

투과플럭스 실험으로부터 콜로이드 서스펜션의 삼투압과 입자의 구배확산계수 산출을 위한 수치적 해석

전 명 석[†]

한국과학기술연구원 Complex Fluids and Membrane 연구팀
(2002년 5월 15일 접수, 2002년 6월 14일 채택)

A Numerical Analysis for Estimations of Osmotic Pressure of Colloidal Suspension and Gradient Diffusion Coefficient of Particles from Permeate Flux Experiments

Myung-Suk Chun[†]

Complex Fluids and Membrane Team, Korea Institute of Science and Technology, Seoul 130-650, Korea
(Received May 15, Accepted June 14, 2002)

요 약 : 멤브레인 여과 실험에서 얻어진 데이터 처리에 간단한 수치해석을 적용하여 삼투압(osmotic pressure)과 구배확산계수(gradient diffusion coefficient)를 도출하는 새로운 방법론을 제시하였다. 삼투압과 구배확산계수는 이론 및 실험적으로 쉽게 구할 수 없는 물리적 특성치로서 멤브레인 여과의 특성 규명에 중요하다. 모델 라텍스 콜로이드의 여과시간에 따른 투과플럭스(permeate flux) 값과 이에 대한 수치적분과 수치미분 데이터로부터 분산된 입자농도의 함수인 삼투압 관계식을 구했다. 이로부터 계산된 열역학적 계수(thermodynamic coefficient)는 입자농도가 증가할수록 감소하는 거동을 보였고, 여기에 기존에 제시되어 있는 수력학적 계수(hydrodynamic coefficient)를 도입하여 구배확산계수를 산출하였다. 아울러, 본 연구에서 계산된 입자농도에 따른 구배확산계수의 결과와 동일한 멤브레인 여과 라텍스 콜로이드의 여과에 대해서 기존에 통계역학적 시뮬레이션으로 예측한 결과를 비교하였다.

Abstract : A novel methodology on the calculations of osmotic pressure and gradient diffusion coefficient has been provided in the present study, by applying a succinct numerical analysis on the experimental results. Although both the osmotic pressure and the gradient diffusion coefficient represent a fundamental characteristic in related membrane filtrations such as microfiltration and ultrafiltration, neither theoretical analysis nor experiments can readily determine them. The osmotic pressure of colloidal suspension has been successfully determined from a relationship between the data of the time-dependent permeate flux, their numerical accumulations, and their numerical derivatives. It is obvious that the osmotic pressure is gradually increased, as the particle concentration increases. The thermodynamic coefficient was calculated from the numerical differentiation of the correlation equation of osmotic pressure, and the hydrodynamic coefficient was evaluated from the previously developed relation for an ordered system. Finally, the estimated gradient diffusion coefficient, which entirely depends on the particle concentration, was compared to the previous results obtained from the statistical mechanical simulations.

[†]주저자(e-mail : mschun@kist.re.kr)

Keywords : colloidal suspension, membrane filtration, osmotic pressure, gradient diffusion coefficient, Stokes-Einstein equation

1. 서 론

멤브레인 여과에 의한 분리대상 물질은 콜로이드입자, 나노미터 크기의 입자, 에멀션, 다가전해질(poly-electrolyte), 단백질 등의 생체고분자들이 분산되어 유체입자를 형성하는 이른바 복잡유체(complex fluid)이다. 멤브레인 여과 메커니즘을 이해하고 여과성능에 관계되는 투과플럭스와 배제율(rejection) 등을 깊이 있게 고찰하기 위해서는, 콜로이드 서스펜션의 특성과 현상을 한층 미세한 수준에서 파악하고자 하는 새로운 노력이 요구된다[1]. 이같은 깊은 단계의 멤브레인 연구에서 필연적으로 해결해야 하는 복잡한 문제의 접근을 위해 physicochemical microhydrodynamics의 역할이 점차 중요해지고 있음이 최근의 추세라고 분명히 말할 수 있다.

