大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 12 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.2, 265-273, May 2002

수학 문제해결 과정에서의 직관과 메타인지

이대현* 이봉주**

Ⅰ. 서론

우리의 교육은 예측 불가능하게 변화하는 미래 사회에 대처할 수 있는 창의적인 인간 육성을 목표로 하고 있다. 그럼에도 불구하고, 현행의 수학교육은 논리-연역적인 수학 체계의 설정과 숙련의 과정으로 점철되어 왔음을 부인할 수 없다. 그러나, 수학교육은 형식적인 법칙에 따라 맹목적이고 자동화된 지적 기교를 훈련하는 것만으로는 충족되지 않는다. 그러한 맹목적인 규칙은 실제의 문제를 해결하는 과정에서는 유용하지 못하다. 오히려, 그것들은 기계적인 연습 문제를 푸는데 잘 어울릴 것이다.

이에 대한 대안으로, 논리와 더불어 직관이 강조되는 수학교육은 논리 위주의 수학교육에 새로운 방법론적 변화를 꾀할 수 있으며, 맹목적이 아닌 의미 있는 수학 학습으로의 전환점을 제공할 수 있다. 예를 들어, 학생들에게 가르쳐지는 조건명제에 대하여, 그들이 실제의 사고 과정에서 조건 명제의 진리표를 자연스럽게 이용할 수 있게 하기 위해서는 진리표를 단지 논리적으로 구성하는 과정뿐만이 아니라, 이 진리표에 대한 의미 있는 통찰이 요구되어진다.

이를 위해, 학습자들은 실제적인 소재를 가지고 스스로 수학적 활동을 하고, 자신의 활동을 탐색하고 반성해 보는 과정을 통하여, 그들 스스로 문제에 대한 직관의 힘을 느끼도록 해야 한다(김응태, 박한식, 우정호, 1995; 교육부, 1997). 이러한 직관은 참된 지식을 발견하는 도구이며, 연역과 더불어 진리를 얻는 확실한 방법으로 간주되어진다. 또한, 직관에 의해 즉각적이고 자명하게 인지되어지는 사실은 문제해결의 유용한 단서나 해결책을 제공한다.

그러나, 판단의 상황에서 인간은 그들의 직관적인 판단에 의해 결정하려는 성향 때문에 오류를 일으키기도 한다. 이러한 직관적 판단은 선험 지식의 유용성과 성공을 경험함으로써 형성되어, 이후에 이와 맞지 않는 새로운 사실이 제시되더라도 수용하기를 거부한다. 이런 현상은 Brousseau(1997)가 말하는 '인식론적 장애'와 상통한다. 따라서 직관에 의한 오류의 원인을 파악하고, 이를 교정하기 위한 방안의 탐색이 필요하다.

본 고에서는 직관에 의한 오류를 처치할 수 있는 인자의 하나로 메타인지를 제시하고자 한다. 우선 수학교육에서의 메타인지의 의의에 대하여 알아본다. 그리고 수학 문제해결 과정에서의 직관에 의한 오류를 살펴보고, 오류의 교정을 위한 인자로 메타인지의 수학 교육적 의의에 대하여 알아본다.

---

* 전주공고
** 진주고교

Ⅱ. 수학교육에서의 메타인지

메타인지에 대한 연구는 심리학에서 스스로의 기억(기억하고 있는 것)에 대한 지식과 자각인 메타기억에 대한 연구로 시작되었다. 1970년대에 접어들면서 Flavell, Brown 등이 메타에 관한 문제를 기억에만 제한하지 않고 주의 집중을 조절하는 메타주의와 이해를 조절하는 메타 이해 등으로 발전시켰다. 그리하여 이러한 개념들을 포괄하는 형태로 메타인지에 대한 연구가 성행하게 되었다.

한편, 수학교육에서 메타인지가 주목받기 시작한 것은 1980년대의 Schoenfeld, Garofalo, Lester 등의 문제해결에 대한 연구와 관련이 있다. 이것은 문제해결이라는 상황이 학습자의 메타인지적 활동을 활발하게 이루어질 수 있게 하고, 동시에 성공적인 문제해결을 위해서는 메타인지적 활동이 중요한 역할을 수행한다고 생각했기 때문이다. 수학교육에서의 메타인지에 대한 최근의 연구는 이론적인 측면뿐만 아니라, 실제적인 적용을 염두에 두고 수업 활동의 과정에서 전개되는 사고 활동을 메타인지와 관련지어 파악하려는 연구로 발전하고 있다.

