韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2002, 5. 제 41권, 제 1호, 79-90.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2002, Vol. 41, No. 1, 79-90.

삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)
신 현 용 (한국교원대학교)

1. 서 론

수학교육의 중요한 목표들 중의 하나는 **수학적으로 스스로 사고하는 능력**을 길러 여러 가지 수학 문제들을 합리적으로 해결할 수 있는 능력과 태도를 기르는 것이다. 누구나 공감하는 이 목표에는 수학교육 분야에서 오랫동안 해결되지 못했고, 지금도 그 해결을 위해 많은 노력을 기울이고 있는 중요한 문제가 포함되어 있다. 즉, '어떻게 하면, 학생들이 스스로 수학적으로 사고하는 능력을 기를 수 있을 것인가?'하는 문제는 언제까지나 수학교육에 관심이 있는 사람들에게 열린 문제로 남아 있을 것이고, 또 많은 사람들이 다양한 접근 방법을 모색할 것이다.

이러한 문제의 해결을 위해, 수학교육 분야에서는 수학 문제에 대해 학생들이 스스로 자기 주도적인 접근을 개발하도록 돕는 방법에 대해 폭넓게 관심과 연구 진행되어 왔다. 예를 들어, Polya(1957)는 자신의 저서인 'How to solve it'에서 수학 문제 해결을 위한 아이디어를 학생들이 스스로 찾아내는데 도움이 되는 발견술을 체계화하여 제시하였다.

한편, 최근 수학 교육 연구들 중에는 학생들의 조작적 활동과 컴퓨터나 구체물 등을 이용한 다양한 직관적인 접근 방법들이 매우 활발하게 연구되고 있다(예를 들면 황선욱, 2000; 박영희, 1999; 이경화, 1999; 권오남, 1998 등). 특히, 학생들의 다양한 지적 활동을 활성화시킬 수 있는 퍼즐을 비롯한 많은 조작적 도구들이 국내에 소개되어 보급되고 있다. 이러한 다양한 접근들은 자칫 교사중심의 경직되기 쉬운 수학 교수-학습 활동에서, 학생들에게 다양한 학습 경험을 제공할 수 있다는 측면에서 그 의의를 찾아볼 수 있다.

이때, 한 가지 주목해야 할 것은 학생들의 경험이 조작적인 활동 자체나 시각적인 경험 자체로 끝나버리면, 의도하는 교육적 목적을 달성하기 어렵다는 것이다. 특히, 중등학교 수학교육에서는 자신의 생각을 수학 기호나 용어 등을 이용하여 다른 사람이 공감할 수 있는 논리적인 설명으로, 더 나아가서는 엄밀한 논증 수준에서 표현해야 하기 때문에, 구체적인 경험을 통해 얻은 수학적 아이디어를 엄밀한 논증에까지 연결시켜 수학 명제를 효율적으로 증명할 수 있도록 하는 것은 매우 중요할 것이다.

지금까지의 연구들을 보면, 구체적이고 직관적인 경험이나 활동 자체에 초점이 맞추어진 연구들이었고, 구체적인 활동의 경험을 논증으로 자연스럽게 연결시키는 연구는 매우 드물었다. 최근, 한 가지 주목할 만한 연구로 한인기 · 신현용(2001b)의 연구에서는 도형에 대한 다양한 분할 활동을 '임의의 볼록 다각형은 오목 사각형으로만은 분할할 수 없다.'는 평범하지 않은 명제의 엄밀한 논증과 연결시키려 시도하였다.

본 연구는 구체적인 활동 경험과 엄밀한 논증의 연계 가능성을 탐구한 연구로써, 종이로 만들어진 삼각형에서 각의 이등분선, 중선, 그리고 수선 등의 접기 활동을 하고, 종이 접기를 통해 얻어진 수학적 아이디어를 활용하여 '삼각형의 세 이등분선, 세 중선, 세 수선이 각각 한 점에서 만난다.'는 평면 기하학의 중요한 정리들을 증명하는 다양한 방법들을 제시할 것이다. 이를 통해, 중등학교 수학 교과 내용에 대한 다양한 접근 방법을 제시함은 물론, 구체적인 조작적 활동과 엄밀한 논증 사이의 연결 가능성에 대한 가능성을 제시할 것이다.

* 2001년 6월 투고, 2001년 12월 심사 완료.
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 종이접기, 수학적 아이디어, 중선, 수선, 각의 이등분선.

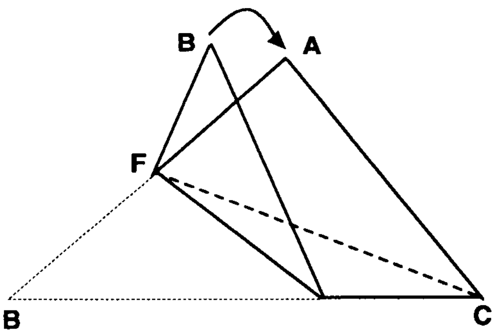
2. 종이 접기 활동을 통한 수학적 아이디어 개발

삼각형의 세 중선, 세 이등분선이 한 점에서 만난다는 것은 중학교 2 학년에서 엄밀한 수준에서의 논증을 통해 증명하게 된다. 그러나, 직관적인 수준에서 이러한 사실들은 초등학교에서도 종이 접기나 컴퓨터 그래픽을 통해 알 수 있는데, 본 연구에서는 학생들이 직접 행하는 종이 접기에 초점을 두었다. 게다가, 이 종이 접기 과정에서 개발되는 수학적 아이디어는 후에 엄밀한 논증을 위한 수학적 아이디어를 제공할 것이다. 우선, 몇 가지 종이 접기를 해 보자.

(1) 삼각형의 세 중선 접기

주어진 삼각형의 중선을 접어보자. 이를 위해, 삼각형의 변의 중점을 찾아야 하는데, 이것은 매우 간단하다. 즉, 꼭지점 A와 B, A와 C, B와 C가 각각 포개지도록 접으면, 접혀진 부분이 각각 변 AB, AC, BC의 중점이 된다.

이렇게 하여 얻어진 중점들을 각각 F, E, D라 하면, 삼각형의 세 중선 AD, BE, CF를 종이 접기를 이용해 찾을 수 있다.