콜로이드 서스펜션의 특성에 관해서는, 이미 오래전부터 유체흐름과 물질전달 현상을 다룬 연구자들에게 의해 정립되고 체계화된 많은 연구결과들이 제시되어 있다. 그 중에서, 최근에 Bowen 등[2-4]에 의해 삼투압(osmotic pressure)과 구배확산(gradient diffusion, 혹은 mutual diffusion)에 관한 주목할 만한 연구들이 발표된 바 있는데, 그 내용은 다음의 2장에서 소개한다. 이들은 투과플럭스와 용액의 삼투압 및 입자 확산의 상호연관을 이론적으로 다루었고 실험연구를 통한 비교검증을 아울러 수행하였다.

이들의 연구내용을 확장시킨 본 논문에서는, 한외여과막에 의한 투과플럭스 실험결과로부터 콜로이드 서스펜션의 삼투압과 입자의 구배확산계수를 계산하였다. 일반적인 Stokes-Einstein 관계식과 여과시간에 따른 투과플럭스 결과에 수치해석의 기초인 Taylor theorem 전개를 적용하여 원리를 규명하였다. 본 연구에서 제시한 공학적 방법(engineering methodology)이 멤브레인 여과에 관련된 실험연구자들에게 실험결과를 해석하고 현상을 이해하는데 도움이 되기를 바란다.

2. 이론전개

2.1. 용액의 삼투압과 입자의 구배확산에 관한 원리

콜로이드 입자가 분산된 서스펜션의 멤브레인 여과를 나타낸 Fig. 1에서 기본적으로 여과원리와 삼투압 모델로써 농도분극 경계층(concentration polarization

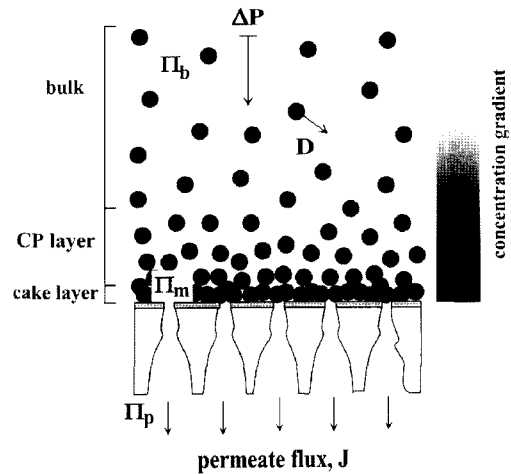


Fig. 1. Schematic illustration of filtration of colloidal suspension.

boundary layer)과 멤브레인을 가로지르는 투과 전달이 설명된다[2]. 멤브레인 상하간의 압력차이인 ΔP 가 표면적 A인 막에 가해지면 점도 η_v 인 투과액(permeate)의 투과플럭스 J는 다음과 같다[5].

$$J = \frac{\Delta P - \Delta \Pi_m}{\eta_v R_m} = \frac{\Delta P - \Delta \Pi_b}{\eta_v (R_m + R_{cp})} \quad (1)$$

여기서, 입자농도의 함수인 삼투압을 살펴보면 $\Delta \Pi_m (= \Pi_m - \Pi_p)$ 은 멤브레인 표면과 투과액간의 삼투압 차이이고, $\Delta \Pi_b (= \Pi_b - \Pi_p)$ 는 벌크와 투과액간의 삼투압 차이이다. 삼투압은 서스펜션의 열역학적 상태와 입자들간의 상호작용 효과를 대변하는 특성치로서, Π_b 는 농도분극 경계층의 상부인 벌크에서의 삼투압을, 그리고 Π_m 은 농도분극 경계층의 아래부터 멤브레인 표면까지인 케이크층(cake layer)에서의 삼투압이다. R_m 과 R_{cp} 는 각각 멤브레인과 농도분극 경계층의 저항이다. 투과플럭스는 시간에 대한 부피 투과플럭스 dV/dt 에 의해 식 (2)와 같이 표현되고,

$$J = \frac{1}{A} \frac{dV}{dt} \quad (2)$$

식 (1)과의 관계에서 시간에 따른 삼투압 차이에 관한 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\Delta \Pi_m(t) = \Delta P - \frac{\eta_o R_m}{A} \frac{dV}{dt} \quad (3)$$

