8)$$

바쁜기간 중에는 고객 한 명이 서비스를 받고 있는데, 이 고객이 서비스를 받기 위해서 대기장소를 이탈할 때 뒤에 남긴 고객수의 PGF를 $\pi^d_q(z)$라 하자(d는 이탈(departure)을 의미함). 그리고, 이미 경과된(elapsed) 서비스시간 S_e 동안에 추가로 도착한 고객수의 PGF는 $S^*_e(\lambda - \lambda X(z))$인데, S_e의 LST인 $S^*_e(\theta)$와 S의 LST인 $S^*(\theta)$ 간의 관계는 다음과 같다.

$$S^*_e(\theta) = \{1 - S^*(\theta)\}/\{\theta E(S)\} \quad (9)$$

대기장소를 이탈할 때에 남긴 고객수와 추가로 S_e 동안에 도착한 고객수는 서로 독립이므로 다음이 성립한다.

$$\pi^a_{g,q}(z|B) = \pi^d_q(z) S^*_e(\lambda - \lambda X(z)) \quad (10)$$

마지막으로, 식 (10)의 $\pi^d_q(z)$와 식 (8)의 $\pi^a_{g,q}(z)$ 간에 알려진 관계는 다음과 같다(자세한 내용은 채경철 등[4] 참조).

$$\pi^d_q(z) = \pi^a_{g,q}(z)\{1 - X(z)\}/\{(1-z)E(X)\} \quad (11)$$

[비고 5] 식 (11)에서 '$\{1 - X(z)\}/\{(1-z)E(X)\}$'를 $X_e(z)$라 하면 이는 식 (18)의 형태인데, 이때 X_e는 임의고객이 서비스를 받으러 가면서 대기장소에 남기는 고객들 중에서 원래 같이 (집단으로) 도착했던 고객의 수를 의미한다. X_e는 또한 임의고객과 같이 (집단으로) 도착했으되 임의고객보다 먼저 서비스를 받을 고객수를 의미하기도 한다.

식 (10)과 식 (11)을 식 (8)에 대입하고 $\pi^a_{g,q}(z)$에 대해서 풀면 다음을 얻는다([비고 4] 참조).

$$\pi^a_{g,q}(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*(\lambda - \lambda X(z)) - z}\pi^a_{g,q}(z|I) \quad (12)$$

[비고 6] 식 (12)는 휴가형 대기행렬시스템의 고객수에 대한 분해속성을 의미한다(채경철 등[4]). 즉, 우변의 첫째 인자는 휴가가 없는 $M^X/G/1$ 대기행렬에 도착하는 임의 집단이 보는 대기중인 고객수의 PGF이고, 둘째 인자는 휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬에 유휴기간 중에 도착하는 임의 집단이 보는 대기중인 고객수의 PGF이다. 물론, PASTA 속성에 의해서 $\pi^a_{g,q}(z)$는 임의 시점에 대기중인 고객수 PGF와 같다.

제한된 횟수의 휴가를 갖는 $M^X/G/1$ 대기행렬의 경우에 식 (12)의 $\pi^a_{g,q}(z|I)$는 다음과 같이 구한다. 서어버가 휴가중일 때 도착하는 임의 집단은 경과된 휴가 V_e 동안에 도착한 고객을 볼 것이고, 서어버가 고객을 기다리고 있을 때 도착하는 집단은 0명을 볼 것이다. (비고 : V_e의 LST인 $V^*_e(\theta)$와 V의 LST인 $V^*(\theta)$간의 관계는 식 (9)와 동일한 형태임.) 따라서,

$$\begin{aligned}&\pi^a_{g,q}(z|I)\\ &= P(V|I)V^*_e(\lambda - \lambda X(z)) + P(D|I)z^0\end{aligned} \quad (13)$$

를 얻는데, 여기서 $P(V|I)$와 $P(D|I)$는 이미 식 (7)에서 얻었다.

[비고 7] 대기중인 고객수의 PGF에 $S^*(\lambda-\lambda X(z))$를 곱하면 서비스 받고 있는 고객까지 포함한 전체 고객수의 PGF가 된다(채경철 등[4]).