이제, 학생들은 세 중선 AD, BE, CF가 한 점에서 만난다는 것을 관찰할 수 있다. 이때, 학생들에게 '삼각형 ABC의 세 중선 AD, BE, CF가 한 점에서 만난다는 것을 어떻게 알 수 있었느냐?'하고 물으면, 가장 자연스러운 대답들 중의 하나는 '중선 AD, BE를 접었더니 한 점에서 만나고, 그리고 나서 세 번째 중선 CF를 그었더니 중선 CE가 그 교점을 지나기 때문'이다.

그러나, 간혹 이러한 접근으로는 정확한 대답을 하기 어려운 경우도 있다. 즉, 중선 AD, BE, CF를 접는 과정에서 약간의 오류가 발생한다면, 세 번째 중선을 접었을 때 정확하게 두 중선 AD, BE의 교점을 지나지 않을 수도 있기 때문이다.

그렇다면, 다르게 세 중선을 접는 방법은 없을까? 우선, 두 중선 AD, BE를 접으면, 그 교점이 생긴다. 이제, 두 중선의 교점과 점 C를 지나도록 접으면, 한 선분을 얻을 수 있다. 이때, 이 선분의 한 끝점은 점 C이고, 다른 끝은 변 AB에 속하게 된다. 만약, 이 점이 변 AB의 중점인가를 확인하면, 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 확인할 수 있다.

이러한 접기 활동과 관련하여, 크게 두 가지 수학적 아이디어를 생각할 수 있다. 첫 번째는 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 보기 위해, 두 중선을 먼저 긋고 세 번째 중선을 그어 그 중선이 두 중선의 교점을 지나는가를 확인하는 것이다. 이 아이디어를 구체화하기 위해선, 세 번째 중선이 두 중선의 교점을 지난다는 것을 어떻게 증명할 것인가? 라는 물음에 대한 답을 찾아야 한다.

두 번째는 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 보기 위해, 두 중선을 먼저 긋고, 두 중선의 교점과 나머지 꼭지점을 지나도록 접어서, 이때 접힌 선이 중선인가를 확인하는 것이다. 이 아이디어에서는 '한 꼭지점과 두 중선의 교점을 지나는 직선이 중선이 됨을 보기 위해, 무엇을 보여야 하는가?'라는 물음에 대한 대답을 찾아야 하는데, 이 물음에 대한 대답은 비교적 쉽게 구할 수 있다. 즉, 한 꼭지점과 두 중선의 교점을 지나는 직선이 중선임을 보이기 위해서는, 그 꼭지점의 대변과 작도된 직선의 교점이 그 변의 중점임을 보이면 된다.

이처럼, 두 번째 아이디어가 구체적인 증명을 위해서는 비교적 활용 가능성이 크기 때문에, 본 연구에서는 두 번째 접근을 이용해 세 중선이 한 점에서 만남을 증명하는 다양한 방법을 제시할 것이다.

(2) 삼각형의 세 각의 이등분선 접기. 예각 삼각형의 세 수선 접기

삼각형의 각의 이등분선은 중선보다 훨씬 쉽게 접을 수 있다. 삼각형 ABC에서 변 AB와 AC를 겹치게 포개 접으면, 각 A의 이등분선을 접은 것이 되며, 마찬가지로 각 B, C의 이등분선도 접을 수 있다. 이때, 세 각의 이등

분선이 한 점에서 만난다는 것을 관찰할 수 있으며, 삼각형의 세 각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 보기 위한 접근도 중선의 접기 과정에서 얻은 아이디어를 구체화시킨 접근 방법을 취할 수 있다.

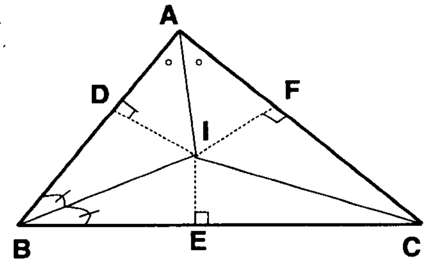
물론, 예각 삼각형의 세 수선도 쉽게 접을 수 있으며, 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 확인하기 위해 중선이나 이등분선의 접기 활동과 같은 접근 방법을 취할 수 있다.

위에서 살펴본 이러한 접기 활동은 삼각형의 중선, 이등분선, 그리고 수선에 대한 개념을 다시 한번 반복하는 기회를 제공하고, 직관적으로 삼각형의 중선, 각의 이등분선, 수선의 성질, 즉 삼각형의 세 중선, 각의 이등분선, 그리고 수선은 각각 한 점에서 만난다는 사실을 발견하도록 하는 중요한 활동이다. 특히, 이때 종이 접기 활동을 통해 형성된 아이디어들은 엄밀한 논증에 중요한 아이디어를 제공하고 있다.

3. 삼각형의 세 각의 이등분선이 한 점에서 만남을 증명

우선, 삼각형의 세 내각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 정리의 증명이 중학교 수학 교과서에 어떻게 기술되어 있는가를 살펴보기로 하자.

증명. 아래 그림과 같이 △ABC에서 ∠A, ∠B의 이등분선의 교점을 I라 하고, 점 I에서 각 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 하자.



△IAD와 △IAF에서 ∠D = ∠F = ∠R, ∠IAD = ∠IAF, $\overline{IA}$는 공통이므로,

△IAD ≡ △IAF. ∴ $\overline{ID}$ = $\overline{IF}$ --- ①

△IBD와 △IBE에서도 마찬가지 방법으로, $\overline{ID}$ = $\overline{IE}$ --- ②

또, △IEC와 △IFC에서 $\overline{IE}$ = $\overline{IF}$, ∠E = ∠F = ∠R, $\overline{IC}$는 공통이므로,

△IEC ≡ △IFC. ∴∠ICE = ∠ICF.

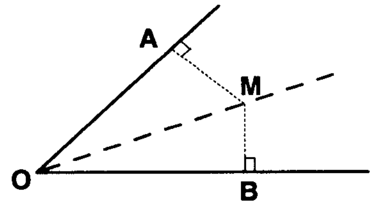
즉, 점 I는 ∠C의 이등분선 위에 있다. 그러므로, 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점 I에서 만난다.