식 (3)은, 멤브레인 표면에서 시간에 따른 입자의 농도변화를 알면 농도의 함수로 주어지는 삼투압을 얻을 수 있음을 의미한다. 멤브레인 표면위의 케이크층은 여과가 시작되는 최초에는 존재하지 않다가 여과 시간이 경과하면서 케이크가 계속 쌓이므로 케이크층은 점차 성장하고 케이크저항은 증가하게 된다. 주어진 시간에서의 케이크저항은 케이크층의 공극율 ε 와 연관되는데, 이는 입자-입자 상호작용에 크게 좌우된다. 콜로이드 입자의 상호작용에 관한 정보로부터 삼투압을 계산하면 다음의 식 (4)에 의해 부피 투과플럭스의 시간미분인 여과속도의 예측이 가능하다[2,3].

$$\frac{d^2 V}{dt^2} \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{A^2}{V + AR_m(1-\varepsilon) \frac{\eta_o}{\eta_a(\varepsilon)} \left(\frac{\rho_p}{C_b} - 1 \right) K_p(\varepsilon)} \quad (4)$$

여기서, C_b 는 벌크에서의 입자농도, ρ_p 는 입자의 밀도, 그리고 η_a 는 apparent viscosity이다. Darcy 법칙에 의해 도입되는 투과계수(permeability coefficient) K_p 는 입자의 농도가 증가함에 따라 하나의 입자 주위에 이웃하는 입자들로 인한 항력(drag force)을 대변한다. 기본적으로, 이는 단일입자의 침강속도와 여럿이 모인 입자들의 평균침강속도의 비로 표현되는데, 반경 a 인 입자들이 규칙적으로 배열된 서스펜션에 대해서 Happel에 의해 유도된 다음 관계식을 적용할 수 있다[6,7].

$$K_p(\varepsilon) = \frac{2a^2}{9(1-\varepsilon)} \times \left(\frac{1 - (3/2)(1-\varepsilon)^{1/3} + (3/2)(1-\varepsilon)^{5/3} - (1-\varepsilon)^2}{1 + (2/3)(1-\varepsilon)^{5/3}} \right) \quad (5)$$

입자의 농도가 매우 묽은 벌크용액내에서의 입자의 확산은 널리 알려져 있는 Stokes-Einstein 식으로 표현된다. 하지만, 입자의 농도가 증가하게 되면 입자들간의 수력학적 상호작용과 콜로이드 상호작용으로 인해 매우 묽은 경우의 확산계수값에서 벗어나게 된다[8,9]. 진한 입자농도인 경우, Stokes-Einstein 식의 확장으로 임의의 입자농도에 대해 정의되는 구배확산계수를 구할 수 있다[9,10]. 먼저, 케이크층에서의 삼투압 $\Pi_m(C)$ 으로부터 결정되는 열역학적 계수(thermodynamic coefficient) $S(C)$ 를 다음과 같이 도입할 수 있다.

$$S(C) = \left[\frac{\partial \Pi_m(C)}{\partial C} \frac{4\pi a^3}{3kT} \right]^{-1} \quad (6)$$

여기서, $C(= 1 - \varepsilon)$ 는 케이크층에서 부피분율로 표현되는 입자농도이다. 한편, 식 (5)에서 수력학적 계수(hydrodynamic coefficient) $K(C)$ 가 다음으로 정의된다.

$$K(C) = \frac{K_p(C)}{\frac{2}{9} \frac{a^2}{C}} \quad (7)$$

매우 묽은 입자농도에 적용되는 Stokes-Einstein 관계식에 의한 $D_0(= kT/6\pi\eta a)$ 를 도입하면 구배확산계수 D 는 다음과 같다.

$$D(C) = D_0 \frac{K(C)}{S(C)} \quad (8)$$

2.2. 투과플럭스 데이터에 대한 Taylor theorem 수치전개

여과부피 V 는 시간 경과에 따라 계속 변하는 양으로, $V(t_{i+1})$ 와 $V(t_i)$ 를 Taylor theorem으로 다음과 같이 전개할 수 있다[11].