선입선출 경우에 대해서 임의 집단의 (공통) 대기시간 (또는, 집단에 속한 고객 중에서 제일 먼저 서비스를 받을 고객의 대기시간) LST를 $W^*_{g,q}(\theta)$라 하면 다음의 관계가 성립한다(채경철 등[4]).

$$W^*_{g,q}(\theta) = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))}\,\pi^a_{g,q}(z|I)\Big|_{\lambda-\lambda X(z)=\theta} \tag{14}$$

[비고 8] 식 (14)는 휴가형 대기행렬시스템의 대기시간에 대한 분해속성을 의미한다. 즉, 우변의 첫째항은 휴가가 없는 $M^X/G/1$ 대기행렬에 도착하는 임의 집단의 (공통) 대기시간이고, 둘째항은 식 (13)에서 '$\lambda-\lambda X(z)$'를 θ로 대체한 것으로서 유휴기간에 도착하는 임의 집단의 관점에서 유휴기간이 끝날 때까지의 잔여(remaining 또는 residual) 유휴기간을 의미한다.

[비고 9] 집단의 공통 대기시간 LST에 $X_e(S^*(\theta))$를 곱하면 임의 고객의 대기시간 LST를 얻는데, 이때 $X_e(S^*(\theta))$는 임의 고객과 같은 집단에 속했으되 임의 고객보다 먼저 서비스를 받는 고객 X_e명 분의 서비스시간의 LST를 의미한다([비고 5] 참조).

[비고 10] 임의 고객이 시스템에 체류하는 시간의 LST는 임의 고객의 대기시간 LST에 본인 몫의 서비스시간 LST인 $S^*(\theta)$를 곱한 것이다([비고 7, 9] 참조).

기존에 부분적으로 알려져 있는 결과와 비교하기 위해서 유휴기간 동안에 도착하는 총 고객수 α의 PGF $\alpha(z)$를 구하면 다음과 같다(부록 B 참조).

$$\alpha(z) = \{1-L(V^*(\lambda))\}\frac{V^*(\lambda-\lambda X(z))-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)} + L(V^*(\lambda))X(z) \tag{15}$$

LNV에 대한 대표적인 문헌으로 Takagi[8]와 Choudhury[7]를 꼽을 수 있는데, 이들은 각각 이탈시점 내재(embedded) 마코프체인과 부가변수법을 사용하여 $\alpha(z)$를 구했다. 이들이 $\alpha(z)$를 구한 이유는 다음과 같다. 도착시점방법이 등장하기 전에는 분해속성([비고 6] 참조)을

$$\pi^d_q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{S^*(\lambda-\lambda X(z))-z}\,\frac{1-\alpha(z)}{(1-z)E(\alpha)} \tag{16}$$

로 표현했는데(식 (11), (12) 참조), 여기서 $E(\alpha)$는 $\lambda E(X)E(I)$와 같다(부록 B 참조).

[비고 11] Takagi[8]와 Choudhury[7]의 결과를 완전하지 않은 부분적인 결과라고 서론에서 언급한 이유는 다음과 같다. Takagi[8, pp.127]는 고객이 한 명씩 도착하는 M/G/1 대기행렬에 대해서 복수휴가와 단수휴가시스템에 대한 분석을 한 다음 L이 (확률변수가 아니라 주어진) 상수인 경우에 대해서 유도과정 없이 식 (15)를 제시하였다. 반면에 Choudhury[7]는 고객이 집단으로 도착하는 $M^X/G/1$ 대기행렬을 다루기는 했으나, 역시 L이 상수인 경우만 다루었고 또한 분석의 대상을 고객수 PGF로 국한시켰다. 그리고, 역시 복수휴가와 단수휴가시스템을 먼저 상세히 분석한 다음에 이들을 비교적 간단한 절차에 의해 LNV로 묶었기 때문에 다소 논리의 비약이 엿보이기도 한다.

끝으로, 바쁜기간의 LST와 후입선출 경우에 대한 대기시간 LST는 부록 C에서 간단히 다룬다.

3. $\mathrm{Geo}^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 분석

최근 디지털 통신시스템으로의 다양한 응용가능성으로 인하여 이산시간 대기행렬에 대한 연구가 증대되고 있다. 이산시간 모형에서는 시간축을 슬롯(slot)이라 불리는 기본단위의 등간격으로 나누고, S와 V는 기본 슬롯의 정수배라고 가정한다. 고객의 도착은 슬롯의 중앙에서 발생하지만, 슬롯의 경계에서만 시스템의 상태가 측정되므로 고객의 도착도 슬롯의 경계에서 발생한다고 가정한다. 그렇지만, 하나의 경계에서 고객의 도착과 이탈이 동시에 발생하는 것을 방지하기 위해서, 경계 직전에 도착이 발생하는 것으로 가정하는 모형을 후도착(late arrival)모형이라 하고 경계 직후에 도착이 발생하는 것으로 가정하는 모형을 선도착(early arrival)모형이라 한다.