Garofalo & Lester(1985)는 문제해결에서의 메타인지를 Flavell과 Brown 등의 연구를 기초로 하여, 인지에 대한 지식(메타인지적 지식)과 인지에 대한 조절(메타인지적 기능)로 분류하였다. 인지에 대한 지식은 한 개인이 특별한 인지적 과제의 수행과 관련하여 자신의 인지적 능력 · 과정 · 자원에 대해 아는 것과 관계가 있으며, 인지의 조절 측면은 인지적 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 여러 가지 결정과 전략적 행동과 관계가 있다.

Flavell이 기억에 대한 메타인지적 지식을 인간, 과제, 전략의 세 변인으로 범주화하였듯이, 수학교육자들은 수학 과제의 수행에 있어서 메타인지의 영향을 논의하는데 이와 같은 범주화가 타당한 것으로 받아들이고 있다.

수학교육 분야에서 인간 지식은 인지적 처리자로서의 자기 자신과 타인의 성질에 대해서 가지는 생각 전체를 포함한다. 수학적 과제 지식은 과제의 본질이 그 과제의 수행에 어떻게 영향을 주는가에 대한 지식을 의미한다. 또한 과제에 있어서 내용, 정황, 구조, 계통적 배열 등과 같은 과제의 외형적 특징의 효과에 대한 인식도 포함한다. 수학적 전략 지식은 알고리즘과 발견술에 대한 지식을 포함한다. 또한 문제를 이해하고, 정보 또는 자료를 조직하고, 풀이를 계획하고, 계획을 실행하고, 결과를 검증하는 데 이용할 수 있는 전략에 대한 개인의 인식도 포함한다. 이들 세 변인은 실제 수학적 문제해결 장면에서 상호 관련되어 나타나고, 그러한 상호작용은 자기 자신의 행동을 제어하기 위한 의지 결정에도 영향을 준다.

메타인지적 기능 측면은 개인이 인지적 과제 또는 문제와 씨름하는 사이에 행하는 다양한 결정과 전략적 활동과 관계가 깊다. 이러한 활동은 문제의 특성을 이해하는 데 필요한 전략의 선택, 활동 절차의 계획, 계획을 실행하기 위한 적절한 전략의 선택, 전략을 수행하는 활동에 대한 감시, 전략과 계획의 결과에 대한 평가, 필요성에 따라 부적절한 전략과 계획의 수정과 삭제 등을 포함한다.

메타인지적 기능은 수학적 수행 특히, 문제해결에 있어서 결정적인 요소이며, 메타인지 기능의 요인으로서는 감시, 자기평가, 제어를 들 수 있다. 감시는 메타인지적 지식을 분명하게 알고, 자신의 인지활동의 진행 상태를 스스로 감시하는 것을 말한다. 자기 평가는 활동의 목적과 메타인지적 지식을 분명하게 알고, 자신의 인지활동 성과를 스스로 평가하는 것이다. 제어는 자기 평가의 결과와 메타인지적 지

식을 분명하게 알면서, 자신의 인지활동에 지시를 하고 그 후의 활동을 통제하거나 수정하는 것을 포함한다.

이러한 측면에서, Davidson & Sternberg(1998)는 메타인지가 문제 해결자로 하여금 문제의 세 가지 측면, 즉 주어진 조건, 목표, 방해 요인을 명확하게 인식하게 하여 전략적으로 다루도록 기회를 제공한다고 하였다. 이것은 학생들이 문제해결에 대한 지식 특히, 정신적 과정에 대한 지식을 가짐으로써 더 나은 문제 해결자가 될 수 있다는 것을 의미한다. 좀더 구체적으로 말해서, 메타인지적 기술을 사용함으로써 학생들은 문제의 특성을 전략적으로 부호화하여 문제의 요소에 대한 정신적 모델이나 표상을 형성하게 되고, 목표를 달성하기 위해 적절한 계획과 전략을 선택하게 되고, 진행을 방해하는 장애를 극복하게 된다.

