韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 5. 제 41권, 제 1호, 109-126.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2002, Vol. 41, No. 1, 109-126.

부문항이 분할된 고사에서 우량한 신뢰도 계수추정과 그 평가치 분포의 정규화

홍 석 강 (동국대학교)

Ⅰ. 서 론

일반적으로 수능시험 등 최종선발목표시험에 좋은 성적을 얻게 하기 위하여 각급 학교 등 교육기관에서 모의고사로 출제, 평가하고자 할 때, 그 고사들의 모형은 다양한 형식의 문항들로 구성되게 하고 고사의 내용에는 전 교과과정의 문제들이 고르게 출제되어 신뢰도, 타당도, 난이도, 변별력 등 좋은 검사도구의 구비조건을 갖춘 양호한 검사를 제작해야 한다. 그러나 대개는 그러한 고사들이 평가가 수회 시행되는 과정에 신뢰도 계수치의 변이가 크며 신뢰롭지 못하다든지 아니면 평가치의 분포가 왜도나 첨도의 값이 크게 계산되어 정규분포와는 매우 다른 편의, 첨예한 분포형을 이루는 경우가 많다. 그것은 그 평가의 시행과정에서 고사의 신뢰도, 난이도, 타당도의 변동에 대한 조정이 부족함으로 인하여 일어나는 현상들이다. 이때, 신뢰도의 경우 고사의 문항들이 문항형식의 다양화로 객관식 문항으로만 출제되지 않고 객관식, 단답형, 주관식 등 여러 형의 문항들로 구성되는 경우 일반적으로 객관식 문항에 주로 이용되는 신뢰도 계수 공식들을 그대로 적용할 수 없고 주관식 문항의 점수들을 그대로 적용하기에는 점수 배점의 크기 변환에 따른 평가치의 객관화 과정에서 생기는 오차 때문에 정확한 신뢰도 계수를 계산하기가 어렵다.[1] 동시에 그 경우 자주 일어나는 평가 고사들의 편의, 첨예한 평가치 분포들을 평가 현장에서 직접적으로 표준 점수로 계산하기 전 왜도와 첨도의 크기를 먼저 검정하고 그 자료 분포의 정규화 과정을 거쳐 변환된 표준점수로써 최종 평가치를 산정 하는 것이 더욱 바람직한 것으로 생각된다.

일반적으로 신뢰도 검사에서 Spearman-Brown의 공식, Kuder-Richardson의 20 및 21식, 또는 Rulon의 식과 같은 신뢰도 공식들은 객관식 문항에 자주 이용되고 있고 그 효율성은 이미 잘 알려져 있으나 한 고사의 문항들을 몇 개의 부문항으로 분할했을 때(아니면 문항형이 서로 다른 부문항으로 구분되었을 때) 그런 형의 고사에서 신뢰도 계수를 어떻게 추정할 수 있는지는 잘 알려져 있지 않다. 그러므로 이 논문에서는 평가자들이 그러한 평가의 신뢰도 및 분포형의 편의에 대한 불안정성을 잘 관리하면서 신뢰롭고 유효한 평가를 시행할 수 있도록 많은 신뢰도 계수 가운데 통계학적으로 불편성, 효율성 및 일치성이 성립하는 우량한 신뢰도 계수를 추정하고 또 평가치 분포들의 왜도와 첨도의 크기를 검정한 후 평가치분포의 정규화를 통하여 최종 평가치를 산정하는 통계적 해석법을 주 연구내용으로 다루고자 한다.

Ⅱ. 연구의 내용

A. 이 연구의 기초이론과 통계적 해석법

Cronbach(1951)가 고사문항의 내적 일치도에 관한 측정치로써 α 계수(Coefficient α)라는 이름으로 신뢰도 계수를 정의한 후 Kuder-Richardson의 20과 21식, Spearman-Brown의 공식, Rulon의 반분법에 의한 공식 등은 객관식 문항들에 적용된 α계수의 특수한 예로 오

* 본 연구는 2002년도 동국대학교 논문게재연구비 지원으로 이루어졌음.
* 2001년 10월 투고, 2002년 3월 심사 완료.
* ZDM분류 : B59
* MSC2000분류 : 97C50
* 주제어 : 부문항의 분할, 우량한 신뢰도 계수 추정, 편기, 첨예한 평가치분포형의 정규화, 변환표준점수 산정법.

1) Lord 와 Novick (1968)의 주관식 문항 평가치를 객관화 점수로 변환시키는 방법과 그 제한점에 대한 내용을 참고할 것.

늘날에도 문항평가에서 신뢰도를 계산할 때 자주 사용되어지는 공식들이다. 그 후 많은 교육통계학자들이 일반적으로 문항수를 많게 하면 신뢰도가 향상되는 것을 증명하였고 또 최근에는 한 고사지에서 평가 문항수가 같든지 아니면 다른 문항수의 크기로 부문항을 분할했을 때 α계수에 대체될 수 있는 새로운 신뢰도 계수 공식들을 그들의 연구결과로 제시하고 있다. 여기서는 서론에서 논한 바와 같이 한 고사지가 출제 문항형이 각각 다른 부문항들로 구성된 경우를 가정했으므로 앞에서 논한 두 가지 경우 가운데 후자인 부문항의 크기가 다른 경우로 관심을 두고 Novick과 Lewis(1967), Raju(1970, 1977), Kristof (1974), Feldt(1975)가 정의한 신뢰도 계수 β_k(Coefficient β_k)를 보다 일반화시킨 Raju(1977)의 공식으로 표현하여 재증명하고 그들의 정리들을 예로써 보였으며 동시에 Raju(1977)의 계수 β_k가 Cronbach의 α_k보다 통계적으로 불편성, 효율성과 일치성이 성립하는 우량한 추정량임을 보였다.

여기서 부문항의 크기가 각각 다르게 분할된 경우 그 부문항의 문항형을 여러 출제형의 문항으로 배치할 수 있으므로 Colgan(1977)과 Griffith와 Mclone(1984)가 제시한 선행연구들을 참고하여 여러 문항형의 부문항으로 구성된 수학고사에서 우량한 신뢰도 계수를 계산하는 예를 보였다. 한편 평가치 분포의 표준 정규화에 관한 해석에는 Hashway (1998)가 제시한 왜도와 첨도의 통계량들로써 먼저 평가치 분포형이 편의, 첨예한 분포형들인지를 검정할 수 있도록 Pearson과 Hartley(1966)의 수표(수험자 표본이 대표본인 경우)와 Dàgostino와 Tietjen(1971), Dàgostino와 Pearson (1973)(수험자 표본이 소표본인 경우)의 수표들을 재편 수록하였으며 그 평가치 분포의 정규화는 Bock(1975)의 해석법을 이용하고 그 분포의 정규화에 의한 새로운 표준점수를 계산하는 예를 III절에서 제시하였다.

B. 주 연구 내용

(1) 고사의 문항 모형과 신뢰도 계수

지금 한 고사의 문항들을 다음 <표 1>과 같이 주문항을 X라하고 문항의 길이가 각각 다른 부문항을 X_1, X_2, $\cdots$, X_k, 그 부문항의 표본의 크기를 n_1, n_2, $\cdots$, n_k,라 하면 그 부문항 평가치 X_i의 추출 비율은 $P_i=\frac{n_i}{n}$이고 $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,

$$X_i=\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}\ (i=1,2,\cdots,k),\quad \sum_{i=1}^{k} X_i = X,$$

$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$ 이다.

<표1> 문항의 모형

부문항 (Subsample)	문항의 부표본 (subsample)	표본의 크기 (Sample Size)
X_1	X_{11}, X_{12}, $\vdots$, X_{1n_1}	n_1
X_2	X_{21}, X_{22}, $\vdots$, X_{2n_2}	n_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	X_{k1}, X_{k2}, $\vdots$, X_{kn_k}	n_k

정의 1. Cronbach의 신뢰도 계수 α_k와 Raju의 신뢰도 계수 β_k는

$$\alpha_k=\frac{k}{k-1}\,\frac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sigma_x^2} \quad \cdots (1)$$

$$\beta_k=\frac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sigma_x^2\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j} \quad \cdots (2)$$

이다.

단, σ_x^2은 주문항 평가치 X의 분산, $\sigma_{x_ix_j}$는 부문

항 평가치 X_i와 X_j의 공분산임.

정리 1. 주문항 평가치 X와 그 부문항 평가치들 X_i는 Lord 와 Novick(1968)이 정의한 τ-상사형 문항[2]이라 하고 그 진평가치를 T라 하면 $X=T+E$, $X_i=T_i+E_i$.