$$\text{forward step: } V(t_{i+1}) \approx V(t_i) + V(t_i)'(t_{i+1}-t_i) + \frac{V(t_i)''}{2!}(t_{i+1}-t_i)^2 \quad (9)$$

$$\text{backward step: } V(t_{i-1}) \approx V(t_i) + V(t_i)'(t_{i-1}-t_i) + \frac{V(t_i)''}{2!}(t_{i-1}-t_i)^2 \quad (10)$$

그러면, 식 (9)에서 다음이 얻어지고,

$$\frac{dV(t_i)}{dt} = \frac{V(t_{i+1}) - V(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)} - \frac{V(t_i)''}{2!}(t_{i+1} - t_i) \quad (11)$$

식 (9)와 (10)을 더하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{V(t_i)''}{2!} = \frac{V(t_{i+1}) + V(t_{i-1}) - 2V(t_i) - V(t_i)'(t_{i+1} - 2t_i + t_{i-1})}{(t_{i+1} - t_i)^2 + (t_{i-1} - t_i)^2} \quad (12)$$

한편, 식 (12)를 식 (11)에 대입하여 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{dV(t_i)}{dt} \frac{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})}{(t_{i+1}-t_i)^2 + (t_{i-1}-t_i)^2} \\ &= \left[\frac{1}{(t_{i+1}-t_i)} - \frac{(t_{i+1}-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)^2 + (t_{i-1}-t_i)^2} \right] V(t_{i+1}) \\ & - \left[\frac{1}{(t_{i+1}-t_i)} - \frac{2(t_{i+1}-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)^2 + (t_{i-1}-t_i)^2} \right] V(t_i) \\ & - \left[\frac{(t_{i+1}-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)^2 + (t_{i-1}-t_i)^2} \right] V(t_{i-1}) \end{aligned} \quad (13)$$

최종적으로 이를 정리하면, 임의의 시간 t_i 에서의 부피 투과플럭스를 three-point에 대해 전개시킨 다음 관계식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t_i)}{dt} &= \frac{(t_i-t_{i-1})}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} V(t_{i+1}) \\ & + \frac{(t_{i+1}-2t_i+t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} V(t_i) \\ & - \frac{(t_{i+1}-t_i)}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})} V(t_{i-1}) \end{aligned} \quad (14)$$

마찬가지로, 임의의 시간 t_i 에서의 부피 투과플럭스에 대한 시간미분에 관해서는 다음 관계식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dA(t_i)}{dt} &= \frac{(t_i-t_{i-1})}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} A(t_{i+1}) \\ & + \frac{(t_{i+1}-2t_i+t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} A(t_i) \\ & - \frac{(t_{i+1}-t_i)}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})} A(t_{i-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

3. 결 과

3.1. 멤브레인 여과 실험결과

투과플럭스 측정장치에 사용된 50 mL 부피인 membrane cell (Amicon, Model 8050, Beverly, MA)에 장착되는 멤브레인의 유효 표면적은 $\pi \cdot 2.07^2 (= 13.46) \text{ cm}^2$ 이다[12]. 장시간의 투과플럭스 모니터링을 위해 저장용기를 설치하였고, 막 양쪽의 압력차이는 질소가스로 정밀하게 조절하였다. 시간이 경과함에 따라 전자저울 (Mettler, Model PG 502, Switzerland)에 모아지는 투과액의 질량은 펜던업 III급 PC로 전송되어 데이터처리 프로그램(Balancelink Version 2.20, Mettler-Toledo AG, 1996)으로 연속적으로 기록되었다.

Polyacrylonitrile-co-polyvinyl chloride 재질의 XM50 막 (Millipore, MA)은 분획분자량(molecular weight cut-off)이 5×10^4 인 평판형 한외여과막으로 물투과도(water permeability)가 15 psi에서 $0.84 \text{ cm}^3/\text{cm}^2 \text{ min}$ 이다. 전형적인 비대칭형(asymmetric) 막기공을 갖고 있으며, 자외선 검출기(UV detector)로 측정된 XM50 막에 대한