한편, 메타인지 개념은 수학 문제해결의 지도에서뿐만 아니라, 개념 학습의 지도에서도 관심의 대상으로 논의되어지고 있다. 특히, Skemp는 인간의 지능을 직관적 지능과 반성적 지능으로 분류하고, 반성적 지능을 메타인지와 동일한 개념으로 간주하면서, 수학 개념을 학습하는 데 매우 중요한 역할을 한다고 강조하고 있다(김수미, 1996).

학습자는 새로운 개념·지식을 학습할 때, 기존의 개념·지식과의 공통점과 차이점을 발견하면서 습득해 간다고 할 수 있다. 여기에서는 학습자가 새로운 지식·개념·기능을 이해하거나 학습하는 과정에 많은 양의 정보를 하나의 유의미한 체제로 조직화하고 있는 하나의 지식 구조인 '스키마' 개념을 도입하여, 이해하지 못한 상태에서 이해한 상태로 변할 때의 '스키마 변용'에 메타인지가 어떠한 역할을 하는지에 대해서 살펴보자.

학습자가 새로운 학습 내용에 접하여 기존의 스키마와 비교하기 위해 자신의 지식 상태를 다시 살펴보는 능력은 메타인지적 기능, 특히 감시 능력에 해당하고, 이 감시의 결과에 의해서 제어가 일어난다. 이러한 감시·제어의 사이클은 (1) '기존의 지식 체계와 개념'에 관한 사이클과 (2) 전략 등의 '실행'에 관한 사이클로 나누어 생각할 수 있다. 학습과 이해의 과정에서는 기존의 스키마를 다시 살펴봄으로써 이해하고 새로운 스키마를 획득할 수 있기 때문에 사이클 (1)과 관계가 깊다.

사이클 (1)에서는 "기존의 스키마를 되돌아본다"는 것이 하나의 관점이고, 학습자가 자기 나름대로 이해하여 짐작으로 오해하는 경우에는 감시가 적절하게 이루어지지 않아서 개념적인 갈등이 일어나지 않았다고 할 수 있다. 이런 경우에는 학습자가 어떤 종류의 갈등을 느끼도록 해야 하며, 자신의 생각에 이상이 없는지를 확인하는 의식적인 메타인지가 필요하다. 이것은 정보의 재조직화 또는 재구조화와 관련된 문제이다. 이에 대해서 Markman은 어떤 내용에 대해서 상세한 사실을 많이 획득하고, 보다 조직화(구조화)된 정보를 가지고 있느냐에 따라서 다음과 같은 세 가지 이점을 가진다고 지적한다(岩合一男, 1990, p.89).

① '결집화'가 이루어진다. 그 결과 각각의 사실을 처리하는 데에 주의를 기울이지 않아도 되기 때문에 잉여의 능력을 현재 행하고 있는 인지활동을 제어하거나 추론하지 않고 구성적 과정을 수행하는 데 사용할 수 있다.

② 기존의 정보가 조직화되어 있는 만큼 보다 많은 기대를 할 수 있다. 이러한 기대는 일반적인 것이 아니고 보다 특수화되어 있는 경우가 많아서, 새로운 정보가 기존(선행) 지식과 차이가 있다는 것을 분명하게 인식하거나 자기 자신의 이해 정도를 스스로 쉽게 알 수 있다.

③기존의 정보가 조직화되어 있으면, 그 조직화의 원리에 관한 지식이 보다 확실해진다. 그렇게 되면 어떤 구조가 존재하는가를 발견하기

위하여 가설을 설정하거나 새로운 추론의 적절성과 가치를 판단하는 데 그러한 원리를 이용할 수 있다.

스키마의 변용이라는 측면에서 볼 때, 이해·학습 과정에서의 메타인지의 작용은 기존의 스키마에 대한 반성, 기존의 스키마와 새로운 내용의 불균형에 대한 감시, 기존의 스키마를 변환하고 수정한 스키마의 활성화 등을 들 수 있다. 이 때, 불균형에 대한 감시는 기존의 스키마와 새로운 내용의 차이를 인식하고 새로운 내용을 이해하기 위한 이해의 감시와 관계가 깊다. 따라서 이것은 문제해결 과정에서의 감시와는 질적으로 다르다고 볼 수 있다.