단, E와 E_i는 오차이고 X의 신뢰도 계수는

$\beta_k=\dfrac{\sigma^2{}_T}{\sigma^2{}_x}$ 이다.

(증명) $X=X_1+X_2+\cdots+X_k$,

$X_i=T_i+E_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

이므로

$$\sigma^2{}_T=\sum_{i=1}^{k}\sigma^2{}_{T_i}+\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{T_iT_j}$$

이다.

정리의 가정에서 E_i와 E_j는 서로 상관이 없으므로

$\sigma_{T_iT_j}=\sigma_{x_ix_j}$

이고, 또 소문항의 진평가치 공분산은 소문항의 진평가치 분산과 같으므로 τ_u와 τ_v가 소문항 u와 v의 진평가치라면

$\sigma^2{}_{\tau_u}=\sigma_{uv}=\sigma^2{}_{\tau_v}$

이고 이 값을 g로 표현하면

$$\begin{aligned}\sigma^2{}_{T_i}&=\sum_{j}^{n_i}\sigma^2{}_{\tau_u}+\sum\sum_{u\neq v}\sigma_{uv}\\&=n_ig+n_i(n_i-1)g\\&=n_i^2g\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $\sigma^2{}_{T_i}$을 위식에 대입하면

$$\sigma^2{}_T=g\sum_{i}^{k}n_i^2+\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}$$

이고

여기서 공분산은

$\sigma_{x_ix_j}=g\,n_in_j$

이므로

$$\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}=g\sum\sum_{i\neq j}n_in_j$$

이고

$$g=\frac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sum\sum_{i\neq j}n_in_j}$$

이다. 따라서

$$\sigma^2{}_T=\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}n_i^2+\sum\sum_{i\neq j}n_in_j\right)\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sum\sum_{i\neq j}n_in_j}\qquad\cdots(3)$$

$$=\frac{n^2\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sum\sum_{i\neq j}n_in_j}$$

이다. 그런데

$$\frac{n_in_j}{n^2}=P_iP_j$$

이므로

$$\sigma_T{}^2=\frac{\sum\sum\sigma_{x_ix_j}}{\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j}$$

이고, 신뢰도 계수 β_k는

$$\beta_k=\frac{\sigma_T{}^2}{\sigma_x{}^2}=\frac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sigma_x{}^2\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j}$$

이다.

지금 총문항의 개수가 n개인 고사를 k개의 부문항으로 분할하는 경우($k=1$이거나 $k=n$인 경우는 제외됨) 그 분할하는 경우의 수들을 모두 예상할 수 있고 (한 예로써 $n=10$, $k=3$이면 총 $[n_1,\ n_2,\ n_3]=[5,\ 3,\ 2]$로 분할된 경우를 가정하면 $\dfrac{10!}{5!3!2!}=2520$개의 경우의 수가 있음), 그 경우의 총수만큼 정해진다.[3] 그러면 그 모든 경우의 β_k들을

2) Lord 와 Novick(1968)에서 τ-상사형(Equivalent)문항의 정의들을 참고할 것

3) 예로써 k=3인 경우 [5, 3, 2]와 [6, 2, 2]는 3개의 부문항들로 이루어진 두 개의 서로 다른 고사모형이고 [5, 3, 2]와 [3, 5, 2]는 서로 다른 배열의 부문항으로 이루어진 동일한 고사 모형이다.

평균한 $E(\beta_k)=\beta_n$이므로 이것은 β_k가 β_n의 불편 추정량임을 의미하고, 여기서 $k=2$이고 두 개의 부문항들이 모두 같은 크기이면 Cronbach(1951)가 증명한 것처럼 $E(\alpha_2)=\alpha_n$이다. 그러므로 일반적으로 β_k의 개수는 부문항이 k개로 분할된 경우 그 부문항의 크기가 $n_1, n_2, \cdots, n_k$이면 그 경우의 총수는 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$이므로 그 모든 경우의 β_k를 평균 할 수 있고 그 불편성은 다음의 정리로 요약 될 수 있다.

정리 2. (β_k의 불편성), $E(\beta_k)=\beta_n$

(증명) $\beta_k=\dfrac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}}{\sigma_x^2(\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j)}$ 에서

$$A=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

이라 하면 $u\in X_1$, $v\notin X_1$인 경우 u와 v의 공분산의 계수는

$\binom{n-2}{n_1-1}\dfrac{(n-n_1)!}{n_2!n_3!\cdots n_k!}$ 이다.

일반적으로 $u\in X_i$, $v\notin X_i$이면

$$\binom{n-2}{n_i-1}\frac{(n-n_i)!}{n_1!,\cdots,n_{i-1}!,n_{i+1}!,\cdots,n_k!}$$

이고

$$B=\sum_{i=1}^{k}\binom{n-2}{n_i-1}\frac{(n-n_i)!}{n_1!,\cdots,n_{i-1}!,n_{i+1}!,\cdots,n_k!}$$

이고 또,

$$\binom{n-2}{n_i-1}\frac{(n-n_i)!}{n_1!,\cdots,n_{i-1}!,n_{i+1}!,\cdots,n_k!}=\frac{n_i(n-n_i)}{n(n-1)}\cdot A$$

이므로

$$B=\frac{A}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{k}n_i(n-n_i)$$

$$=\frac{A}{n(n-1)}\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j \qquad \cdots (4)$$

이다.

따라서

$$E(\beta_k)=\frac{\sum_{i=1}^{A}(\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j})}{A\,\sigma_x^2\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j}=\frac{B\sum\sum_{u\neq v}\sigma_{uv}}{A\,\sigma_x^2\sum\sum_{i\neq j}P_iP_j}$$

식 (4)에 이 식을 대입해서

$$E(\beta_k)=\frac{n}{n-1}\frac{\sum\sum_{u\neq v}\sigma_{uv}}{\sigma_x^2}=\beta_n=\alpha_n$$

가 증명된다.

또 $E(\beta_k)=\beta_n$이므로 $P[|E(\beta_k)-\beta_n|>\varepsilon]=0$로 다음의 정리를 얻는다.

정리 3. β_k는 β_n의 일치추정량이다.

(예 1) 한 고사지가 $k=4$의 부문항들로 분할된 경우 그 가운데 3개의 군으로 묶어 그 조합들을 생각할 때, 추정량 β_3는 β_4의 불편추정량임을 다음과 같이 보일 수 있다.

$k=4$에서 3 개의 부문항을 추출한 경우	공분산들의 합 $\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_ix_j}$
(1, 2) 3, 4 (1, 2) 4, 3	$2(\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+\sigma_{34})$
(1, 3) 2, 4 (1, 3) 4, 2	$2(\sigma_{12}+\sigma_{14}+\sigma_{32}+\sigma_{34}+\sigma_{24})$
(1, 4) 2, 3 (1, 4) 3, 2	$2(\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{42}+\sigma_{43}+\sigma_{23})$
(2, 3) 1, 4 (2, 3) 4, 1	$2(\sigma_{21}+\sigma_{24}+\sigma_{31}+\sigma_{34}+\sigma_{14})$
(2, 4) 1, 3 (2, 4) 3, 1	$2(\sigma_{21}+\sigma_{23}+\sigma_{41}+\sigma_{43}+\sigma_{13})$
(3, 4) 1, 2 (3, 4) 2, 1	$2(\sigma_{31}+\sigma_{32}+\sigma_{41}+\sigma_{42}+\sigma_{12})$

여기서 [(1, 2), 3, 4]의 경우를 보면 부문항들의 추출율은 $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$이므로 모든 공분산들의 추출확률의 합은

$$\sum\sum_{i\neq j} P_i P_j = 2\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}$$

이고,

$$E(\beta_3)=\frac{\sum_{i=1}^{12}(\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_i x_j})}{12\ \sigma_x^2(\sum\sum_{i\neq j}P_i P_j)}$$

$$=\frac{2\cdot 10(\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+\sigma_{34})}{12\ \sigma_x^2\left(\frac{5}{8}\right)}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{2(\sigma_{12}+\sigma_{13}+\sigma_{14}+\sigma_{23}+\sigma_{24}+\sigma_{34})}{\sigma_x^2}$$

이므로

$$\beta_4=\alpha_4$$

이다.

(예제 2) 위의 정리 2에서 $k=2$이면

$$\beta_2=\frac{\sigma_{x_1x_2}+\sigma_{x_2x_1}}{\sigma_x^2(P_1P_2+P_2P_1)}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{\sigma_x^2(P_1P_2)}$$

는 Feldt(1975) 가 증명한 신뢰도 계수식이고, 특히 $P_1=P_2=\frac{1}{2}$일 때,

$$\beta_2=\frac{4\sigma_{x_1x_2}}{\sigma_x^2}$$

는 Raju(1970)의 신뢰도 계수식 이다.