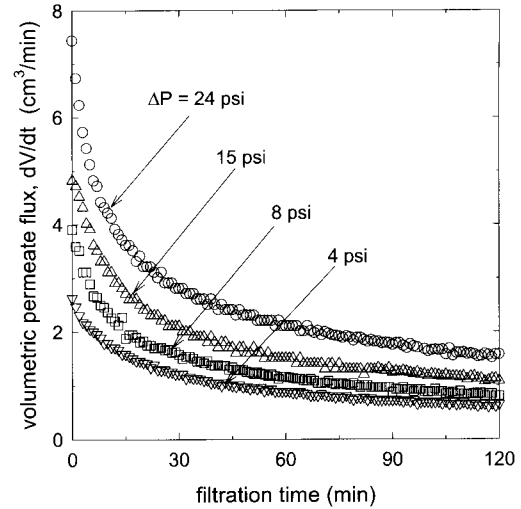


Fig. 2. The volumetric permeate flux versus filtration time at different transmembrane pressure drops ΔP , which is obtained from experiments with conditions of pH 6.0, KCl 1.0 mM, and 200 ppm of polystyrene latex.

폴리스타이렌 라텍스(Sigma Chemical Co.)의 배제율은 98% 이상의 값을, 수용성 단백질인 BSA(bovine serum albumin, A7904, Sigma Chemical Co.)의 배제율은 95%의 값을 가진다. 사용전 막표면에 있는 sodium azide와 같은 방부물질을 제거하기 위해 55 psi의 압력으로 10분간 증류수로 막을 세척하였다. 막저항은 $7.38 \times 10^{10}/\text{cm}$ 로 측정되었고, 표면기공도(surface porosity)는 field emission scanning electron microscopy(HITACHI, S-4200)으로 확인하여 약 2.6%로 나타났다. 모델 콜로이드로 사용된 폴리스타이렌 라텍스는 지름이 $0.104 \mu\text{m}$ 인 구형입자로 밀도는 1.05 g/cm^3 이고 분산도는 1.02 이하이다. 라텍스 입자의 농도 200 ppm에서 실험을 수행하였고, 서스펜션의 이온화세기 조절은 전해질 KCl의 이온농도로 변화시켰다. 증류수는 역삼투 처리된 탈이온수를 사용하였고, pH 6.0인 조건에서 투과플럭스를 측정하였다.

Fig. 2는 여과시간의 경과에 따른 부피 투과플럭스의 거동을 보여준 것으로 압력차이 ΔP 가 클수록 플럭스가 큰 것을 확인할 수 있다. 한편, 일정하게 주어진 압력차이에서는 이온화세기인 KCl 농도가 증가할수록 투과플럭스는 감소하였다.

3.2. 해석결과

Fig. 3은 Fig. 2로부터 시간에 따른 부피 투과플럭스를 수치적분하여 얻은 여과부피 V 의 결과이고, Fig. 4

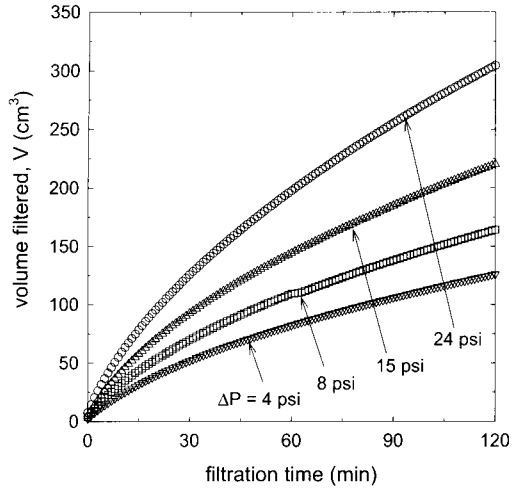


Fig. 3. Numerical accumulation of the volumetric permeate flux versus filtration time at different transmembrane pressure drops ΔP , which is computed from Fig. 2.