중학교 교과서에 기술된 증명 방법에 내재된 아이디어는 삼각형에서 두 각 A, B의 이등분선을 그어 이들의 교점을 I라 한 후, 교점 I가 삼각형의 나머지 각 C의 이등분선에 속한다는 것을 보이는 것이다. 이러한 증명 방법은 후에 살펴볼 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 정리의 증명 방법보다는 훨씬 자연스럽지만, 수학 교과서에서는 증명에 활용된 아이디어를 학생들에게 준비시키지 못하고 있으며, 게다가 교과서의 증명 기술에서 이러한 아이디어들이 잘 형성되어 제시되지 못하고 있다.

그 결과, 어떤 학생이 주어진 증명 방법을 이해하기 위해서는 증명을 끝까지 차분히 읽거나 교사의 설명을 듣고 나서, 증명 과정을 다시 종합하여 숙고해야만 한다. 즉, 학생은 교사가 증명을 설명하는 과정에서 왜 점 I에서 삼각형의 각 변에 수선을 그었는지, 왜 삼각형 IAD와 IAF의 합동을 조사하는지 알 수 없는 상태에서 수동적으로 교사에 의해 주어지는 정보를 수용하게 된다. 이제, 이러한 문제점을 해결하기 위한 한 가지 접근 방법으로, 몇 가지 관련된 증명 문제들을 체계화하여 보자.

문제 1. 각의 이등분선에서 각의 두 변에 이르는 거리가 같다는 것을 증명하여라.

증명. 각 AOB를 주어진 각이라 하고, 반직선 OM을 각의 이등분선이라 하면(그림 참조), $\overline{MA}$ = $\overline{MB}$를 증명하면 된다.

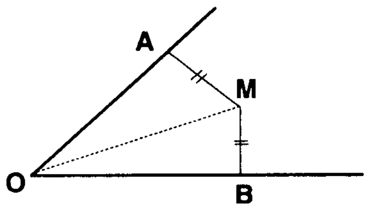


이제, 직각삼각형 MOA와 MOB를 보자. 두 삼각형에서 ∠MOA와 ∠MOB는 같고, $\overline{OM}$은 공통이므로, △MOA ≡ △MOB. 그러므로, $\overline{MA}$ = $\overline{MB}$. □

문제 1의 증명에 포함된 기본 아이디어는 '두 선분의 길이가 같다는 것을 보이기 위해, 각 선분을 변으로 포함하는 두 삼각형을 생각하여 이들의 합동을 보이는 것'인데, 이 아이디어는 중학교의 논증 기하 과정에서 필수적으로 준비되어야 하는 아이디어이다. 한편, 문제 1을 좀더 분석해 보면, 문제에 한 점에서 두 직선까지의 '**거리**' 개념이 포함되는데, 이것으로부터 학생들은 비교적 쉽게 그 점에서 직선까지의 수선을 그을 필요성을 인식할 수 있다. 문제 1과 유사한 아이디어를 이용하여, 다음 문제를 쉽게 증명할 수 있다.

문제 2. 각의 변들에서 같은 거리만큼 떨어진 점은 각의 이등분선에 속한다는 것을 증명하여라.

증명. 각 AOB를 주어진 각이라 하고, 점 M이 각의 변으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있다고 하자(그림 참조). 이때, 점 M이 각 AOB의 이등분선에 속한다는 것을 증명해야 하는데, 이를 위해 ∠MOA = ∠MOB를 증명하자.

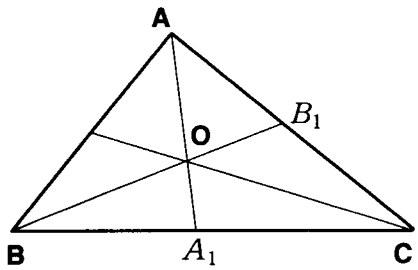


이제, 직각삼각형 MOA와 MOB를 보자. 두 삼각형에서 $\overline{OM}$은 공통이고, $\overline{AM}$ = $\overline{BM}$이므로, △MOA ≡ △MOB. 그러므로, ∠MOA = ∠MOB이고, 점 M은 각 AOB의 이등분선에 속한다. □

문제 2는 어떤 선분이 각의 이등분선이 되는 조건을 제시하고 있으며, 이는 학생들의 분석적 활동을 위해 꼭 필요한 수학적 지식이 된다. 우리는 종이 접기를 통해 '삼각형에서 세 각의 이등분선은 한 점에서 만난다.'는 것의 증명 방법으로, 우선 두 꼭지점에서 이들 각의 이등분선을 작도하고, 이들의 교점과 세 번째 꼭지점을 지나는 직선을 그어 이것이 각의 이등분선임을 증명하기로 하였다. 이때, 생길 수 있는 자연스런 물음이 '어떤 선분이 각의 이등분선임을 보이기 위해, 무엇을 보여야 하는가?' 이다. 이러한 물음에 대한 대답을 바로 문제 2에서 찾을 수 있다. 이제, 다음 정리를 증명해 보자.

삼각형의 각의 이등분선에 관한 정리. 삼각형에서 세 각의 이등분선은 한 점에서 만난다는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B에서 각의 이등분선 AA_1과 BB_1을 긋고, 그 교점을 O라 하자. 이제, 두 점 C와 O를 지나는 선분 CO를 긋고, 이 선분이 각 C의 이등분선임을 보이자(그림 참조). 이를 위해, 점 O가 각 C의 이등분선에 속한다는 것을 보이면 되고, 다시 이를 위해 문제 2를 이용할 수 있다.



점 O는 각의 이등분선 AA_1에 속하는 점이므로, 문제 1에 의해 점 O에서 변 AB, AC까지의 거리는 같고, 한편 점 O는 각의 이등분선 BB_1에도 속하므로 점 O에서 변 AB, BC까지의 거리가 같다. 이로부터, 점 O에서 변 AC, BC까지의 거리가 같으므로, 문제 2에 의해 점 O는 각 C의 이등분선에 속한다. □

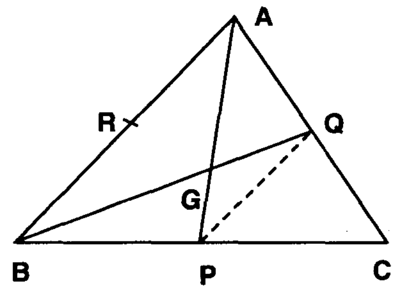
본 연구에서 제시하고 있는 증명 방법과 교과서 진술 방법의 가장 큰 차이들 중의 하나는 학생들이 무엇을 해야 할 것인가를 분석을 통해 스스로 결정할 수 있는 기회를 제공하며, 종이 접기를 통해 얻어진 수학적 아이디어를 논증 과정에서 정교화하는 경험을 가질 수 있다는 것이다.