또, $k=3$일 때,

$$\beta_3=\frac{\sigma_{x_1x_2}+\sigma_{x_1x_3}+\sigma_{x_2x_3}}{\sigma_x^2(P_1P_2+P_1P_3+P_1P_3)} \quad\cdots(5)$$

는 Kristof(1974)가 증명한 식이다.

정리 4. (α_k와 β_k의 관계식)

모든 k에 대하여 $\beta_k \geqq \alpha_k$이다.

(증명) 정리 1에서 식 (1)과 (2)를 다시 쓰면

$$\alpha_k=\frac{k}{k-1}\,\frac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_i x_j}}{\sigma_x^2} \quad\cdots(6)$$

$$\beta_k=\frac{\sum\sum_{i\neq j}\sigma_{x_i x_j}}{\sigma_x^2\left(1-\sum_{i=1}^{n}P_i^2\right)} \quad\cdots(7)$$

이므로

$$1-\sum_{i=1}^{k}P_i^2\leq\frac{k-1}{k}=1-\frac{1}{k}$$

을 증명하기 위해서 Cauchy 부등식을 이용하면

$$k\left[\frac{\sum_{i=1}^{k}P_i}{k}\right]^2\leqq\sum_{i=1}^{k}P_i^2$$

에서

$$\sum_{i=1}^{k}P_i=1$$

이고

$$\frac{1}{k}\leq\sum_{i=1}^{k}P_i^2$$

이므로

$$1-\sum_{i=1}^{k}P_i^2\leq 1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$$

은 성립하므로 정리4는 증명된다.

여기서 위의 정리 4에 의하여

$E(\alpha_k)\leqq E(\beta_k)=\beta_n=\alpha_n$이므로 Cronbach의 신뢰도계수 α_k에 대해서는 $E(\alpha_k)\leq\alpha_n$이다.

다음, 일반적으로 한 수험자에 대하여 어떤 고사를 수 없이 많이 되풀이한다면 그는 그 고사의 실 횟수만큼의 점수들을 얻게 된다. 이 점수들로써 분포를 만들면 이 분포는 그의 진평가치를 평균으로 해서 정규 분포가 될 것인데 이 때 얻은 분포의 표준편차를 측정의 표준오차라 한다. 다음 정리 5는 이 표준오차의 공식이다.

정리 5. 평가치 측정의 표준오차 σ_E는 다음과 같다

$$\sigma_E = \sigma_x\sqrt{1-r_{xx}}$$

단, σ_x는 평가고사 X의 표준편차.

r_{xx}는 한 고사의 신뢰도 계수.

를 평가치 측정의 표준오차라 한다.

따라서 정리 4에서 $\beta_k \leq \alpha_k$이고 정리 5에 의하여

$\sigma_E = \sigma_x\sqrt{1-\beta_k} \leq \sigma_{E'}\sqrt{1-\alpha_k}$이므로

β_k는 α_k에 대하여 유효 추정량이다.

또 수험자의 평가치로써 진평가치 T에 대한 신뢰구간은 다음과 같이 얻어질 수 있다.

정리 6. (진평가치 T의 신뢰구간)

$$T = \bar{x} \pm Z_c \sigma_E$$

단, $\bar{x}$는 수험자의 원점수의 평균

σ_E는 표준오차

Z_c는 신뢰계수

를 진평가치 T의 신뢰구간이라 한다.

다음의 정리는 Hashway(1998)가 제시한 평가치 분포의 편의와 첨예도를 검정하기 위한 왜도(Skewness)와 첨도(Kurtosis)의 통계량들이다.

정리 7. 왜도 $\sqrt{b_1}$과 첨도 b_2의 통계량.

$$\sqrt{b_1} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3}{\left[\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\right]^3}$$

$$Z_1 = \pm\sqrt{\frac{b_1(N+1)(N+3)}{6(N-2)}}$$

$$b_2 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^4}{\left[\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\right]^4}$$

$$Z_2 = \left(b_2 - 3 + \frac{6}{N+1}\right) \times \sqrt{\frac{(N+1)^2(N+3)(N+5)}{24N(N-2)(N-3)}}$$

단, N는 수험자 표본의 크기.

그리고 Pearson 과 Hartley(1966)(N가 대표본일 경우) Dágostino 와 Tietjen(1971)과 Dágostino 와 Pearson (1973)(N가 소표본인 경우)이 위의 Z_1과 Z_2로써 t 분포와 χ^2분포를 이용한 정규확률밀도치를 계산하는 과정은 그들의 연구결과를 참고하기 바라며 여기서는 그들의 수표들을 재편하여 일반독자들이 참고하기 쉽게 <표 2>에 수록하였다.[4] 또 편의, 첨예한 평가치 분포형의 표준정규화 과정에 대한 통계적 해석법에는 많은 학자들이 여러종류의 왜도와 첨도의 통계량을 이용하여 표준정규확률치를 계산한 연구결과가 많다. 그러나 여기서는 조금 쉬운 경우의 해석법으로써 수험자의 모집단이 크고 평가치들이 정규분포를한다는 가정 하에 표본들을 추출하여 그 평가치들이 완전한 표준정규분포를 이루지 못할 경우 그것을 표준화하는데 유용한 Bock(1975)의 해석법을 이용하기로 하고 그 계산 과정을 다음의 정리 4에 수록하였다.

4) 여기서 통계량 Z_1은 표준정규분포에서 왜도의 값이 0 이므로 표준정규분포와 다른 분포형에서 왜도의 크기를 0에서 Z까지의 값으로 변환하기 위한 값이며, 또 통계량 Z_2 도 표준정규분포의 첨도의 크기인 3 을 기준으로 표본첨도의 변이를 0에서 Z까지의 값으로 변환시키는 값이다.

<표 2> 왜도와 첨도의 백분위점

Ⅰ. (1) 왜도 $\sqrt{b_1}$의 분포의 백분위점.(대표본인 경우)

표본의크기 N	백분위점 5%	백분위점 1%
25	.711	1.061
30	.662	.986
35	.621	.923
40	.587	.870
45	.558	.825
50	.534	.787
60	.492	.723
70	.459	.673
80	.432	.631
90	.409	.596
100	.389	.567
125	.350	.508
150	.321	.464
175	.298	.430
200	.280	.403
250	.251	.360
300	.230	.329
350	.213	.305
400	.200	.285
450	.188	.269
500	.179	.255
550	.171	.243
600	.163	.233
650	.157	.224
700	.151	.215
750	.146	.208
800	.142	.202
850	.138	.196
900	.134	.190
950	.130	.185
1000	.127	.180
1200	.116	.165
1400	.107	.152
1600	.100	.142
1800	.095	.134
2000	.090	.127
2500	.080	.114
3000	.073	.104
3500	.068	.096
4000	.064	.090
4500	.060	.085
5000	.057	.081

(2) 왜도 $\sqrt{b_1}$의 분포의 백분위점.(소표본인 경우)

표본의 크기 N	백분위점 5%	백분위점 1%
7	1.008	1.432
8	0.991	1.455
15	0.862	1.275
20	0.777	1.152
25	0.714	1.073
35	0.624	0.932

Ⅱ. (1) 첨도 b_2의 분포의 백분위점.(대표본인 경우)

표본의 크기N	백분위점 상한1%	상한5%	하한5%	하한1%
50	4.88	3.99	2.15	1.95
75	4.59	3.87	2.27	2.08
100	4.39	3.77	2.35	2.18
125	4.24	3.71	2.40	2.24
150	4.13	3.65	2.45	2.29
200	3.98	3.57	2.51	2.37
250	3.87	3.52	2.55	2.42
300	3.79	3.47	2.59	2.46
350	3.72	3.44	2.62	2.50
400	3.67	3.41	2.64	2.52
450	3.63	3.39	2.66	2.55
500	3.60	3.37	2.67	2.57
550	3.57	3.35	2.69	2.58
600	3.54	3.34	2.70	2.60
650	3.52	3.33	2.71	2.61
700	3.50	3.31	2.72	2.62
800	3.46	3.29	2.74	2.65
900	3.43	3.28	2.75	2.66
1000	3.41	3.26	2.76	2.68
1200	3.37	3.24	2.78	2.71
1400	3.34	3.22	2.80	2.72
1600	3.32	3.21	2.81	2.74
1800	3.30	3.20	2.82	2.76
2000	3.28	3.18	2.83	2.77
2500	3.25	3.16	2.85	2.79
3000	3.22	3.15	2.86	2.81
3500	3.21	3.14	2.87	2.82
4000	3.19	3.13	2.88	2.83
4500	3.18	3.12	2.88	2.84
5000	3.17	3.12	2.89	2.85

(2) 첨도 b_2의 분포의 백분위점.