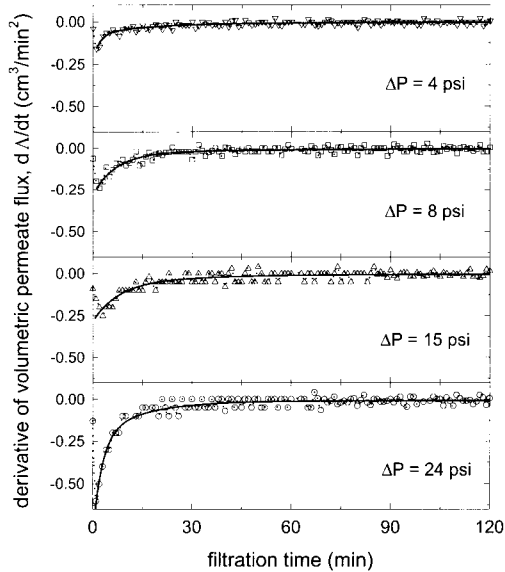


Fig. 4. Numerical derivative of the volumetric permeate flux versus filtration time at different transmembrane pressure drops ΔP , which is computed from Fig. 2.

는 식 (15)에 의해 수치미분하여 얻은 결과이다. Fig. 4에서 여과 초기에 dV/dt 의 절대값이 급속히 증가하다가 감소되어 점차 0에 가까워짐을 알 수 있다. 그런데, 수치미분에 있어서는 실험데이터에 존재하는 약간의 오차도 크게 증폭되어 편차가 심한 미분값이 유도된

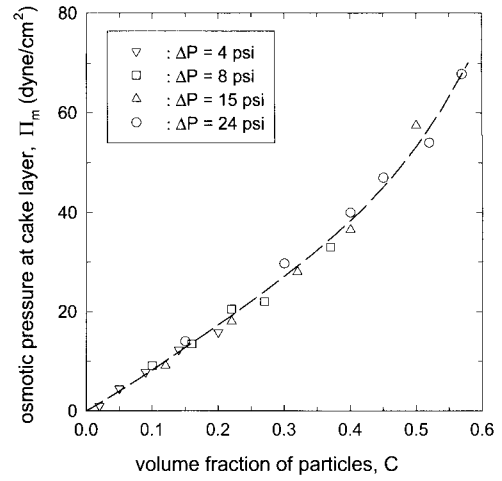


Fig. 5. The plots of osmotic pressure at cake layer versus particle concentration with different transmembrane pressure drops.

다. 따라서, 초기의 급속한 변화를 제외한 구간에 대해 curve fitting한 결과를 Fig. 4의 실선 곡선과 같이 구하였다.

식 (3)에 의해 주어진 시간에서의 삼투압을 얻을 수 있고, 주어진 시간에서 V , dV/dt , 그리고 dA/dt 의 데이터를 식 (4)에 대입하면 공극율에 관한 비선형 방정식으로 된다. 여기에, Newton-Raphson 법[13]을 적용하면 공극율을 산출할 수 있다. η/η_0 값은 electroviscous 효과에 관계되어 서스펜션에 분산되어 있는 입자농도와 주어진 용액조건에 따라 0.5~1의 범위를 갖는 것으로 알려져 있다. 여기서, 실험결과의 조건이 라텍스 200 ppm의 묽은 입자농도로서 1로 단순 가정하였다. Figs. 2-4에서 임의의 여러 시간에 대해 해당되는 값들을 찾아서 공극율과 삼투압을 구하면 Fig. 5와 같이 입자농도와 삼투압간의 상관관계를 얻게 된다.

Fig. 6은 식 (6)에 의해 삼투압 상관관계식에 농도에 관한 수치미분을 하여 얻어진 열역학적 계수 S 와 식 (7)에 의한 수력학적 계수 K 곡선을 나타냈다. 본 연구에서 계산된 열역학적 계수 S 와 동일한 폴리스타이렌 라텍스 콜로이드 서스펜션에 대해 Chun 등[10]이 계산한 기존의 결과와 비교하였다. Chun 등은 해석적인 singularity method로 매우 정확하게 계산된 콜로이드 입자들간의 상호작용에너지 분포와 통계역학적 밀도함수인 radial distribution function을 stochastic NVT ensemble 시뮬레이션으로 구하여 곧바로 S 값을 계산한 바 있다. 기존의 결과보다 전반적으로 낮은 S 값을 보이고 있는데, 이 차이에는 실험데이터의 자체적인 오차와 실험데이터의 수치미분화된 결과에서의 편차에