[비고 12] 후도착모형이 통신시스템에 보다 적합한 것으로 알려져 있으며(Bruneel & Kim[5]), 후도착모형의 결과가 연속시간 대기행렬의 결과와 잘 부합되므로, 본 논문에서는 후도착모형을 가정하고 논의를 전개한다.

$\mathrm{Geo}^X/G/1/LNV$ 대기행렬이 $M^X/G/1/LNV$ 대기행렬과 다른 점은 다음과 같다. 하나의 슬롯동안 0명의 고객이 도착할 확률을 $\overline{\lambda}$라 하자. 그러면, 한 명 이상 도착할 확률 λ는 '$1-\overline{\lambda}$' 인데 이는 모든 다른 슬롯에서의 고객 도착 여부와 독립이다. 어느 슬롯 동안에 X 명의 고객이 도착하는 경우에($X \ge 1$), 후도착모형에서는 이들 X명이 슬롯의 맨 끝(슬롯 경계 직전)에 집단으로 도착한 것으로 간주한다. 따라서, 집단의 도착간(interarrival) 시간은 평균이 λ^{-1}인 iid 기하(geometric)분포를 따른다. 또 다른 차이점은 $M^X/G/1$에서는 연속변수였던 $V, S, I, W_{g,q}$등이 $\mathrm{Geo}^X/G/1$에서는 모두 이산변수라는 점이며, 따라서 이들의 PGF인 $V(z)$, $S(z)$, $I(z)$, $W_{g,q}(z)$ 등을 사용한다.

하나의 슬롯 동안에 도착하는 고객수의 PGF를 $A(z)$라 하면

$$A(z)=\overline{\lambda}z^0+\lambda X(z) \tag{17}$$

가 되고, V동안에 도착할 고객수의 PGF는 $V(A(z))$이며, 이로부터 V동안 0명이 도착할 확률로 $V(\overline{\lambda})$를 얻는다. $V(A(z))$와 $V(\overline{\lambda})$는 각각 $M^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 $V^*(\lambda-\lambda X(z))$와 $V^*(\lambda)$에 해당된다. 또한, $V(\overline{\lambda}z)$와 '$\lambda z/(1-\overline{\lambda}z)$'가 각각 식 (1)의 $V^*(\theta+\lambda)$와 식 (2)의 '$\lambda/(\theta+\lambda)$'에 해당됨을 보일 수 있다(부록 D 참조). 물론, $V(A(z))$가 $V^*(\lambda-\lambda X(z))$에 해당되듯이 $S(A(z))$는 [비고 7]의 $S^*(\lambda-\lambda X(z))$에 해당된다. 그리고 식 (10)의 $S_e^*(\lambda-\lambda X(z))$와 식 (13)의 $V_e^*(\lambda-\lambda X(z))$에 해당되는 것은 각각 $S_e(A(z))$와 $V_e(A(z))$임을 보일 수 있는데(김남기와 채경철[1]) 이때 $S_e(z)$와 $S(z)$간의 관계는

$$S_e(z)=\{1-S(z)\}/\{(1-z)E(S)\} \tag{18}$$

이고, $V_e(z)$과 $V(z)$ 간의 관계도 이와 동일한 형태이다([비고 5] 참조).

[비고 12]에서 언급했듯이 후도착모형의 결과는 연속시간 대기행렬의 결과와 잘 부합되는데, 특히 $\mathrm{Geo}^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 고객수 PGF에 관한 결과는 $M^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 결과와 완전히 일치한다(부록 D 참조). 즉, 식 (14)만 제외하고 식 (1)부터 식 (16)까지에 위에서 언급한 대응관계를 대입하면 바로 $\mathrm{Geo}^X/G/1/LNV$ 대기행렬에 대한 결과를 얻게 된다. 예를 들어, $\mathrm{Geo}^X/G/1/LNV$ 대기행렬에 대한 $\pi^a_{g,q}(z|I)$는 다음과 같다. 먼저, 식 (13)에 $V_e^*(\lambda-\lambda X(z))$ 대신에 $V_e(A(z))$를 대입한다. 다음 식 (7)에서 $L(V^*(\lambda))$ 대신 $L(V(\overline{\lambda}))$로 대체한 후에 이를 식 (13)에 대입하면 된다. (단, 식 (18)은 식 (9)에 대응하는 것으로 간주한다(부록 D 참조)).