(소표본인 경우)

표본의 크기N	백분위점			
	상한1%	상한5%	하한5%	하한1%
7	4.23	3.55	1.41	1.25
8	4.53	3.70	1.46	1.31
9	4.82	3.86	1.53	1.35
10	5.00	3.95	1.56	1.39
12	5.20	4.05	1.64	1.46
15	5.30	4.13	1.72	1.55
20	5.36	4.17	1.82	1.65
25	5.30	4.16	1.91	1.72
30	5.21	4.11	1.98	1.79
35	5.13	4.10	2.03	1.84
40	5.04	4.06	2.07	1.89
45	4.94	4.00	2.11	1.93
50	4.88	3.99	2.15	1.95

정리 8. Bock(1975)의 표준정규확률치 계산과정.

$$\underset{T}{\Phi}(z) \approx \begin{cases} G & Z \leqq 0 \\ \underset{T}{1}-G & Z > 0 \end{cases}$$

$$G=(a_1\eta+a_2\eta \quad T \quad + a_4\eta^4+a_5\eta^5)\phi(z)$$

$$\eta=\frac{1}{1+0.2316418\,|z|}$$

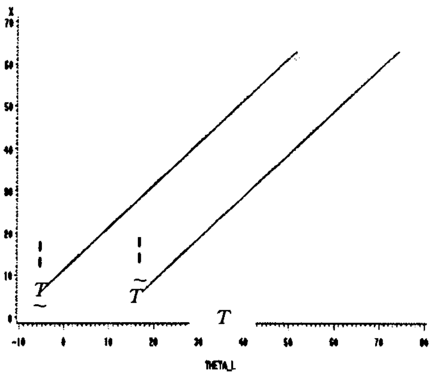
$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$a_1=0.319381530$$
$$a_2=-0.356563782$$
$$a_3=1.781477937$$
$$a_4=-1.821255978$$
$$a_5=1.330274429$$

단, $\Phi(z)$는 표준정규분포의 누적분포확률치이다.

Ⅲ. 계산 예 및 검토

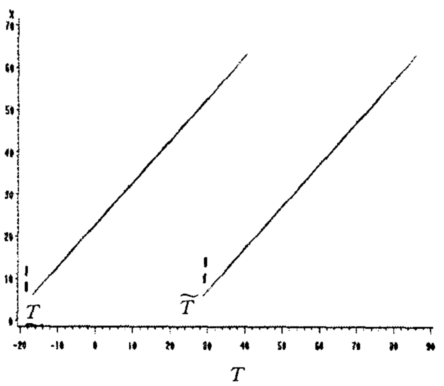
다음 예는 어느 대학 입시평가 연구소에서 2회 시행한 100명의 고등학교 3학년 학생들의 수학(Ⅰ)의 모의고사 성적들이다. 그 고사지는 X_1 객관식, X_2 단답형 및 X_3 주관식의 부문항들로써 $k=3$이고 그 부문항의 크기는 각각 $n_1=20$, $n_2=6$, $n_3=7$인 총문항수 $n=33$으로 구성되어 있다. 이 자료로써 신뢰도 계수들을 계산하고 그것으로써 표준오차 σ_E의 크기를 비교하며 수험자들의 성적에 대한 진평가치 T의 95% 신뢰구간을 정리6에 의하여 각각 계산하고 그 상한을 $\tilde{T}$, 하한을 $\underset{\sim}{T}$로 표시하였다. 이때 식 (5)를 이용하여 신뢰도계수치 β_3와 α_3는 1회 고사의 경우 각각 0.8403, 0.34955, 2회 고사의 경우 0.85235, 0.35456를 각각 얻었다.



<그림 1> 1회 모의고사에서 진평가치 T의 95%신뢰구간(β_3 의 경우)

$\sigma_E=\sigma_x\sqrt{1-\beta_3}=5.76244$

이 결과들로써 β_3를 고찰하면 그 고사들은 비교적 안정된 신뢰도를 갖는 것으로 판정되며 1회 고사의 경우 표준오차 σ_E로써 α_3와 β_3를 대입하여 95% 신뢰구간을 도시한 결과 <그림 1>과 <그림 2>를 얻을 수 있었다. 여기서 <그림 1>의 신뢰구간이 그림 2의 신뢰구간보다 더 작은 것으로 나타나고 있는데 이것은 Ⅱ-B절의 정리 5에서 지적한대로 β_3가

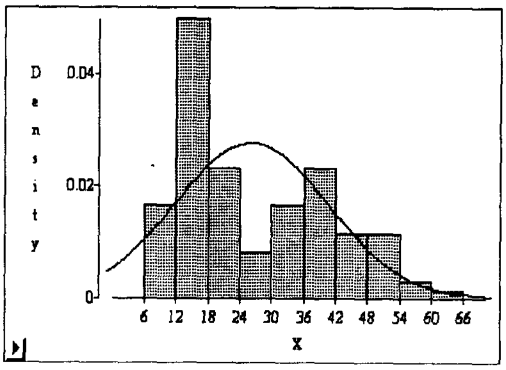


<그림 2> 1회 모의고사에서 진평가치 T의 95% 신뢰구간 (α_3의 경우) $\sigma_E' = \sigma_x\sqrt{1-\alpha_3} = 11.62986$

α_3보다 더 유효함을 보여주고 있는 것이다. 동시에 2회의 고사에서도 진평가치는 모두 그 신뢰구간 내에 있음을 알 수 있고, 또 1회와 2회 성적의 평균 $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_{1i}+X_{2i})$ $(i=1, 2, \cdots, 100)$와 그 각 부문항의 평가치 평균들로써 σ_E를 계산하여 β_3와 σ_E는 각각 0.89194, 4.74082 였으며, 정리6에 의하여 진평가치 T의 95%신뢰구간을 표로 작성하여 표3을 수록하였다. 그 결과에 비추어 n회 시행한 모의고사를 가정할 경우 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$로써 그들의 진평가치 T의 신뢰구간 $(T,\ T)$을 구함으로써 수험자의 진평가치 T의 값을 추정할 수 있다.

다음 <그림 3>은 첫회에 실시한 모의고사 평가치의 돗수분포도이다 이 분포는 왜도와 첨도가 각각 0.5378, 2.1820 인데 부록 <표 2>에 의하여 $N=100$, $\sqrt{b_1}$이 0.389(5% 유의수준), 0.567(1% 유의수준)으로써 왜도는 5% 유의수준에서 유의하고 첨도는 하한 1% 유의수준에서 모두 유의한 것으로 판정되어진다. 그러므로 이 성적분포도를 II-B절의 <표 2>에 의하여 표준정규분포와 과정을 시도하여 1회 고사평가치로써 다음 <표 4>와 새로운 누적도수분포도 <그림 4>를 도시하였다. 여기서 원점수 분포의 표준점수 Z는 왜도와 첨도의 크기가 유의한 상태에서 직접적으로 계산된 것이며 II-B 정리 7을 이용한 결과인 Bock의 표준점수 Z'와는 그 크기에서 유효숫자 5자리에서부터 조금씩 차이가 남을 보여주고 있다. 여기서 새로운 Z'의 값은 정리 7의 Bock의 Z치 계산과정에 의하여 새로 계산하여 구한 $\Phi(Z)$의 값으로써 표준 정규분포표에서 그 확률치에 대응하는 Z의 값으로 대체한 것이다. 또 Z'의 표준점수에 의하여 변환된 원점수들 X'는 $X'=\overline{X}+Z'\sigma_x$로 계산된 것이다. 그러므로 이 값들로써 유의한 왜도와 첨도를 잘 조정하여 새로운 평가치를 산정한 후 그 평가등급 판정을 보다 정밀한 값으로 처리할 수 있고 그 결과를 유효하게 이용할 수 있을 것이다. 나아가서는 이 새로운 Z'의 값으로써 다른 표준점수 T점수, H점수 등 여러 변환표준점수들을 계산할 때 보다 정밀한 평가치들을 계산할 수 있다. 그리고 이 예에서는 왜도와 첨도의 크기가 비교적 작은 값이므로 Bock의 표준점수 Z'가 거의 표준점수 Z와 같은 값으로 계산되어 지고 있으나 왜도와 첨도의 크기가 매우 유의한 값이면 Z'와 X'의 값도 크기가 달리 계산되어질 것으로 예상된다. 다음 그림4 (1) 과 (2)는 1회에 시행한 평가치로 Z와 Z'의 누적돗수 분포도를 도시한 것인데 그 결과는 두 분포의 도표가 약간 다르게 도시되고 있으며 이 결과로써 학생들의 평가치 등급에 보다 유효한 판정을 내릴 수 있다.