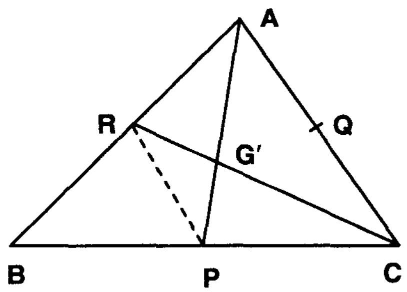
4 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만남을 증명

삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나고, 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다는 정리에 대해 살펴보자. 우선, 우리

나라의 중학교 교과서에 공통적으로 사용되고 있는 증명의 아이디어를 살펴보자.

△ABC에서 $\overline{BP}$ = $\overline{PC}$, $\overline{AQ}$ = $\overline{QC}$이므로, 삼각형의 중점 연결 정리에 의하여, $\overline{PQ}$ // $\overline{AB}$, $\overline{PQ}$ = ½ $\overline{AB}$이다. 이것에서 △GAB ∽ △GPQ이고, △GAB와 △GPQ의 닮음비는 2:1이다. 따라서, G는 $\overline{AP}$를 2:1로 나눈다.





또, 중선 AP, CR의 교점을 G′이라고 하면, 위와 마찬가지 방법으로 G′은 $\overline{AP}$를 2:1로 나누는 점임을 알 수 있다. 따라서, G와 G′은 일치한다. 그러므로, △ABC의 세 중선은 한 점 G에서 만나고, G는 세 중선을 각각 2:1로 나눈다.

위에서 살펴본 바와 같이 증명 과정 자체는 아주 간략하게 기술할 수 있으며, 증명 과정에 내재된 기본 아이디어는 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 첫째, 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하고, 둘째, 나머지 세 번째 중선이 중선의 교점을 지난다는 것을 증명하였다.

한인기 · 강인주(2000)에 의하면, 이러한 접근 방법은 학생들에게 어려움이 발생할 수 있는데, 왜냐 하면, 교과서에 무게중심에 관한 정리는 '삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다.'고 기술되어 있기 때문에, 증명 과정에서 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 만난다는 생각을 해 낸다는 것은 매우 부자연스럽기 때문이라고 하였다.

그뿐만 아니라, 세 선분 a, b, c가 한 점에서 만난다는 것을 보이기 위해,

① 두 선분 a, b의 교점이 두 선분을 일정한 비로 나누고,

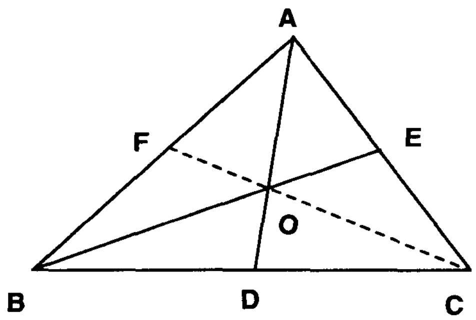
② 두 선분 a, c의 교점이 두 선분을 일정한 비로 나누고,

③ ①과 ②에서 얻어진 비가 같다는 것으로부터 세 선분이 한 점에서 만난다는 결론을 유도하는 것은 그리 쉽지 않은 접근 방법이라 할 수 있다.

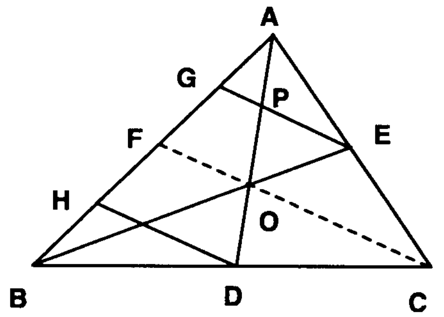
본 연구에서는 삼각형의 중선에 관한 정리의 증명에 종이 접기에서 형성된 아이디어, 즉 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 먼저 두 중선을 긋고 삼각형의 세 번째 꼭지점과 그 교점을 지나는 선분이 중선이 됨을 증명하고, 그 후에 그 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것에 대한 몇 가지 증명을 제시할 것이다.

(1) 선분의 분할을 이용한 증명

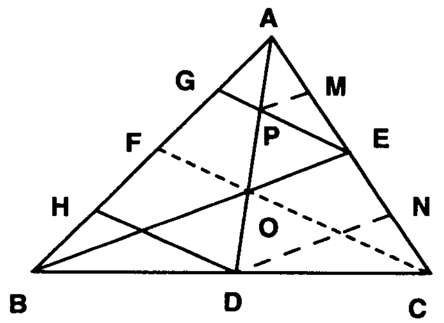
이 접근 방법은 한인기 · 강인주(2000)의 연구에서 찾아볼 수 있는데, 그 바탕이 되는 아이디어는 살펴보자. 삼각형 ABC에서 점 O에서 만나는 두 중선 $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$을 작도한 후에, 두 점 C와 O를 지나 변 AB와 점 F에서 만나는 선분 CF를 작도하자. 이때, $\overline{BF}$ = $\overline{AF}$를 증명하면 된다.



만약, $\overline{CF}$에 평행이고, 점 D와 E를 지나는 직선을 각각 그으면, 점 E와 D는 각각 중점들이므로, $\overline{AG}$ = $\overline{GF}$, $\overline{AP}$ = $\overline{PO}$, 그리고 $\overline{BH}$ = $\overline{HF}$를 얻을 수 있다. 이로부터, $\overline{BF}$ = $\overline{AF}$를 증명하기 위해, $\overline{GF}$ = $\overline{HF}$ 또는 $\overline{PO}$ = $\overline{OD}$를 증명하면 된다는 사실을 알 수 있다.