식 (14)에 대응하는 결과를 얻기 위해서 식 (14)의 유래를 알아보자. 휴가가 없고 고객이 한 명씩 도착하는 선입선출 M/G/1 대기행렬에서 임의 고객의 대기시간 LST는

$$W^*_{g,M/G/1}(\theta)=\frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda S^*(\theta)} \tag{19}$$

인데, 우변의 분모에서 (한 명분 서비스시간의 LST인) $S^*(\theta)$를 (X명분의 서비스시간의 LST인) $X(S^*(\theta))$로 대체(하고, 아울러 "$\rho=\lambda E(S)$"를 "$\rho=\lambda E(X)E(S)$"로 대체)한 것이 바로 식 (14) 우변의 첫째 인자이다([비고 1, 4] 참조). 식 (19)에 대응하는 것은 휴가가 없는 선입선출 Geo/G/1 대기행렬에서 임의 고객의 대기시간 PGF인데, 이는 다음과 같이 알려져 있다.

$$W_{g,Geo/G/1}(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{\overline{\lambda}-z+\lambda S(z)} \tag{20}$$

따라서, 식 (20)의 분모에서 $S(z)$를 $X(S(z))$로 대체(하고, 아울러 "$\rho=\lambda E(S)$"를 "$\rho=\lambda E(X)E(S)$"로 대체)하면 식 (14) 우변의 첫째 인자에 대응된다. 다음, 식 (14) 우변의 둘째 인자는 식 (13)에 '$\lambda-\lambda X(z)$' 대신 θ를 대입한 것이다. 따라서 $Geo^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 $\pi^a_{g,q}(z|I)$에 $A(z)$ 대신에 z를 대입하면 식 (14) 우변의 둘째 인자에 대응되는 인자를 얻는다 (부록 D 참조). 이상을 종합하면 식 (14)에 대응하는 식은 다음과 같다.

$$W_{g,q}(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{\overline{\lambda}-z+\lambda X(S(z))}\,\pi^a_{g,q}(z|I)\Big|_{A(z)=z} \tag{21}$$

[비고 13] 식 (21)에 대한 해석은 식 (14)에 대한 해석([비고 8] 참조)과 동일하다. 특히, 우변의 둘째 인자는 식 (13)에서 $V_e^*(\lambda-\lambda X(z))$를 $V_e(z)$로 대체한 것과 같다.

바쁜기간의 PGF와 후입선출 경우에 대한 대기시간 PGF 역시 부록 C의 결과를 위에서와 같은 유사한 방법으로 손질하기만 하면 얻을 수 있는데, 이는 지면 관계상 생략한다.

[비고 14] Zhang & Tian[11]은 고객이 한 명씩 도착하는 Geo/G/1/LNV 대기행렬을 분석하였는데, 기존에 알려진 결과를 거의 활용하지 않고 대부분의 결과를 직접 계산해서 구하는 과정에서 일부 틀린 결과가 발생하였다. 식 (17)에서 식 (21)까지 그리고 부록 D의 결과에 $X(z)$과 $E(X)$를 각각 z와 1로 대체하면 Geo/G/1/LNV 대기행렬에 대한 결과가 되므로 오기된 결과는 쉽게 알아볼 수 있다. 예를 들어, 식 (20)의 분모에 있는 $\overline{\lambda}$를 $-\lambda$로 잘못 표기하고 또한 식 (15)에 대응되는 식에서 $L(V(\overline{\lambda}))X(z)$는 $L(V(\overline{\lambda}))z$로 표기해야 되는데 이를 $L(V(\overline{\lambda}))$로 표기한 것은 오기라고 할 수도 있다(Zhang & Tian의 식 (8) 참조). 그러나, 분명히 틀린 결과는 다음과 같다. 첫째로, 유휴기간의 PGF인 $I(z)$를 잘못 구했는데(Zhang & Tian의 식 (27) 참조), 이는 정지랜덤합(stopped random sum)을 독립랜덤합으로 착각한 결과이다(채경철과 박현민[3] 참조). 둘째로, 특수한 경우인 복수휴가에 대한 결과 (Zhang & Tian의 Case 1 참조)에서 불필요하게 $\lambda/\{1-V(\overline{\lambda})\}$를 곱한 것 등이다.