끝으로 2회의 고사의 경우 왜도 $\sqrt{b_1}=0.55143$, 첨도 $b_2=2.37638$이므로 $N=100$인 경우 왜도는 5%유의수준, 첨도는 5%유의수준으로 각각 유의한 것으로 판정되어 그 원점수들로써 1회 고사의 경우와 같은 과정을 거쳐 <표 5>와 <그림 5>를 얻었다.



<그림 3> 1회 모의 고사 평가치의 돗수분포표

<표 3> $\overline{X}=\frac{1}{2}(X_{1i}+X_{2i})$, $(i=1, \cdots, 100)$로써 진평가치 T 의 95% 신뢰구간

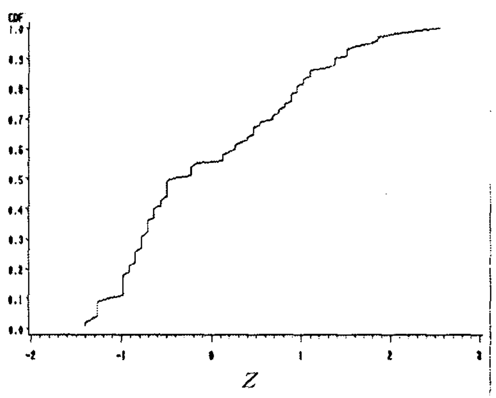
X_1	X_2	X_3	X	β_3=0.89194의 경우		X_1	X_2	X_3	X	β_3=0.89194의 경우		X_1	X_2	X_3	X	β_3=0.89194의 경우	
				신뢰하한	신뢰상한					신뢰하한	신뢰상한					신뢰하한	신뢰상한
25	4	10	39	29.708	48.292	17	0	6	23	13.708	32.292	10	2	0	12	2.708	21.292
29	8	9	46	36.708	55.292	21	8	3	32	22.708	41.292	8	3	0	11	1.708	20.292
35	12	18	65	55.708	74.292	27	6	3	36	26.708	45.292	8	6	1.5	15.5	6.208	24.792
24	6	5	35	25.708	44.292	26	4	4.5	34.5	25.208	43.792	10	2	1.5	13.5	4.208	22.792
31	8	13	52	42.708	61.292	22	8	0	30	20.708	39.292	5	1	0	6	-3.292	15.292
26	5	12	43	33.708	52.292	23	3	5	31	21.708	40.292	12	1	0	13	3.708	22.292
13	8	0	21	11.708	30.292	25	6	7	38	28.708	47.292	10	6	1.5	17.5	8.208	26.792
33	4	17	54	44.708	63.292	21	8	13	42	32.708	51.292	6	4	0	10	0.708	19.292
27	8	6	41	31.708	50.292	21	8	6	35	25.708	44.292	8	2	0	10	0.708	19.292
17	6	6	29	19.708	38.292	6	3	0	9	-0.292	18.292	5	3	0	8	-1.292	17.292
31	8	12	51	41.708	60.292	12	3	1.5	16.5	7.208	25.792	12	4	0	16	6.708	25.292
27	8	12	47	37.708	56.292	11	3	1.5	15.5	6.208	24.792	16	1	1.5	18.5	9.208	27.792
25	4	16	45	35.708	54.292	12	5	1.5	18.5	9.208	27.792	12	2	1.5	15.5	6.208	24.792
17	0	3	20	10.708	29.292	12	5	0	17	7.708	26.292	13	0	1.5	14.5	5.208	23.792
21	0	10	31	21.708	40.292	14	2	1.5	17.5	8.208	26.792						
22	0	5	27	17.708	36.292	14	2	1.5	17.5	8.208	26.792						
31	7	11	49	39.708	58.292	9	2	1.5	12.5	3.208	21.792						
26	3	6	35	25.708	44.292	11	2	0	13	3.708	22.292						
24	4	6	34	24.708	43.292	13	5	0	18	8.708	27.292						
30	0	1.5	31.5	22.208	40.792	12	1	0	13	3.708	22.292						
35	6	15	56	46.708	65.292	7	3	0	10	0.708	19.292						
25	9	11	45	35.708	54.292	11	3	1.5	15.5	6.208	24.792						
27	6	16	49	39.708	58.292	15	3	0	18	8.708	27.292						
28	3	8	39	29.708	48.292	11	1	1.5	13.5	4.208	22.792						
25	0	6	31	21.708	40.292	7	2	1.5	10.5	1.208	19.792						
31	4	3	38	28.708	47.292	15	2	0	17	7.708	26.292						
34	3	3	40	30.708	49.292	6	4	0	10	0.708	19.292						
25	4	10	39	29.708	48.292	14	2	1.5	17.5	8.208	26.792						
21	0	3	24	14.708	33.292	13	5	1.5	19.5	10.208	28.792						
11	8	3	22	12.708	31.292	7	3	0	10	0.708	19.292						
24	4	5	33	23.708	42.292	9	3	0	12	2.708	21.292						
25	8	16	49	39.708	58.292	10	1	0	11	1.708	20.292						
27	2	14	43	33.708	52.292	13	3	0	16	6.708	25.292						
23	4	12	39	29.708	48.292	8	8	1.5	17.5	8.208	26.792						
21	0	3	24	14.708	33.292	14	4	0	18	8.708	27.292						
17	2	0	19	9.708	28.292	13	3	0	16	6.708	25.292						
25	6	11	42	32.708	51.292	12	4	1.5	17.5	8.208	26.792						
27	4	17	48	38.708	57.292	8	2	0	10	0.708	19.292						
24	3	7	34	24.708	43.292	11	3	0	14	4.708	23.292						
25	4	9	38	28.708	47.292	12	3	0	15	5.708	24.292						
22	2	3	27	17.708	36.292	10	2	0	12	2.708	21.292						
35	8	17	60	50.708	69.292	8	3	0	11	1.708	20.292						
30	8	10	48	38.708	57.292	11	5	0	16	6.708	25.292						

<표 4> 1회 모의고사 평가치의 표준점수 Z와 Bock의 표준점수 Z' 및 변환된 원점수 X'