이제, $\overline{PO}$와 $\overline{OD}$에 대해서 생각해 보자. 점 D는 선분 BC의 중점이고, P는 선분 AO의 중점이므로, 점 D와 점 P를 각각 지나고 선분 BE와 평행인 선분 $\overline{DN}$과 $\overline{PM}$을 그으면, 선분 AE와 CE를 각각 이등분하게 된다. 또, 점 E가 선분 AC의 중점인 것을 감안하면, 점 M, E, N에 선분 AC는 4등분되고, 이로부터, $\overline{PO}$ = $\overline{OD}$가 증명된다.



한편, $\overline{AP}$ = $\overline{PO}$ = $\overline{OD}$이므로, 중선의 교점 O는 중선 AD를 2:1로 나눈다는 것을 알 수 있고, 나머지 중선들에 대해서도 마찬가지 방법으로, 교점 O가 각 중선들을 2:1로 나눈다는 것을 증명할 수 있다. □

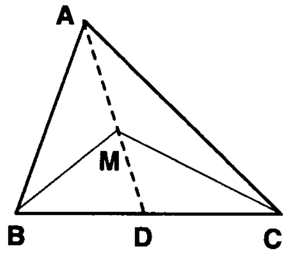
이 증명은 평행선의 기본적인 성질들 중의 하나인, 각의 두 변들 중에서 한 변을 평행인 직선으로 등분하면, 각의 다른 변에서 평행인 직선들에 의해 분할되어 얻어지는 선분들도 같다는 것을 이용하였다. 이 증명 방법의 의의는 첫째, 기초적인 수학적 성질을 이용하여, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하였다는 것, 둘째 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 먼저 두 중선을 긋고 삼각형의 세 번째 꼭지점과 그 교점을 지나는 선분이 중선이 됨을 증명하고, 그 후에 그 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하였다는 것이다.

(2) 넓이를 이용하는 증명

넓이는 문제해결을 위한 중요한 아이디어로 활용될 수 있다. 넓이를 이용해, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명해 보자. 본 연구에서는 이 증명을 위해 필요한 몇 개의 문제들을 체계화하였다.

문제 3. 점 M이 삼각형 ABC의 내부에 있고, 삼각형 ABM과 ACM의 넓이가 같으면, 점 M은 꼭지점 A에서 그은 중선에 속한다는 것을 증명하여라.

증명. 두 점 A와 M을 지나는 직선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면, 점 M은 선분 AD에 속한다.



한편, 가정에 의해 △ABM = △ACM이므로 이 두 삼각형에서 밑변을 공통인 선분 $\overline{AM}$으로 잡으면, 꼭지점 B와 C로부터 직선 AM에 그은 수선이 같게 된다.

이제, 삼각형 MBD와 MCD를 보자. 이 두 삼각형의 밑변으로 공통인 변 $\overline{MD}$를 잡으면, 수선이 같게 되므로, △MBD = △MCD. 한편, 이 두 삼각형의 밑변으로 각각 $\overline{BD}$와 $\overline{CD}$를 잡으면, 점 M에서 내린 수선이

같고, △MBD = △MCD이므로, $\overline{BD} = \overline{CD}$. 즉, $\overline{AD}$는 중선이다. □

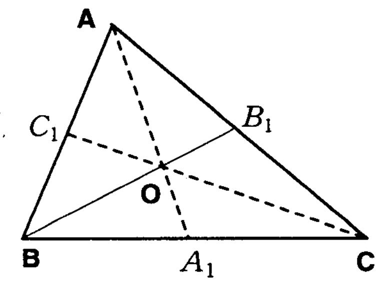
문제 3에서는 어떤 선분이 중선이 될 조건을 넓이를 이용해 나타내고 있다. 이제, 학생들은 '두 점을 지나는 어떤 선분이 중선임을 보이려면, 무엇을 증명해야 하는가?'라는 물음에 대해 한 가지 대답을 가지게 되었다. 이제, 넓이와 관련된 중선의 성질 하나를 증명해 보자.

문제 4. 점 M이 삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 그은 중선에 속하면, 삼각형 ABM과 ACM의 넓이가 같다는 것을 증명하여라.

증명. 점 M이 중선에 속하므로, $\overline{BD} = \overline{DC}$. 문제 3의 그림에서, △ABD = △ACD이고, △MBD = △MCD. 이 두 등식으로부터, △ABM = △ACM임을 알 수 있다. □

삼각형의 세 중선에 관한 정리. 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 꼭지점으로부터 2:1의 비로 나눈다는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC의 두 중선 AA_1, CC_1의 교점을 O라 하자. 문제 4에 의해, △ABO = △ACO, △CBO = △CAO. 그러므로, △ABO = △CBO. 한편, 문제 3에 의해, 점 O는 꼭지점 B에서 그은 중선에 속한다는 것을 알 수 있다. 그러므로, 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만난다.

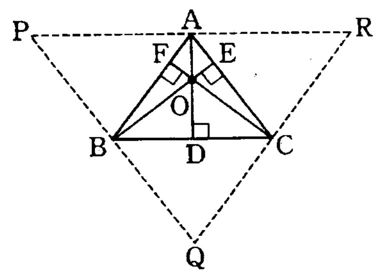


이제, 점 O가 중선을 꼭지점으로부터 2:1의 비로 나눈다는 것을 보이기 위해, 예를 들어 $\overline{AO}$: $\overline{OA_1}$ = 2:1을 증명하자. △ABO의 넓이는 △CBO의 넓이와 같고, △CBO = $\triangle A_1BO + \triangle A_1CO$ = 2$\triangle A_1BO$이다. 그리고, 삼각형 ABO와 A_1BO에서 꼭지점 B로부터 수선을 그으면 같게 되므로, 이 삼각형들의 밑변 $\overline{AO}$와 $\overline{OA_1}$의 비는 2:1이다. 마찬가지로, 나머지 두 중선에 대해서도 같은 성질이 성립한다. □

이 증명 방법에서 특이한 것들 중의 하나는 다각형의 넓이를 문제해결의 도구로써 사용하여, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명했다는 점이다. 넓이는 다각형의 한 특성일 뿐만 아니라, 문제해결을 위한 중요한 도구가 될 수 있다. 특히, 한인기 · 신현용(2001a)은 넓이를 활용하여 도형들의 다양한 성질을 탐구할 수 있음을 보였다.