4. 결 론

본 연구에서 다룬 LNV(서론 참조)의 장점은 다음과 같다. 첫째는 현실 적용가능성이 높아진 점인데, 이는 LNV가 두 가지의 대표적인 휴가형 대기행렬시스템인 복수휴가시스템과 단수휴가시스템뿐만 아니라 이들의 중간 형태들을 모두 포함하기 때문이다. 둘째는 복수휴가시스템과 단수휴가시스템 그리고 휴가가 없는 시스템 등을 따로따로 분석하지 않고 한 가지 방법으로 동시에 처리할 수 있게 된 점이다.

본 연구에서는 기존에 $M^X/G/1/LNV$ 시스템과

$Geo^X/G/1/LNV$ 시스템에 대해서 부분적으로 알려져 있던 결과를 완전하게 하였으며, 또한 일부 틀린 결과를 수정하였다.

〈부록〉 A : $N(z)$와 $E(N)$의 유도

" $L=l$ " 조건 하에 N의 조건부 PGF는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(z^N|L=l) &= \sum_{n=1}^{l-1} V^*(\lambda)^{n-1}\{1-V^*(\lambda)\}z^n \\ &\quad + [V^*(\lambda)^{l-1}\{1-V^*(\lambda)\}+V^*(\lambda)^l]z^l \\ &= \frac{z\{1-V^*(\lambda)\}+(1-z)\{zV^*(\lambda)\}^l}{1-zV^*(\lambda)} \end{aligned} \tag{A.1}$$

따라서, $N(z)$를 $L(z)$로 표현하면 다음과 같다 (식 (3) 참조).

$$\begin{aligned} N(z) &= \sum_{l=1}^{\infty} P(L=l)E(z^N|L=l) \\ &= \frac{z\{1-V^*(\lambda)\}+(1-z)L(zV^*(\lambda))}{1-zV^*(\lambda)} \end{aligned} \tag{A.2}$$

그리고, ' $dN(z)/dz$'에 " $z=1$"을 대입하면 식 (5)를 얻는다.

〈부록〉 B : $\alpha(z)$와 $E(\alpha)$의 유도

V 동안에 도착할 고객수의 PGF는 $V^*(\lambda-\lambda X(z))$인데, 이에 (고객) 집단이 하나 이상 도착한다는 조건을 걸면

$$\{V^*(\lambda-\lambda X(z))-V^*(\lambda)\}/\{1-V^*(\lambda)\} \tag{B.1}$$

가 된다. 반면에, L 번의 휴가동안 집단이 0개 도착하는 경우에 유휴기간에 도착하는 고객수의 PGF는 $X(z)$이다. 따라서,

$$\begin{aligned} &E(z^\alpha|L=l) \\ &= \{1-V^*(\lambda)^l\}\frac{V^*(\lambda-\lambda X(z))-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)} \\ &\quad + V^*(\lambda)^l X(z) \end{aligned} \tag{B.2}$$

인데, 여기서 $\{V^*(\lambda)\}^l$ 을 $L((V^*(\lambda))$로 대체하면 $\alpha(z)$가 되고(식 (A.1)과 (A.2) 참조), 이에 식 (4)를 대입하면 식 (15)가 된다. 또한, ' $d\alpha(z)/dz$' 에 ' $z=1$'을 대입하여 $E(\alpha)$를 얻으면 이는 식 (6)에 $\lambda E(X)$를 곱한 꼴이 된다.

〈부록〉 C : 바쁜기간과 후입선출 대기시간의 LST

휴가가 없는 $M^X/G/1$ 대기행렬에서 유휴기간에 도착한 집단의 크기가 1인 경우에 대한 바쁜기간을 β라 하면, β의 LST인 $\beta^*(\theta)$는 방정식 " $\beta^*(\theta)=S^*(\theta+\lambda-\lambda X(\beta^*(\theta)))$"의 최소해로 알려져 있다(Takagi[8, pp.49]). 그러면, $M^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 바쁜기간 B의 LST인 $B^*(\theta)$는 다음과 같다.

$$B^*(\theta)=\alpha(z)|_{z=\beta^*(\theta)} \tag{C.1}$$

즉, 유휴기간에 도착한 α명 각각이 독립적으로 β만큼씩 B에 기여한다는 뜻인데, 이는 지체(delay)사이클 이론으로 알려져 있다(이호우[2, pp.444]). 식 (C.1)으로부터 얻은 B의 기대치는

$$E(B)=\frac{E(\alpha)E(S)}{1-\rho}=\frac{\rho}{1-\rho}E(I) \tag{C.2}$$

인데, 이로부터 [비고 4]에서 얻은 " $P(B)=\rho$"를 확인할 수 있다.