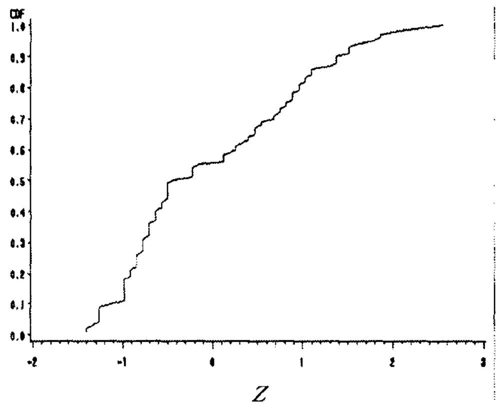
X_1	X_2	X_3	X	Z	η	$\Phi(z)$	Z'	X'
24	4	10	38	0.8169317294	0.8408763189	0.7930162762	0.8169317231	37.999999909
28	8	9	45	1.3023750321	0.7682353155	0.9036057931	1.3023744458	44.999991546
34	10	19	63	2.5506578106	0.6285991361	0.9946239812	. 2.5506560529	62.999974655
24	4	6	34	0.5395355564	0.8889054917	0.7052412683	0.5395354205	33.99999804
32	8	13	53	1.8571673781	0.6992040848	0.968356377	1.8571680717	53.000010002
26	4	12	42	1.0943279024	0.7977712918	0.8630943182	1.0943275112	41.999994359
12	8	0	20	−0.431351049	0.9091579112	0.3331066742	−0.431350758	20.000004191
32	4	17	53	1.8571673781	0.6992040848	0.968356377	1.8571680717	53.000010002
26	8	6	40	0.9556298159	0.8187568612	0.8303703108	0.9556296458	39.999997546
16	6	6	28	0.123441297	0.9722007326	0.5491211488	0.1234412394	27.99999917
32	8	12	52	1.7878183349	0.7071468361	0.9630973752	1.7878187827	52.000006457
26	8	12	46	1.3717240754	0.7588700715	0.9149252357	1.3717235042	45.999991763
26	4	16	46	1.3717240754	0.7588700715	0.9149252357	1.3717235042	45.999991763
16	0	3	19	−0.500700092	0.8960709408	0.3082911716	−0.500699899	19.000002781
22	0	10	32	0.40083747	0.9150380634	0.6557299853	0.4008371445	31.999995307
22	0	6	28	0.123441297	0.9722007326	0.5491211488	0.1234412394	27.99999917
30	6	12	48	1.5104221619	0.7408082869	0.9345320815	1.5104217701	47.999994351
28	2	6	36	0.6782336429	0.8642241156	0.7511882206	0.678233652	36.000000131
24	4	6	34	0.5395355564	0.8889054917	0.7052412683	0.5395354205	33.99999804
30	0	3	33	0.4701865132	0.9017824946	0.6808890306	0.4701862755	32.999996572
34	6	15	55	1.9958654646	0.6838421048	0.9770257759	1.9958665709	55.000015953
26	4	16	46	1.3717240754	0.7588700715	0.9149252357	1.3717235042	45.999991763
26	6	16	48	1.5104221619	0.7408082869	0.9345320815	1.5104217701	47.999994351
28	0	10	38	0.8169317294	0.8408763189	0.7930162762	0.8169317231	37.999999909
24	0	6	30	0.2621393835	0.9427536965	0.6033928786	0.2621390484	29.999995168
30	4	3	37	0.7475826862	0.8523903675	0.7726440514	0.7475827094	37.000000335
34	2	3	39	0.8862807727	0.8296691868	0.8122668563	0.8862806984	38.999998929
26	4	10	40	0.9556298159	0.8187568612	0.8303703108	0.9556296458	39.999997546
20	0	3	23	−0.223303919	0.950817517	0.4116495975	−0.223303639	23.000004036
12	8	3	23	−0.223303919	0.950817517	0.4116495975	−0.223303639	23.000004036
24	2	6	32	0.40083747	0.9150380634	0.6557299853	0.4008371445	31.999995307
24	8	16	48	1.5104221619	0.7408082869	0.9345320815	1.5104217701	47.999994351
26	2	14	42	1.0943279024	0.7977712918	0.8630943182	1.0943275112	41.999994359
24	2	14	40	0.9556298159	0.8187568612	0.8303703108	0.9556296458	39.999997546
20	0	3	23	−0.223303919	0.950817517	0.4116495975	−0.223303639	23.000004036
16	2	0	18	−0.570049135	0.8833553876	0.2843222181	−0.570049042	18.000001355
24	6	11	41	1.0249788592	0.8081278605	0.8473133523	1.0249785785	40.999995952
28	4	17	49	1.5797712051	0.7320960178	0.9429203375	1.5797709748	48.999996679
24	2	7	33	0.4701865132	0.9017824946	0.6808890306	0.4701862755	32.999996572
26	4	9	39	0.8862807727	0.8296691868	0.8122668563	0.8862806984	38.999998929
24	2	3	29	0.1927903402	0.957250805	0.5764383295	0.1927901205	28.999996831
34	8	17	59	2.2732616376	0.6550579834	0.9884948206	2.2732626166	59.000014117
24	8	10	42	1.0943279024	0.7977712918	0.8630943182	1.0943275112	41.999994359
18	0	6	24	−0.153954876	0.9655656272	0.4388227086	−0.153954747	24.000001867
20	8	3	31	0.3314884267	0.9286891409	0.6298620706	0.3314880594	30.999994704
28	6	3	37	0.7475826862	0.8523903675	0.7726440514	0.7475827094	37.000000335

X_1	X_2	X_3	X	Z	η	$\Phi(z)$	Z'	X'
26	4	3	33	0.4701865132	0.9017824946	0.6808890306	0.4701862755	32.999996572
20	8	0	28	0.123441297	0.9722007326	0.5491211488	0.1234412394	27.99999917
22	2	6	30	0.2621393835	0.9427536965	0.6033928786	0.2621390484	29.999995168
26	4	9	39	0.8862807727	0.8296691868	0.8122668563	0.8862806984	38.999998929
20	8	13	41	1.0249788592	0.8081278605	0.8473133523	1.0249785785	40.999995952
22	8	6	36	0.6782336429	0.8642241156	0.7511882206	0.678233652	36.000000131
4	2	0	6	−1.402237654	0.7548213149	0.0804222274	−1.402237105	6.0000079164
12	4	3	19	−0.500700092	0.8960709408	0.3082911716	−0.500699899	19.000002781
8	4	3	15	−0.778096265	0.8472855711	0.2182561276	−0.778096281	14.999999778
10	4	3	17	−0.639398179	0.8709956611	0.2612819725	−0.639398161	17.000000255
10	4	0	14	−0.847445308	0.8359080998	0.1983734885	−0.847445276	14.000000462
10	0	3	13	−0.916794352	0.8248321364	0.1796252363	−0.916794238	13.00000164
10	0	3	13	−0.916794352	0.8248321364	0.1796252363	−0.916794238	13.00000164
2	2	3	7	−1.332888611	0.7640862838	0.0912842764	−1.332888026	7.0000084445
10	4	0	14	−0.847445308	0.8359080998	0.1983734885	−0.847445276	14.000000462
8	8	0	16	−0.708747222	0.8589770316	0.2392406711	−0.708747243	15.999999701
8	0	0	8	−1.263539568	0.7735815227	0.1031977712	−1.263538994	8.0000082831
10	2	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
14	2	3	19	−0.500700092	0.8960709408	0.3082911716	−0.500699899	19.000002781
16	0	0	16	−0.708747222	0.8589770316	0.2392406711	−0.708747243	15.999999701
12	0	3	15	−0.778096265	0.8472855711	0.2182561276	−0.778096281	14.999999778
10	4	3	17	−0.639398179	0.8709956611	0.2612819725	−0.639398161	17.000000255
14	0	0	14	−0.847445308	0.8359080998	0.1983734885	−0.847445276	14.000000462
4	2	0	6	−1.402237654	0.7548213149	0.0804222274	−1.402237105	6.0000079164
12	2	3	17	−0.639398179	0.8709956611	0.2612819725	−0.639398161	17.000000255
8	4	3	15	−0.778096265	0.8472855711	0.2182561276	−0.778096281	14.999999778
6	2	0	8	−1.263539568	0.7735815227	0.1031977712	−1.263538994	8.0000082831
12	0	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
6	2	0	8	−1.263539568	0.7735815227	0.1031977712	−1.263538994	8.0000082831
12	2	0	14	−0.847445308	0.8359080998	0.1983734885	−0.847445276	14.000000462
8	8	3	19	−0.500700092	0.8960709408	0.3082911716	−0.500699899	19.000002781
10	6	0	16	−0.708747222	0.8589770316	0.2392406711	−0.708747243	15.999999701
12	4	0	16	−0.708747222	0.8589770316	0.2392406711	−0.708747243	15.999999701
12	2	3	17	−0.639398179	0.8709956611	0.2612819725	−0.639398161	17.000000255
8	0	0	8	−1.263539568	0.7735815227	0.1031977712	−1.263538994	8.0000082831
12	0	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
14	4	0	18	−0.570049135	0.8833553876	0.2843222181	−0.570049042	18.000001355
12	0	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
8	4	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
12	4	0	16	−0.708747222	0.8589770316	0.2392406711	−0.708747243	15.999999701
8	4	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
6	2	0	8	−1.263539568	0.7735815227	0.1031977712	−1.263538994	8.0000082831
6	6	3	15	−0.778096265	0.8472855711	0.2182561276	−0.778096281	14.999999778
8	2	3	13	−0.916794352	0.8248321364	0.1796252363	−0.916794238	13.00000164
8	2	0	10	−1.124841481	0.7932980244	0.1303281989	−1.124841045	10.000006288
16	2	0	18	−0.570049135	0.8833553876	0.2843222181	−0.570049042	18.000001355
16	4	3	23	−0.223303919	0.950817517	0.4116495975	−0.223303639	23.000004036
6	6	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142

X_1	X_2	X_3	X	Z	η	$\Phi(z)$	Z	X'
10	2	0	12	−0.986143395	0.8140458525	0.1620314293	−0.986143177	12.000003142
6	2	0	8	−1.263539568	0.7735815227	0.1031977712	−1.263538994	8.0000082831
12	2	0	14	−0.847445308	0.8359080998	0.1983734885	−0.847445276	14.000000462
16	0	3	19	−0.500700092	0.8960709408	0.3082911716	−0.500699899	19.000002781
12	0	3	15	−0.778096265	0.8472855711	0.2182561276	−0.778096281	14.999999778
16	0	3	19	−0.500700092	0.8960709408	0.3082911716	−0.500699899	19.000002781