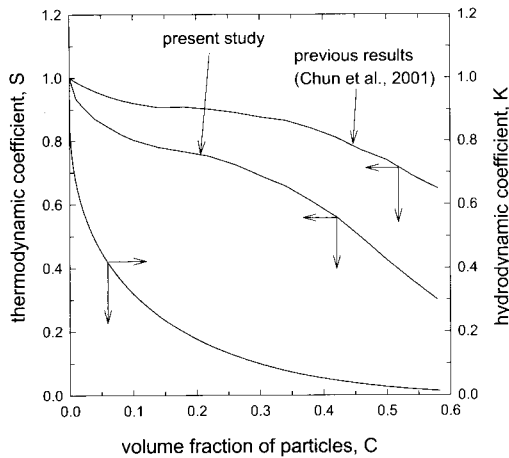


Fig. 6. The plots of thermodynamic coefficient S as well as hydrodynamic coefficient K versus particle concentration C.

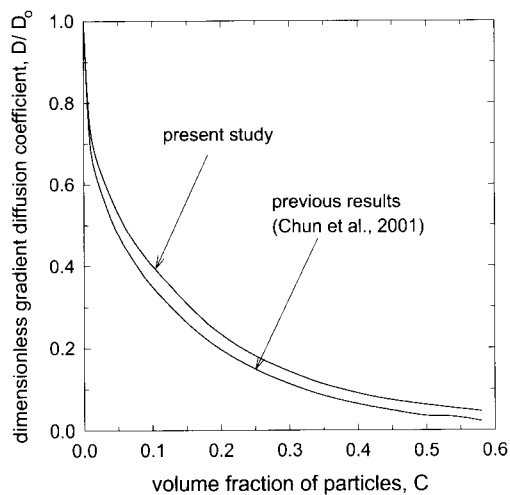


Fig. 7. The plots of dimensionless gradient diffusion coefficient versus particle concentration C.

의한 오차가 함께 작용되었다고 할 수 있다. 무차원 구배확산계수 D/D_0 의 결과를 최종적으로 계산하여 Fig. 7에 나타냈다. 구배확산계수에 있어서는 수력학적 계수 K값의 영향으로 기존결과와의 차이가 크게 감소되었음을 볼 수 있다.

보다 정확한 구배확산계수의 산출을 위해서 위에 언급한 electroviscous 효과와 함께 추가적인 연구가 필요함을 지적하고자 한다. Happel의 투과계수 K_p 에 있어서, 입자들이 강하게 하전되어 있고 진한농도인 서스펜션에서는 규칙적인 배열을 갖는 경향이 있지만, 입자들이 비하전된 경우는 불규칙한 배열을 갖는 경

향이 있으므로 이에 대한 고찰이 요구된다.

4. 결 론

입자농도가 높은 서스펜션의 경우는 입자들 사이의 many-body interaction에 대한 정량적이고 정확한 계산이 매우 복잡하기 때문에, 용액의 삼투압과 입자의 구배확산계수는 이론은 물론이고 실험적으로도 얻기 힘든 물리적 특성치이다. 폴리스타이렌 라텍스 콜로이드의 여과시간에 따른 부피 투과플럭스, 여과부피, 그리고 부피 투과플럭스 변화량의 데이터와 여과 관계식으로부터 입자농도의 함수인 삼투압을 구했다. 구해진 삼투압 상관관계식에 대한 수치미분으로 계산된 열역학적 계수와 수력학적 계수는 입자농도가 증가할수록 다같이 감소하는 거동을 보였다. 열역학적 계수와 수력학적 계수로부터 최종적으로 입자농도에 따른 구배확산계수를 산출하였고, 통계역학적 원리에 기초한 시뮬레이션으로 얻어진 기존 결과와의 비교도 제시하였다. 본 연구에서의 새로운 접근으로, 이론결과를 검증하기 위해 실험이 수반되는 일반적인 방식과는 달리 실험결과에서 반대로 이론값을 도출하였다.