후입선출 경우의 대기시간 역시 지체사이클 이론으로 구한다. 지면 관계상, 대표적인 경우인 비축출형(non-preemptive) 경우만 다루겠는데, 이는 일단 시작된 서비스는 도중에 중단시키지 않는 경우이다. 이 경우, 임의 집단의 (공통) 대기시간의 LST를 식 (8)과 같은 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$W^*_{g,q}(\theta)=P(I)W^*_{g,q}(\theta|I)+P(B)W^*_{g,q}(\theta|B) \quad (C.3)$$

여기서, 조건부 LST인 $W^*_{g,q}(\theta|I)$와 $W^*_{g,q}(\theta|B)$는 다음과 같다(식 (13) 참조).

$$W^*_{g,q}(\theta|I)=P(V|I)V^*_e(\theta+\lambda-\lambda X(\beta^*(\theta)))+P(D|I)e^{-\theta\cdot 0} \quad (C.4)$$

$$W^*_{g,q}(\theta|B)=S^*_e(\theta+\lambda-\lambda X(\beta^*(\theta))) \quad (C.5)$$

여기서 $V^*_e(\theta)$와 $S^*_e(\theta)$는 2절에 등장했던 것과 형태는 같지만(식 (9) 참조) 의미는 다르다. 예를 들어, 2절에서는 S_e가 경과된 서비스시간을 의미했지만 식 (C.5)에서는 S_e가 잔여 서비스시간을 의미한다([비고 5]) 참조). 따라서, 식 (C.5)의 우변은 "잔여 S 동안 도착하는 고객들이 각각 하나씩 기여하는 β들을 합친 것에 잔여 S까지 더한 것의 LST"를 의미한다. 이러한 해석은 식 (C.4)의 $V^*_e(\theta+\lambda-\lambda X(\beta^*(\theta)))$에 대해서도 동일하다. 그리고, 식 (C.4)의 $e^{-\theta\cdot 0}$는 공통 대기시간이 0임을 의미한다. 끝으로 집단의 공통대기시간 LST에 $X_e(\beta^*(\theta))$를 곱하면 임의 고객의 대기시간 LST를 얻는다([비고 9] 참조).

〈부록〉 D : $Geo^X/G/1/LNV$ 대기행렬의 성능척도 유도

첫째로, 식 (1)에 대응하는 $V(z|0)$와 $V(z|\neq 0)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(z|0) &= \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(V=k|0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(V=k)P(0|V=k)/P(0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(V=k)\ \bar{\lambda}^k/V(\bar{\lambda}) \\ &= V(\bar{\lambda}z)/V(\bar{\lambda}) \end{aligned} \quad (D.1)$$

$$\begin{aligned} V(z|\neq 0) &= \{V(z)-P(0)V(z|0)\}/P(\neq 0) \\ &= \{V(z)-V(\bar{\lambda}z)\}/\{1-V(\bar{\lambda})\} \end{aligned} \quad (D.2)$$

둘째로, 식 (2)와 (3)에 대응하는 $E(z^I|L=l)$과 $I(z)$는 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} &E(z^I|L=l) \\ &= \sum_{n=1}^{l} V(\bar{\lambda})^{n-1}\{1-V(\bar{\lambda})\}V(z|0)^{n-1}V(z|\neq 0) \\ &\quad + V(\bar{\lambda})^l V(z|0)^l\{\lambda z/(1-\bar{\lambda}z)\} \end{aligned} \quad (D.3)$$

식 (D.3) 우변의 '$\lambda z/(1-\bar{\lambda}z)$'는 (고객) 집단이 하나 도착할 때까지 걸리는 기하시간의 PGF이다. 식 (D.3)에 (D.1)과 (D.2)를 대입하고 "$L=l$"이라는 조건을 풀어 준 결과를 $L(z)$로 표현하면 다음과 같다(비고 : 식 (3)을 얻는 과정도 이와 유사함).