〈그림 4-1〉 1회 모의 고사의 Z의 누적도수분포도



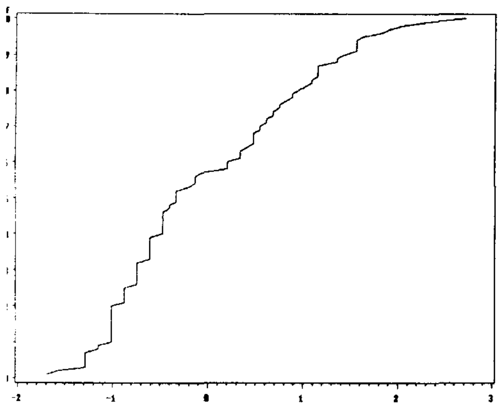
〈그림 4-2〉 1회 모의 고사의 Z의 누적도수 분포도

<표 5> 2회 모의고사 평가치의 표준점수 Z와 Bock의 표준점수 Z' 및 변환된 원점수 X'

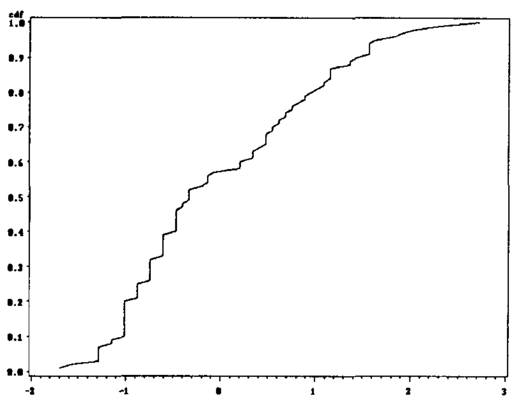
X_1	X_2	X_3	X	Z	η	$\Phi(z)$	Z	X'
26	4	10	40	0.8818641021	0.8303740270	0.8110269434	0.8816869626	39.997386689
30	8	9	47	1.3563490148	0.7609266438	0.9124836572	1.3562089798	46.997934085
36	14	17	67	2.7120201941	0.6141686599	0.9966553742	2.7119309938	66.998684043
24	8	4	36	0.6107298662	0.8760628878	0.7292421579	0.6105225895	35.996942078
30	8	13	51	1.6274832507	0.7262200253	0.9481696041	1.6273593874	50.998172664
26	6	12	44	1.1529983379	0.7892145246	0.8755128235	1.1528441651	43.997725512
14	8	0	22	−0.3382399592	0.9273422583	0.3676844944	−0.3379923021	22.003653646
34	4	17	55	1.8986174865	0.6945413078	0.9711853592	1.8985073410	54.998375040
28	8	6	42	1.0174312200	0.8092712712	0.8454866132	1.0172662790	41.997566651
18	6	6	30	0.2040285125	0.9548713187	0.5807280496	0.2037563553	29.995984908
30	8	12	50	1.5596996917	0.7345964433	0.9405694741	1.5595720245	49.998116546
28	8	12	48	1.4241325738	0.7519426630	0.9227763054	1.4239968319	47.997997421
24	4	16	44	1.1529983379	0.7892145246	0.8755128235	1.1528441651	43.997725512
18	0	3	21	−0.4060235182	0.9140333211	0.3424495568	−0.4057869970	21.003489358
20	0	10	30	0.2040285125	0.9548713187	0.5807280496	0.2037563553	29.995984908
22	0	4	26	−0.0671057234	0.9846934421	0.4733687127	−0.0668043940	26.004445463
32	8	10	50	1.5596996917	0.7345964433	0.9405694741	1.5595720245	49.998116546
24	4	6	34	0.4751627483	0.9008460756	0.6825839942	0.4749368128	33.996666809
24	4	6	34	0.4751627483	0.9008460756	0.6825839942	0.4749368128	33.996666809
30	0	0	30	0.2040285125	0.9548713187	0.5807280496	0.2037563553	29.995984908
36	6	15	57	2.0341846045	0.6797162289	0.9790282522	2.0340803417	56.998461827
24	14	6	44	1.1529983379	0.7892145246	0.8755128235	1.1528441651	43.997725512
28	6	16	50	1.5596996917	0.7345964433	0.9405694741	1.5595720245	49.998116546
28	6	6	40	0.8818641021	0.8303740270	0.8110269434	0.8816869626	39.997386689
26	0	6	32	0.3395956304	0.9270722825	0.6328262833	0.3393482037	31.996349752
32	4	3	39	0.8140805431	0.8413435675	0.7921479219	0.8138966567	38.997287152
34	4	3	41	0.9496476611	0.8196868495	0.8288109224	0.9494768213	40.997479629
24	4	10	38	0.7462969842	0.8526068110	0.7721982641	0.7461058566	37.997180325
22	0	3	25	−0.1348892823	0.9697007346	0.4464628767	−0.1346030205	25.004223175
10	8	3	21	−0.4060235182	0.9140333211	0.3424495568	−0.4057869970	21.003489358
24	6	4	34	0.4751627483	0.9008460756	0.6825839942	0.4749368128	33.996666809
26	8	16	50	1.5596996917	0.7345964433	0.9405694741	1.5595720245	49.998116546
28	2	14	44	1.1529983379	0.7892145246	0.8755128235	1.1528441651	43.997725512
22	6	10	38	0.7462969842	0.8526068110	0.7721982641	0.7461058566	37.997180325
22	0	3	25	−0.1348892823	0.9697007346	0.4464628767	−0.1346030205	25.004223175
18	2	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
26	6	11	43	1.0852147790	0.7991170685	0.8610514360	1.0850553798	42.997648409
26	4	17	47	1.3563490148	0.7609266438	0.9124836572	1.3562089798	46.997934085
24	4	7	35	0.5429463073	0.8882816517	0.7063421543	0.5427300352	34.996809371
24	4	9	37	0.6785134252	0.8641757133	0.7512138515	0.6783145158	36.997065521
20	2	3	25	−0.1348892823	0.9697007346	0.4464628767	−0.1346030205	25.004223175
36	8	17	61	2.3053188403	0.6518869953	0.9894229813	2.3052238926	60.998599252
36	8	10	54	1.8308339276	0.7021990300	0.9664288704	1.8307205837	53.998327855
16	0	6	22	−0.3382399592	0.9273422583	0.3676844944	−0.3379923021	22.003653646
22	8	3	33	0.4073791894	0.9137710377	0.6580484755	0.4071428831	32.996513811

X_1	X_2	X_3	X	Z	η	$\Phi(z)$	Z'	X'
26	6	3	35	0.5429463073	0.8882816517	0.7063421543	0.5427300352	34.996809371
26	4	6	36	0.6107298662	0.8760628878	0.7292421579	0.6105225895	35.996942078
24	8	0	32	0.3395956304	0.9270722825	0.6328262833	0.3393482037	31.996349752
24	4	4	32	0.3395956304	0.9270722825	0.6328262833	0.3393482037	31.996349752
24	8	5	37	0.6785134252	0.8641757133	0.7512138515	0.6783145158	36.997065521
22	8	13	43	1.0852147790	0.7991170685	0.8610514360	1.0850553798	42.997648409
20	8	6	34	0.4751627483	0.9008460756	0.6825839942	0.4749368128	33.996666809
8	4	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
12	2	0	14	−0.8805084309	0.8305906139	0.1893399682	−0.8803311611	14.002615233
14	2	0	16	−0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	−0.7447500352	16.002821890
14	6	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
14	6	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
18	4	0	22	−0.3382399592	0.9273422583	0.3676844944	−0.3379923021	22.003653646
18	4	0	22	−0.3382399592	0.9273422583	0.3676844944	−0.3379923021	22.003653646
16	2	0	18	−0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	−0.6091667447	18.003060482
12	0	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
18	2	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
16	2	0	18	−0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	−0.6091667447	18.003060482
4	4	0	8	−1.2872097847	0.7703141915	0.0990357868	−1.2870651713	8.002133457
8	4	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
14	6	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
10	2	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
4	0	0	4	−1.5583440205	0.7347659431	0.0595909940	−1.5582162757	4.001884598
16	4	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
8	6	0	14	−0.8805084309	0.8305906139	0.1893399682	−0.8803311611	14.002615233
16	2	0	18	−0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	−0.6091667447	18.003060482
18	6	0	24	−0.2026728413	0.9551577307	0.4198018507	−0.2024004182	24.004019014
8	4	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
6	6	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
14	0	0	14	−0.8805084309	0.8305906139	0.1893399682	−0.8803311611	14.002615233
14	4	0	18	−0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	−0.6091667447	18.003060482
8	8	0	16	−0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	−0.7447500352	16.002821890
18	2	0	20	−0.4738070771	0.9011009906	0.3178993845	−0.4735809413	20.003336146
14	2	0	16	−0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	−0.7447500352	16.002821890
12	6	0	18	−0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	−0.6091667447	18.003060482
8	4	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
10	6	0	16	−0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	−0.7447500352	16.002821890
10	2	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
8	4	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
8	2	0	10	−1.1516426668	0.7894101698	0.1247656840	−1.1514883922	10.002275987
10	6	0	16	−0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	−0.7447500352	16.002821890
12	0	0	12	−1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	−1.0159104935	12.002435035
10	4	0	14	−0.8805084309	0.8305906139	0.1893399682	−0.8803311611	14.002615233
10	6	0	16	−0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	−0.7447500352	16.002821890
12	2	0	14	−0.8805084309	0.8305906139	0.1893399682	−0.8803311611	14.002615233
2	0	0	2	−1.6939111385	0.7181944232	0.0451525159	−1.6937908591	2.001774462
8	0	0	8	−1.2872097847	0.7703141915	0.0990357868	−1.2870651713	8.002133457