감 사

본 연구는 British Council과 한국과학재단의 공동지원에 의한 Korea-UK Joint Research(2001-2002)의 일부 결과이다. 아울러, Univ. of Wales at Swansea 화공과, Center for Complex Fluids Processing의 Director W. Richard Bowen 교수님과과의 깊은 토의에 감사드린다.

사용기호

- A : membrane surface area [m^2]
- a : hydrodynamic particle radius [m]
- C : particle concentration [-]
- C_b : bulk solution concentration [kg/m^3]
- D : gradient diffusion coefficient [m^2/s]
- D_0 : dilute limit diffusion coefficient [m^2/s]
- J : permeate flux [m/s]
- K : hydrodynamic coefficient [-]
- K_p : Happel's permeability coefficient [m^2]
- kT : Boltzmann thermal energy [J]
- P : pressure [N/m^2]
- R_{cp} : concentration polarization resistance [1/m]
- R_m : membrane resistance [1/m]

| | |
|---|-------------------------------------|
| S | : thermodynamic coefficient [-] |
| t | : filtration time [s] |
| V | : volume filtered [m ³] |

Greek letters

| | |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| ε | : void fraction of cake [-] |
| η_a | : apparent viscosity of solvent [kg/m · s] |
| η_o | : viscosity of solvent [kg/m · s] |
| Λ | : volumetric permeate flux [m ³ /s] |
| ρ_p | : particle density [kg/m ³] |
| Π_b | : osmotic pressure at bulk solution [N/m ²] |
| Π_m | : osmotic pressure at cake layer [N/m ²] |
| Π_p | : osmotic pressure at permeate [N/m ²] |
| $\Delta\Pi_b$ | : osmotic pressure difference between bulk and permeate [N/m ²] |
| $\Delta\Pi_m$ | : osmotic pressure difference between membrane surface and permeate [N/m ²] |

Mathematical

| | |
|---|------------------|
| ' | : 1st derivative |
| " | : 2nd derivative |

참 고 문 헌

- L. J. Zeman and A. L. Zydney, "Microfiltration and Ultrafiltration: Principles and Applications", Marcel Dekker Inc., NY (1996).
- W. R. Bowen and F. Jenner, "Dynamic ultrafiltration model for charged colloidal dispersions: a Wigner-Seitz cell approach", *Chem. Eng. Sci.*, **50**, 1707 (1995).
- W. R. Bowen and P. M. Williams, "Dynamic Ultrafiltration Model for Proteins: A Colloidal Interaction Approach", *Biotech. Bioeng.*, **50**, 125 (1996).
- W. R. Bowen, Y. Liang, and P. M. Williams, "Gradient diffusion coefficients - theory and experiment", *Chem. Eng. Sci.*, **55**, 2359 (2000).
- M. Elimelech and S. Bhattacharjee, "A new approach for modeling concentration polarization in crossflow membrane filtration based on the equivalence of osmotic pressure model and filtration theory", *J. Membrane Sci.*, **145**, 223 (1998).
- J. Happel and H. Brenner, "Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media", 3rd Ed., Martinus Nijhoff Pub., Hague (1992).
- G. K. Batchelor, "Brownian diffusion of particles with hydrodynamic interaction", *J. Fluid Mech.*, **74**, 1 (1976).
- B. U. Felderhof, "Diffusion of interacting Brownian particles", *J. Phys. A: Mathematics General*, **11**, 929 (1978).
- W. B. Russel, D. A. Saville, and W. R. Schowalter, "Colloidal Dispersions", Cambridge Univ. Press, New York (1989).
- M.-S. Chun, G.-Y. Chung, and J.-J. Kim, "On the behavior of the electrostatic colloidal interaction in the membrane filtration of latex suspensions", *J. Membrane Sci.*, **193**, 97 (2001).
- S. C. Chapra and R. P. Canale, "Numerical Methods for Engineers", McGraw-Hill, (1989).
- J. D. Chang, M.-S. Chun, G.-Y. Chung, and J.-J. Kim, "The Influence of Solution Ionic Strength on the Permeate Flux during Dead-End Membrane Filtration of Colloidal Suspensions", *HWAHAK KONGHAK*, **38**, 485 (2000).
- W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, "Numerical Recipes", Cambridge Univ. Press, NY (1986).