5. 세 수선이 한 점에서 만남을 증명

중학교 교과서에 제시된 '삼각형 세 수선은 한 점에서 만난다.'는 정리의 증명을 살펴보자. 그림에서 삼각형 PQR은 삼각형 ABC의 각 꼭지점에서 그 대변에 평행한 직선을 그어 만든 삼각형이고, 점 D, E는 각각 꼭지점 A, B에서 그 대변에 내린 수선의 발이다. 또, 점 O는 수선 AD, BE의 교점이다. 이때, 사각형 ACBP와 사각형 ABCR는 각각 평행사변형이므로, $\overline{PA} = \overline{BC}$, $\overline{AR} = \overline{BC}$이다.



여기서, $\overline{PA} = \overline{AR}$ --- ①

즉, 점 A는 $\overline{PR}$의 중점임을 알 수 있다. 그런데, $\overline{PR} // \overline{BC}$이므로,

$\overline{AD} \perp \overline{PR}$ --- ②

①, ②에서 $\overline{AD}$는 $\overline{PR}$의 수직이등분선임을 알 수 있다. 또, 마찬가지 방법으로 $\overline{BE}$는 $\overline{PQ}$의 수직이등분

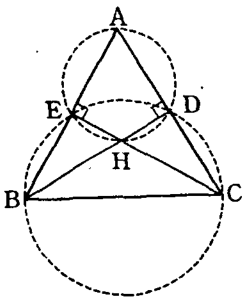
선이다. 따라서, 점 O는 삼각형 PQR의 외심이다.

한편, 점 C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 F라 하면, $\overline{CF}$는 $\overline{QR}$의 수직이등분선이므로, 삼각형 PQR의 외심 O를 지난다. 따라서, 삼각형 PQR에 대한 외심의 정의에 의하여, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$는 한 점 O에서 만난다.

위에서 살펴본 증명 방법에 사용된 수학적 아이디어는 비정형적이며, 많은 학생들이 스스로 그 아이디어를 생각할 수 있도록 하기 위해서는 많은 준비가 필요할 것이지만, 아직은 효율적인 방법이 제시되지 못하고 있다. 특히, 주어진 삼각형 ABC의 각 변에 평행한 선분들을 작도하여 삼각형 PQR을 작도하는 것이나 삼각형의 세 선분이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 그 선분들이 다른 도형의 다른 특성을 가진 선분들임을 이용하여 증명하는 것은 중학교 수학 과정의 어떤 문제에서도 접해 보지 못한 수학적 아이디어들로서 학생들에게 큰 부담을 줄 것이다.

이제, 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다는 것을 수학 교과서에 나오는 다음과 같은 평범한 문제에서 얻어진 사실과 종이 접기를 통해 얻은 수학적 아이디어에 바탕을 두고 증명하여 보자. 한 가지 덧붙일 것은, 우리의 종이 접기 활동은 예각삼각형에서 행해졌지만, 이를 통해 얻어진 증명의 아이디어는 모든 삼각형으로 일반화하여 다음과 같은 증명들을 얻을 수 있다.

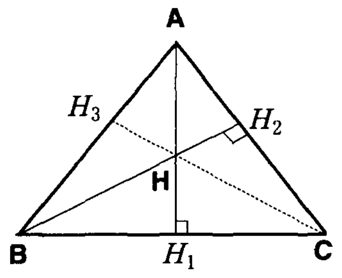
문제 5. 그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭지점 B, C에서 각각의 대변에 내린 수선의 발을 D, E라 하고, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$의 교점을 H라 하자. 이때,



(1) 네 점 A, E, H, D는 한 원 위에 있음을 증명하여라.
(2) 네 점 E, B, C, D는 한 원 위에 있음을 증명하여라.

주어진 문제에 대한 풀이는 생략하기로 하고, 이제, 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다는 것을 증명해 보자. 이 증명에서는 종이 접기에서 형성된 수학적 아이디어, 즉 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 먼저 두 수선을 긋고 삼각형의 세 번째 꼭지점과 그 교점을 지나는 선분이 수선이 됨을 증명할 것이다.

증명. 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B에서 각각 수선 $\overline{AH_1}$, $\overline{BH_2}$를 그어, 그 교점을 H라 하자. 이때, 두 점 C, H를 지나는 직선이 변 AB와 만나는 점을 H_3라 할 때, $\overline{CH_3}$가 수선임을 증명하자. 한편, 각 A는 삼각형 ABH_2와 ACH_3에 속하는 공통각이므로, $\angle ABH_2$와 $\angle ACH_3$가 같다는 것만 보이면, 선분 CH_3와 AB가 직교한다는 것이 증명된다.



네 점 A, B, H_1, H_2는 같은 원에 속하므로, $\angle ABH_2$와 $\angle AH_1H_2$는 같은 호에 대한 원주각이므로 같다. 마찬가지로, 네 점 C, H_1, H, H_2는 같은 원에 속하므로, $\angle HCH_2$와 $\angle HH_1H_2$는 같은 호에 대한 원주각이므로 같다. 그러므로, $\angle ABH_2$와 $\angle ACH_3$이 같다. □

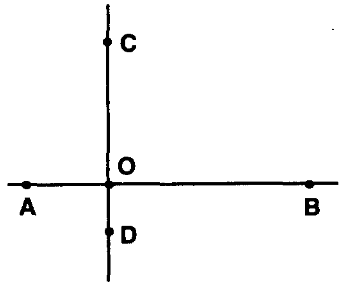
이 증명 방법의 특징은 교과서에 제시된 문제를 활용하여 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다는 것을 증명

했다는 것이다. 교과서에 제시된 많은 문제들은 다양한 활용 가능성이 있음에도 불구하고, 단편적인 문제 자체로만 제시되기 때문에 학생들이 종종 문제를 통해 새로운 수학적 사실을 배울 수 있음을 인식하지 못하는 경우가 있다. 이 문제에서는 교과서에 비록 정리로 제시되지는 않았지만, 문제를 통해 얻어진 수학적 지식을 효과적으로 활용하는 한 예를 제시하고 있다.