$$\begin{aligned} I(z) &= \sum_{l=1}^{\infty} P(L=l)E(z^I|L=l) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} P(L=l)\left[\frac{1-V(\bar{\lambda}z)^l}{1-V(\bar{\lambda}z)}\{V(z) - V(\bar{\lambda}z)\}+V(\bar{\lambda}z)^l\frac{\lambda z}{1-\bar{\lambda}z}\right] \\ &= \frac{1-L(V(\bar{\lambda}z))}{1-V(\bar{\lambda}z)}\{V(z)-V(\bar{\lambda}z)\} + L(V(\bar{\lambda}z))\frac{\lambda z}{1-\bar{\lambda}z} \end{aligned} \quad (D.4)$$

셋째로, 식 (A.2)와 식 (5)에 대응하는 $N(z)$와 $E(N)$은 다음과 같이 얻는다. 식 (A.1)에서 유일하게 달라지는 부분은 $V^*(\lambda)$가 $V(\bar{\lambda})$로 대체되는 것이기 때문에, 식 (A.2)에서도 $V^*(\lambda)$를 $V(\bar{\lambda})$로 대체하기만 하면 $Geo^X/G/1/LNV$ 대기행렬에 대한 $N(z)$를 얻는다. 같은 이유로, 식 (5)에 대응하는 $E(N)$은 다음과 같다.

$$E(N)=\{1-L(V(\bar{\lambda}))\}/\{1-V(\bar{\lambda})\} \quad (D.5)$$

그리고, 식 (D.4)로부터 $E(I)$를 구한 다음 이를 식 (D.5)로 표현하면 다음과 같이 식 (6)에 대응하는 관계식을 얻는다.

$$E(I)=E(N)E(V)+L(V(\overline{\lambda}))/\lambda \quad \text{(D.6)}$$

또한 식 (D.6)으로부터 식 (7)에 대응하는 $P(V|I)$와 $P(D|I)$를 얻는데 이 역시 식 (7)에서 $L(V^*(\lambda))$를 $L(V(\overline{\lambda}))$로 대체한 것과 같다.

[비고 15] 식 (6)의 우변 둘째 항의 분모인 λ는 포아송과정으로 도착하는 집단의 도착율인 반면에 식 (D.6)에 있는 λ는 임의 슬롯에 집단이 하나 도착할 확률이다. 이렇게 정의가 서로 다른데도 불구하고 서로 대응되는 이유는 두 가지 모두 "단위시간당 도착하는 집단수의 기대치"라는 공통점이 있기 때문이다(단, 슬롯 하나의 크기를 단위시간으로 간주함).

넷째로, 도착시점방법(Chae et al.[6])에 근거한 식 (8)과 (10)~(14)의 관계식이 Geo^X/G/1/LNV 대기행렬에서도 여전히 유효한 이유는 도착시점 방법을 (처음으로) 이산시간 대기행렬에 적용한 김남기와 채경철[1]에서 찾을 수 있는데, 예를 들면 PASTA 속성([비고 3, 4] 참조)에 대응되는 BASTA(Takagi[9, pp.6]) 속성 같은 것이 있기 때문이다. (비고 : BASTA 속성은 후도착모형에서는 성립하지만 선도착모형에서는 성립하지 않음([비고 12] 참조)). 또한, 식 (18)을 식 (9)에 대응시키는 이유는 두가지이다. 첫째는 당연한 이유인데, 식 (9)의 우변에 있는 S는 연속변수인 반면에 식 (18)의 우변에 있는 S는 이산변수이기 때문이다. 두 번째 이유는 다음과 같다. 후도착모형에서는 하나의 슬롯 동안 총 X명이 도착하는 경우에(단, $X\geq 1$) 이들 X명이 해당 슬롯의 끝부분에 일시에 집단으로 도착하는 것으로 간주한다. 그러므로, 임의 관찰시점에 진행중인 슬롯의 경과된 부분에서 도착한 고객은 없(는 것으로 간주한)다. 따라서, 식 (9)의 S_e에는 관찰시점에 진행중인 서비스의 경과된 시간이 모두 포함되는 반면에, 식 (18)의 S_e에는 관찰시점에 진행중인 서비스의 경과된 시간에서 관찰된 슬롯의 경과된 부분을 제외한 나머지만 포함되는 것이다.