III. 수학 문제해결 과정에서의 직관에 의한 오류

인간은 각자의 직관을 가지고 있다. 따라서, 판단의 상황에서 인간은 그들의 직관적 판단에 의해 결정하려는 경향이 강하여, 새로운 개념을 쉽게 받아들이지 않으려 한다. 즉, 직관에 의해 동화가 원활히 이루어지지 않는 경우가 있다.

또한, 인간이 가지고 있는 지식은 어떤 상황에서 일정 기간 동안 타당하고 유용한 지식이었고, 그래서 그들의 인지 구조에 강하게 세워져 왔다. 그러나, 이러한 지식은 기존의 지식이 더 이상 타당하지 않거나 유용하지 않은 상황이 도래될 때 새로운 지식에 맞도록 조절이 일어나야 되는데, 기존 지식에 의한 강한 영향으로 인해 직관적 판단의 상황에서 새로운 지식을 거부하여 조절이 원활히 이루어지지 않는 경우가 있다. 이와 같이, 직관은 교수-학습 상황에서 동화와 조절을 어렵게 하는 원인이 되기도 한다.

학습자가 선험 지식의 유용성과 성공을 경험함으로써 형성된 개념은 이와 부합하지 않는 새로운 지식을 수용하는데 거부감을 나타내며, 심지어는 모순되는 두 지식이 하나의 인지 구조 안에 병존하여, 학습자에게 갈등을 야기 시키는 원인으로 작용하기도 한다. 이러한 현상을 Brousseau(1997)는 '인식론적 장애'라고 표현하고 있다. 즉, 인식론적 장애란 "경험론자나 행동주의자의 이론에서 생각하듯이, 무지, 불확실성, 운의 결과가 아니라, 흥미롭고 성공적인 이전의 지식의 결과이며, 이제는 틀린 것이나 단지 부적합한 것으로 밝혀진 것(Brousseau, 1997, p. 82)을 의미한다.

이러한 측면에서, 직관은 내재적으로 확실하고 자명하며 즉각적인 판단에 의존하는 특성으로 인하여, 문제해결 과정에서의 오류를 일으키는 원인이 되기도 한다. 직관적 판단과 관련하여 인식론적 장애 형성의 원인으로 몇 가지를 들 수 있다.

먼저, 수학에서 사용되는 용어는 일상 생활에서 이용되는 용어와 그 의미가 다르게 이용됨으로써 인식론적 장애의 원인이 된다. Cornu (1991)는 형식적인 수업을 받기 전에 형성된 개념을 '자생적 개념'이라고 한다. 자생적 개념은 학습자가 학습을 통하여 새로운 개념을 습득한다 할지라도 완전히 사라지는 것이 아니고, 새롭게 획득된 개념과 혼합되어, 학문적 의미로 용어를 이해하는데 장애의 원인으로 작용한다.

두 번째, 감각을 통하여 습득된 정보는 판단의 상황에서 착각이나 오류를 일으키기도 한다. 특히, 시각에 의해 습득된 정보가 착각이나 오류를 일으키는 것은 우리의 시각에 한계가 있기 때문이며, 또한 시각을 통하여 얻은 정보를 지나치게 과신하는 직관 때문이다.

이와 같이, 시각을 통하여 습득된 정보는 관

찰자의 경험이나 지식, 또는 직관적 판단에 의해 다르게 인식될 수 있다. 특히, 시각을 통해 인식된 대상에 대해 면밀히 분석하지 않은 즉각적인 판단은 사물의 특성을 왜곡시키는 원인이 되기도 한다.

시각에 의한 오류 발생 현상은 도형이 주는 직관적인 이미지에 의해 즉각적으로 판단함으로써 수학 문제해결에서 오류를 일으키게 한다. 예를 들면, 서로 평행인 두 직선 l, m에 대하여 같은 폭으로 구성된 직선으로 형성된 도형의 넓이와 곡선으로 형성된 도형의 넓이를 비교하라고 하면, 학생들은 곡선으로 구성된 도형의 넓이가 직선으로 형성된 도형의 넓이보다 넓다고 대답한다. 이것은 정적분을 배운 학생조차도 곡선으로 구성된 영역의 길이가 더 길기 때문에 넓이가 넓을 것이라고 판단하는 것이다(Fischbein, 1987).