X_1	X_2	X_3	X	Z	η	$\Phi(z)$	Z'	X'
4	8	0	12	-1.0160755488	0.8094769881	0.1548360057	-1.0159104935	12.002435035
6	2	0	8	-1.2872097847	0.7703141915	0.0990357868	-1.2870651713	8.002133457
6	2	0	8	-1.2872097847	0.7703141915	0.0990357868	-1.2870651713	8.002133457
4	4	0	8	-1.2872097847	0.7703141915	0.0990357868	-1.2870651713	8.002133457
12	6	0	18	-0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	-0.6091667447	18.003060482
16	2	0	18	-0.6093741951	0.8763039679	0.2712069603	-0.6091667447	18.003060482
12	4	0	16	-0.7449413130	0.8528351527	0.2282114226	-0.7447500352	16.002821890
10	0	0	10	-1.1516426668	0.7894101698	0.1247656840	-1.1514883922	10.002275987



<그림 5-1> 2회 모의고사의 Z의 누적도수분포도



<그림 5-2> 2회 모의고사의 Z'의 누적도수 분포도

Ⅳ. 결 론

본고에서는 수학교과에서 문항 형식이 다른 부문항으로 구성된 고사를 시행할 때 우량한 신뢰도계수의 추정 및 그 계산 예를 제시하고 원점수의 분포가 편의, 첨예하여 정규분포와는 상이한 형을 이룰 경우, 그 분포를 표준정규분포로 변환하는 과정에 활용할 수 있는 통계적 해석법을 논하였다. 이 논문의 주요 연구 결과와 기대 효과 및 그 활용 방안을 요약하면 다음과 같다.

1. 문항형식이 다른 부문항으로 구성된 평가고사에서 통계적으로 불편성, 효율성과 일치성이 성립하는 우량한 신뢰도 계수 β_k를 추정하고 그 β_k의 여러 가지 성질들을 예로 제시하였다.

2. 원 점수의 분포형이 정규분포와 상이한 형을 가질 때 그 분포의 왜도와 첨도의 크기를 측정하고 그 크기의 유의성을 검정하는데 편리한 수표들을 재편하여 일반 독자들이 참고하기 쉽게 <표 2>에 수록하였다.

3. 2에서 제시한 <표 2>의 수표들을 이용하여 그 분포의 왜도와 첨도의 크기가 유의한 경우 그 분포를 표준정규분포화 과정을 시행할 수 있는 프로그램을 이용하여 변환표준점수 Z'와 변환된 원점수 X'를 계산하는 과정을 예로써 제시하였다.

4. 3에서 구한 새로운 원점수 X'와 변환표준점수 Z'로써 그 점수들을 이용하여 보다 정확한 다른 표준점수 H점수, T점수 등을 계산할 수 있다.

결론적으로 이 연구 결과를 활용하기 위한 제언으로써 우리 평가자들은 평가 현장에서 주관식이나 객관식 문항만 이용하는 학습적 폐단을 없애고 학생들의 비판적, 창의적 사고의 함양을 유도할 수 있는 다양한 형식의 문항들로 구성된 고사 모형을 개발함으로써 학생들로 하여금 수학적인 힘을 길러주는데 기여해야 하며, 또 평가 시행시 그 고사의 신뢰도 안정과 정규분포와 상이한 형의 평가치들을 직접적으로 표준점수로 계산, 응용하는 오류를 없애고 그 분포형의 표준화 과정을 통하여 최종 변환 표준점수를 산정함으로써 평가의 불안정성을 잘 관리하면서 그 기초자료들을 이용하여 평가의 목적과 기준에 부합되는 유효한 평가를 시행해야 할 것이다.

참 고 문 헌

홍석강 (1999). 논문형고사 평가에서 평가치 조정과 평가원의 신뢰도 향상에 유효한 CDM모형의 응용, 한국수학교육학회시리즈 A <수학교육> **38(2)**, pp165-172.

홍석강 (2000). 동형고사에서 표준점수차의 확률분포를 이용한 상사성의 측정과 평가치 산정에 관한 연구, 한국수학교육학회시리즈 A <수학교육> **39(2)**, pp.167-177.

Bock, R.D. (1975). *The multivariate statistical methods in behavioral research*, NY.McGrawhill..

Colgan L.H. (1977). Reliability of mathematics multi-choice test, *International Journ. of Education in Science and Technology* **8(2)**, pp.237-244.

Cronbach, L.T. (1951). Coefficient alpha and internal structure of tests, *Psychometrika* **16**, pp.297-334.

D'agostino, RB & Person, ES (1973). Test for departure from normality, Empirical results for the distribution of b_1 and $\sqrt{b_1}$, Biometrika 60(3), pp.613-622.

D'agostino, R.B. & Tietjen, G.H. (1971). Simulation probability points of b_2 for small samples, *Biometrika* **58(3)**, pp.669-672.

D'agostino, R.B. & Tietjen, G.L. (1973). Approaches to the null distribution of $\sqrt{b_1}$, *Biometrika*, **60(1)**, pp.169-173.

Feldt, L.S. (1975). Estimation of the reliability of a test divided into two part of unepual length, *Psychometrika* **40**, pp.557-561.

Griffith H.B. & Mclone R.R. (1984). A critical analysis of university examinations in mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **15**, pp.291-311.

Hashway, R.M. (1998). *Assessment and evaluation of developmental learning*, CT. Praeger.

Kristof, W. (1974), Estimation of reliability and true score variance from a split of a test into three arbitrary parts, *Psychometrika* **39**, pp.491-499.

Lord, F.M. & Novick, M.R. (1968). *Statistical theories of mental test scores*, Addison Wesley.

Novick, M.R. & Lewis, C. (1967), Coefficient alpha and the reliability of composite measurement, *Psychometrika* **32**, pp.1-13.

Pearson E.S. & Hartley, H.O. (1966). Biometrika tables for statistician 3(1), Cambridge Univ. press.

Raju, N.S. (1970). *New formula for estimating total test reliability from parts of unequal length, Proceedings*, 78th Annual Convention APA, pp.143-144.

Raju, N.S. (1977). A generalization of coefficient alpha, *Psychometrika* **42(4)**, pp.549-565.

On Estimating Good Reliability Coefficient when the Test is Split into Several Formats of Subtests and Standardizing the Raw Score, whose Distribution is Departed from Normality.

Hong, Suk-Kang
Dept. of Mathematics Education, Dong Guk University, 26, 3-ka, Pil-Dong, Choong-Ku,
Seoul, Korea 100-715,
E-mail, skhong@kra.dongguk.ac.kr.

In this thesis. we estimated the good reliability coefficient β_k that is unbiased, consistent and more efficient than Cronbach's α_k in splitting of a test into several formats of subtests and several properties of β_k are also represented. The tables of coefficients of skewness and kurtosis are represented to test the significance of departures from normality. We got the cumulative normal plots of z' from the distribution which is departed from normality using the Bock's approximation procedure and we finally enumerated the transformed standardized scores z' and a new raw score X' which enable us to proceed further evaluation procedures depending on our assessment policy.

* ZDM classification : B59
* MSC2000 classification : 97C50
* key word : partitioned subsamples of items, estimation of good reliability coefficient, normalization whose distribution is departed from normality, enumerating the transformed standardized score.