다섯째로, 식 (21)에서 '$1-\lambda+\lambda X(z)$' 대신 z를 대입하는 것이 식 (14)에서 '$\lambda-\lambda X(z)$' 대신 θ를 대입하는 것에 대응하는 이유는 다음과 같다. 이산시간 대기행렬의 도착과정과 독립인 확률변수 Y를 고려하자. 그러면, Y 시간 또는 Y개 슬롯 동안 도착할 고객수의 PGF는 Y의 PGF인 $E(z^Y)$에 z 대신 '$1-\lambda+\lambda X(z)$'를 대입한 $E[\{1-\lambda+\lambda X(z)\}^Y]$이다. 다음, 슬롯의 크기를 $1/n$ 시간으로 줄이고, 슬롯당 (고객)집단이 하나 도착할 확률도 λ/n로 줄인다. (이렇게 하면 Y 시간 동안의 슬롯수는 nY개가 되지만, Y 시간 동안 도착할 고객수의 기대치는 동일하다([비고 15] 참조)). 이제, Y시간 동안 도착할 고객수의 PGF는 다음과 같다.

$$E\left[\left\{1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}X(z)\right\}^{nY}\right] = E\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{nY}\left\{1+\frac{\lambda X(z)/n}{1-\lambda/n}\right\}^{nY}\right] \quad \text{(D.7)}$$

여기에 $n\to\infty$ 극한을 취하면 연속시간 대기행렬의 결과가 되며 이는 다음과 같다.

$$E[e^{-\lambda Y}e^{\lambda X(z)Y}]=E[e^{-\{\lambda-\lambda X(z)\}Y}] \quad \text{(D.8)}$$

그런데, 이는 Y의 LST인 $E(e^{-\theta Y})$에 θ 대신 '$\lambda-\lambda X(z)$'를 대입한 것이다.

마지막으로, 식 (15)에 대응하는 $\alpha(z)$는 다음과 같이 얻는다. 식 (B.2)에서 달라지는 부분은 $V^*(\lambda)$와 $V^*(\lambda-\lambda X(z))$가 각각 $V(\overline{\lambda})$와 $V(A(z))$로 대체되는 것이기 때문에, 식 (15)에서도 동일한 방법으로 대체하면 Geo^X/G/1/LNV 대기행렬에 대한 $\alpha(z)$를 얻는다. 또한, $\alpha(z)$로부터 $E(\alpha)$를 얻으

면 이는 식 (D.6)에 $\lambda E(X)$를 곱한 꼴이 된다.

참 고 문 헌

[1] 김남기, 채경철, "도착시점 방법에 의한 이산시간 대기행렬의 분석", 「한국경영과학회지」, 제26권, 제4호(2001). pp.47-53.

[2] 이호우, 「대기행렬이론」, 시그마프레스, 1998.

[3] 채경철, 박현민, "대기행렬모형에서 틀리기 쉬운 정지랜덤합에 관한 소고", 「대한산업공학회지」, 제24권, 제3호(1998). pp.381-386.

[4] 채경철, 최대원, 이호우, "일반휴가형 $M^X/G/1$ 대기행렬의 분해속성에 대한 소고", 「대한산업공학회지」, 제28권, 제3호(2002)에 게재 예정.

[5] Bruneel, H. and B.G. Kim, *Discrete-Time Models for Communication Systems Including ATM*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[6] Chae, K.C., H.W. Lee, and C.W. Ahn, "An Arrival Time Approach to M/G/1-type Queues with Generalized Vacations," *Queueing Systems*, Vol.38(2001), pp.91-100.

[7] Choudhury, G. "Analysis of the $M^X/G/1$ Queueing System with Vacation Times," Working Paper, Mathematical Sciences Division, Institute of Advanced Study in Science and Technology, Khanapara, 2001.

[8] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol.1 : Vacation and Priority Systems, Part 1*, North-olland, Amsterdam, 1991.

[9] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol 3 : Discrete-Time Systems, North-Holland*, Amsterdam, 1993.

[10] Wolff, R.W., "Poisson Arrivals See Time Averages," *Operations Research*, Vol.30(1982), pp.223-231.

[11] Zhang, Z.G. and Tian, N., "Discrete Time Geo/G/1 Queue with Multiple Adaptive Vacations," *Queueing Systems*, Vol.38(1982), pp.419-429.