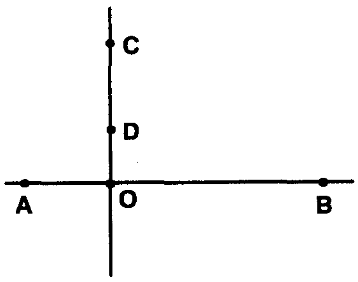
이제, 피타고라스 정리를 활용한 다른 증명을 하나 더 살펴보자. 물론, 이 증명에서도 우리의 접근 방법은 앞의 종이 접기에서 형성된 아이디어에 근거한다.

문제 6. 두 직선 AB, CD가 직교하면, $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$이 성립한다는 것을 증명하여라.

증명. 두 직선 AB와 CD가 직교한다고 할 때, 점 C, D의 위치에 따라, 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.



<그림 a>



<그림 b>

<그림 a>에서 피타고라스 정리를 활용하면,

$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$

$= (\overline{AO}^2+\overline{OD}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)$

$= (\overline{AO}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OD}^2)$

$= \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

<그림 b>에서도 마찬가지로, 피타고라스 정리를 활용하면,

$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$

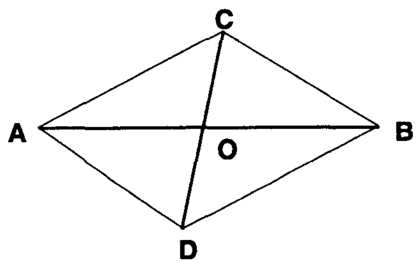
$= (\overline{AO}^2+\overline{OD}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)$

$= (\overline{AO}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OD}^2)$

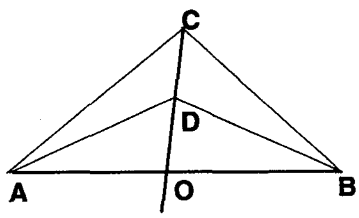
$= \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ □

문제 7. 교차하는 두 직선 AB, CD에서 $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$이면, 두 직선 AB, CD는 직교한다는 것을 증명하여라.

증명. 귀류법으로 증명하여 보자. 즉, 두 직선 AB, CD가 직교하지 않는다고 가정하자(<그림 a>, <그림 b> 참조). 이때, <그림 a>에서 일반성을 잃지 않고, ∠AOD가 예각이라 가정할 수 있으므로, 삼각형 AOD, COB는 예각삼각형이고, 삼각형 AOC, BOD는 둔각삼각형이다 (물론, <그림 b>에서도 <그림 a>에 대한 논증과 같은 방법으로 증명할 수 있다).



<그림 a>



<그림 b>

$\triangle$AOD과 $\triangle$BOC에서 예각삼각형의 성질에 의해,

$\overline{AO}^2+\overline{OD}^2 > \overline{AD}^2$, $\overline{OB}^2+\overline{OC}^2 > \overline{BC}^2$.

얻어진 부등식을 각각 더하면,

$$\overline{AO}^2+\overline{OD}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2 > \overline{AD}^2+\overline{BC}^2 \quad \text{--- ①}$$

한편, $\triangle$AOC와 $\triangle$BOD에서 둔각삼각형의 성질에 의해,

$\overline{AO}^2+\overline{OC}^2 < \overline{AC}^2$, $\overline{BO}^2+\overline{OD}^2 < \overline{BD}^2$

얻어진 부등식을 각각 더하면,

$$\overline{AO}^2+\overline{OD}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2 < \overline{AC}^2+\overline{BD}^2 \quad \text{--- ②}$$

부등식 ①과 ②로부터,

$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 < \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.

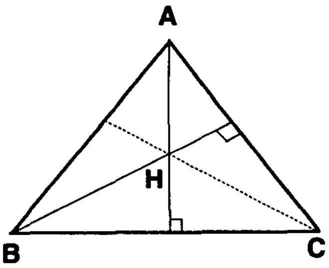
이때, 얻어진 부등식은 가정

$\overline{AD}^2+\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2+\overline{BD}^2$에 모순되므로, 두 직선 AB, CD은 직교한다. □

문제 7은 어떤 선분이 수선이 되는 조건을 제시하고 있으며, 이를 바탕으로 '삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다.'는 것을 증명할 수 있다.

삼각형의 세 수선에 관한 정리. 삼각형의 세 수선은 한 점에서 만난다는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B로부터 각각 수선을 내리고, 그 교점을 H라 하자(그림 참조). 이때, 두 점 C와 H를 지나는 직선을 그어, 직선 AB와 직교한다는 것을 증명하면 된다.



직선 BH와 AC가 직교하므로,

$\overline{AB}^2+\overline{HC}^2 = \overline{BC}^2+\overline{HA}^2$ --- ①

한편, 직선 AH와 BC가 직교하므로,

$\overline{AB}^2+\overline{HC}^2 = \overline{AC}^2+\overline{HB}^2$ --- ②

얻어진 등식 ①과 ②로부터,

$\overline{BC}^2+\overline{HA}^2 = \overline{AC}^2+\overline{HB}^2$을 얻을 수 있으므로, 직선 CH와 AB는 직교한다. □

피타고라스 정리는 중학교 기하 영역에 제시되는 중요한 기하학의 정리들 중의 하나이다. 물론, 이 정리를 명확히 알고, 다양한 문제 상황에 활용하는 것은 매우 중요하다. 피타고라스 정리를 활용하여 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다는 것의 증명은 증명의 독특한 접근 방법뿐만 아니라, 피타고라스 정리의 활용을 통한 문제해결의 경험을 제공한다는 측면에서도 그 의의를 찾을 수 있다.

6. 결 론

최근 들어, 수학 교육에 대한 연구들 중에는 학생들의 조작적 활동과 컴퓨터나 구체물 등을 이용한 다양한 직관적인 접근 방법들이 매우 활발하게 연구되고 있는데, 이러한 다양한 접근들은 자칫 교사 중심의 경직되기 쉬운 교수-학습 활동에서, 학생들에게 다양한 학습 경험을 제공할 수 있다는 측면에서 그 의의를 찾아볼 수 있다.