셋째, 학생들이 가지고 있는 개념 자체에 의해 발생하는 오류를 들 수 있다. 수학 학습은 주로 형식적 정의와 개념, 기본 성질, 관련 예제의 순서로 제시되어진다. 교사는 형식적인 학습 내용의 제시를 통하여 학습자가 학습목표에 도달하기를 기대한다. 그러나, 수학 학습은 교사나 교과서의 권위에 의해 이루어지지 않는다. 학습자는 자신의 의지나 배경 지식에 근거하여 새로운 수학적 사실을 받아들인다.

Tall과 Vinner는 수학적 개념과 학생들의 개념을 구분하여, 각각 '개념 정의'와 '개념 이미지'로 부르고 있다(Tall, 1991). 개념 이미지는 개인이 그 개념에 대해 가지는 모든 관념의 집합으로 구성되며, 개념 정의는 개념을 정확히 설명하는 언어적 정의를 의미한다. 개념 이미지 중에서 개념 정의와 갈등을 일으키는 것을 '잠재적 갈등 요인'이라고 부르며, 어떤 상황에서 이 요인들이 실제로 불러 일으켜 졌을 때, 이를 '인지적 갈등 요인'이라고 부른다. 이러한 갈등 요인들은 교수-학습 상황에서 신중히 고려하여야 한다.

넷째, 교육 체계 내에서의 교사의 지도 계획, 지도 방법, 교육 과정, 교과서 등이 학생의 개념 이해에 영향을 주기 때문에 발생하는 오류를 들 수 있다. 교수-학습 과정에서 형성된 학습자의 개념은 새롭게 획득되는 개념과 융화되어 적응되어지거나, 갈등을 야기하기도 한다. "두 점은 한 직선을 형성한다"와 같은 개념의 학습을 위한 점의 Spot 모델은 이후에 "길이가 다른 두 선분 위의 점들이 서로 일대일 대응한다"는 사실을 받아들이지 못하도록 강요하여, 문제해결 과정에서 교수학적 영향에 의한 직관의 오류를 야기 시킨다.

이상과 같은 오류는 자신의 해석과 문제해결의 타당성에 대한 의심할 것 없이 자명해 보이는 사고인 직관에 의한 것이다. 직관에 의한 오류를 피하는 것은 개념적 수준에서의 오 개념을 교정하는 것보다 어려움이 많다. 때때로, 이것은 오랜 기간 동안 옳다고 믿어 왔던 사실들을 포기해야만 한다. 이런 측면에서, 수학 문제해결 과정에서 직관에 의한 오류를 교정하기 위한 방안으로 메타인지 능력의 습득과 활용은 유용할 것이다.

Ⅳ. 직관의 오류 교정을 위한 메타인지의 역할

우리는 길을 건널 때, 다가오는 차의 속도를 즉각적으로 판단하여 건널지, 또는 건너지 말아야 할지를 판단한다. 비록 순간적으로 이루어지는 현상이지만, 우리는 순간적인 해석이나 해결책을 믿어야 한다. 이와 같이, 직관은 즉각적이고 자명하며 확실하게 인지되어지는 믿음과 같다. 이런 믿음이 생기기 위해서는 어느

정도 그 상황의 판단에 과신이 요구되어진다.

과신이 직관에서 중요한 역할을 하고 있음은 직관적으로 인지된 사실이 주체에게 일관성 있고 자명하게 여겨지는 직관 자체의 특성에 기인한다. 한편, 과신이 직관에서 중요한 역할을 수행한다는 사실은 직관이 항상 오류를 내포한다는 것을 의미하는 것이 아니다. 이것은 어느 정도 논리적 토대나 경험적 자료가 결여된 주장이나 사실을, 확신을 가지고 받아들이려는 성향이 있음을 의미한다(Fischbein, 1987).