이때, 한 가지 주목해야 할 것은 학생들의 경험이 조작적인 활동이나 시각적인 경험 등과 같은 구체적인 활동을 통해 얻은 수학적 아이디어를 엄밀한 논증에까지 연결시켜, 학생들이 수학 명제를 증명할 때, 그 구체적인 아이디어를 찾아내는데 도움이 되어야 한다는 것이다.

본 연구는 구체적인 활동 경험과 엄밀한 논증의 연결 가능성을 탐구하는 연구로서, 삼각형의 세 수선, 각의 이등분선, 그리고 중선이 각각 한 점에서 만난다는 평면기하학의 중요한 정리를 증명할 수 있는 아이디어와 구체적인 활동 경험의 연결 가능성을 탐구하였다.

이를 위해, 현재 사용되는 수학 교과서를 분석해 보면, '삼각형의 세 각의 이등분선이 한 점에서 만난다.'는 정리의 증명에서는 증명에 활용된 아이디어를 학생들에게 충분히 준비시키지 못하고 있다. 한편, '삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다.'는 정리의 증명에서는 우선 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하고 나서, 이 비를 이용하여 세 중선이 한 점에서 만난다는

사실을 증명하고 있다. 그러나, 교과서에 '삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다.'고 기술되어 있기 때문에, 학생들은 탐구 과정에서 기술된 정리의 순서 그대로, 즉 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나고, 그리고 나서 그 교점이 2:1로 나눈다는 것을 증명하는 순서로 탐구할 가능성이 매우 크다. 그러므로, 교과서에 제시된 증명 방법은 학생들의 탐구 활동과 관련하여 생각했을 때, 효율적인 증명 방법은 아닐 것이다. 그리고, '삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다.'는 사실의 증명도 많은 보조선이 필요하기 때문에, 학생들에게 매우 어려운 증명들 중의 하나가 될 것이다.

특히, 앞에서 살펴본 세 정리가 공통점을 가짐에도 불구하고, 즉 삼각형에서 세 선분(각의 이등분선, 중선, 수선)이 한 점에서 만난다는 것을 증명하는 정리들임에도 불구하고, 교과서에서는 각기 다른 접근 방법을 취함으로써 학생들에서 문제해결의 아이디어를 정교화 할 수 있는 기회를 제공하지 못하고 있는 실정이다.

본 연구에서는 '삼각형에서 세 선분(각의 이등분선, 중선, 수선)이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 우선 두 선분(각의 이등분선, 중선, 수선)을 작도하고, 이들의 교점과 세 번째 꼭지점을 지나는 선분을 작도하여 작도된 선분이 각각 각의 이등분선, 중선, 수선임을 보이면 된다.'는 아이디어를 형성시킬 수 있는 가능한 한 가지 방법으로 종이 접기 활동을 소개하였다. 그리고, 이러한 아이디어를 활용한 엄밀한 논증 활동으로, 삼각형에서 세 각의 이등분선, 세 중선, 세 수선이 한 점에서 만난다는 정리를 증명하는 구체적인 증명 방법들을 제시하였다. 종이로 된 삼각형에서 삼각형의 각의 이등분선, 중선, 수선을 비교적 쉽게 접을 수 있다는 사실은 교사와 학생의 접기 활동을 통해, 본 연구에서 의도하는 문제해결의 아이디어의 형성 가능성에 긍정적인 영향을 미칠 것으로 기대된다.

본 연구에서, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것은 평행선의 성질, 다각형의 넓이를 이용한 증명을 제시하였으며, 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다는 것의 증명은 교과서에 제시된 수선의 성질을 활용한 새로운 증명과 피타고라스 정리를 활용한 증명 방법을 각각 제시하였다. 그리고, 세 각의 이등분선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 어떤 선분이 각의 이등분선일 조건을 제시하여, 학생들이 미리 증명에 필요한 아이디어를 준비할 수 있도록 하였다. 물론, 본 연구에서 제시된 증명 방법 모두는 종이 접기와 관련된 아이디어인 '삼각형에서 두 선분을 작도하고, 그 선분의 교점과 세 번째 꼭지점을 지나는 선분을 그어, 이 선분이 특정한 조건을 만족함'을 보이는 아이디어를 바탕으로 하였다.

본 연구를 통해 제시된 다양한 증명 방법들은, 학생들에게 한 가지 수학적 아이디어를 다양한 문제 상황에 활용하는 경험 제공과 함께, 그러한 아이디어를 다양한 상황에서 정교화 시킬 수 있는 가능성을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

권오남 (1998). 기하교육에서의 TI-92(Cabri Geometry II)의 활용, 수학교육학 연구 발표 대회 논문집, pp.269-302. 서울: 대한수학교육학회.

박영희 (1999). 수학 영재 캠프 활동 사례: 소마큐브, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 4, pp.89-96, 서울: 한국수학교육학회.

이경화 (1999). 칠교판을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 4, pp.77-88, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 신현용 (2001a). 다각형의 넓이 및 그 활용에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 12, pp.155-170, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 신현용 (2001b). 삼각형을 활용한 창의성 신장을 위한 학습 자료 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 11, pp.389-402, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 10, pp.143-154, 서울: 한국수학교육학회.

황선욱 (2000). 교구 활용을 통한 수학 영재의 창의력 신장, 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> 5, pp.117-124, 서울: 한국수학교육학회.

Polya G. (1957). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

A Study on the Connecting Paper Folding Activities of Triangle with Mathematical Proof

Han, Inki
Department of Mathematics Education, Gyeongsang National University Jinju 660-701, Koreea
inkiski@nongae.gsnu.ac.kr

Shin, Hyunyong
Department of Mathematics Education, Korea National University of Education, 363-791, Korea
shin@knue.ac.kr

In this article we study on connecting paper folding activities of triangle with mathematical proof. Folding median, bisector of angle, and hight of paper triangle, we form and extract some ideas that help us to proof some important theorems of plane geometry.

In this study using formed ideas in the process of paper folding activities, we suggest some interesting new mathematical proofs of the following theorems:

1. three medians of triangle are intersect in a point;
2. three bisectors of interior angles of triangle are intersect in a point;
3. three heights of triangle are intersect in a point.

* ZDM classification : D43
* MSC2000 classification : 97D43
* key word : Discovering mathematical ideas, Connection between paper folding and proof, Median, Bisector of angle, Height.