몇몇 연구들(Pitz, 1974; Sieber, 1974)은 실험을 통해, 피험자가 확실히 과신을 가지고 있음을 보여주고 있다(Fischbein, 1987에서 재인용). 또한, Fischhoff, Slovic & Lichtenstein(1977)은 실험을 통하여, 사람들이 옳다고 확신하는 경우에 너무 자주 틀리는 경우가 발생한다고 지적하고 있다.

과신은 어떤 개념을 지지하는 자료의 선호와 이에 모순되는 자료를 무시하는 것으로 이루어진다. 마찬가지로, 문제해결 상황에서 우리는 실제로 이용 가능한 정확한 정보보다 개개인의 과신, 또는 직관적 판단에 따라 행동하기도 한다. 이것은 때때로 직관으로 인해 야기되는 오류의 원인이 되기도 한다.

위와 같은 오류는 자신의 해석과 문제해결의 타당성에 대한 의심할 것 없이 자명해 보이는 사고, 즉 직관에 의한 것이다. 학교 교육에서 직관에 의한 오 개념은 고쳐져야 한다. 그러나, 개념적 수준에서의 오 개념의 교정과 같지 않게, 직관에 의한 오 개념의 교정은 오랜 기간 동안 형성되어 온 강한 인지적 신념의 재조직이 요구되어진다. 때때로 몇몇의 근본적인 믿음을 포기해야만 한다. 수학과 과학의 역사를 통하여 알 수 있듯이, 오랜 기간 동안 옳다고 믿어 왔던 사실들이 더 이상 진리가 아닌 것과 같이, 우리는 해결중인 또는 해결한 문제가 잘못 됐을지도 모른다는 것을 알아야 한다.

이와 같이, 직관에 의한 장애를 피하는 것은 가능하지 않으므로, 이에 대처할 교수 전략을 세워야 한다. 또한, 우리는 직관에 의해 야기되는 실수의 체계적인 원인을 분석해야 한다. 이를 위해 우리는 결과를 확인하는 절차를 배워야 하며, 해결하려는 문제에 의해 직접적으로 제기된 것 보다 더 넓은 관점으로 결과를 해석하는 것을 배워야 한다(Fischbein, 1987). 이런 과정에 메타인지 능력이 적절히 융화되어야 한다. 즉, 자신의 활동을 스스로 분석하고 조절하는 것을 통하여 직관적 판단이나 과신에 의해 잘못된 단계나 과정을 파악해야 한다.

마찬가지로, 메타인지는 문제해결 과정 동안 계속적으로 문제 해결자에게 융화되어 나타나야 한다. 자신의 사고 과정을 사고하고 반성해 가는 과정 속에서 느낀 것에 대한 통찰은 Fischbein의 '단정 직관'과 유사하다. 직관에 의한 오류를 처치하고, 문제를 해결하는 동안 '단정 직관'을 경험하기 위하여 '문제 이해 - 계획수립 - 계획 실행 - 반성'의 과정 동안, 문제해결자는 메타인지적 활동, 즉 끊임없는 '자문'을 통하여 자기의 사고 과정에 대하여 사고하고 반성하는 경험을 하여야 한다. 문제해결 4단계 과정에 비추어 각 단계에서 문제해결자가 자문할 내용을 다음과 같이 정리할 수 있다 (Polya, 1957).

문제이해 : 미지의 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가?
계획수립 : 관련된 문제를 전에 풀어 본적이 있는가? 그것을 활용할 수 있을까? 미지의 것을 살펴보자. 보다 일반 적인 문제는? 특수한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있을까? 문제에 포함된 핵심적인 개념은 무엇인가?
실행 : 각 단계를 올바르게 행하고 있는가?
반성 : 결과를 점검해보자. 결과를 다른 방 법

으로 이끌어 낼 수 있는가? 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용 할 수 있는가?

(우정호 (역), 1997, pp. 14-16)

이러한 일례로 한 연구의 예를 들면, 중학교 2학년 학생(호현)의 문제해결 과정에서, 연구자는 학생이 문제를 해결하는 동안 스스로 자신의 문제해결 과정을 점검하고 조절할 수 있도록 안내하는 메타인지적 활동을 오른쪽 <표 1>와 같은 자료를 이용하여 유도하였다. 그 결과, 연구자는 그 학생이 메타인지적 활동을 통해 문제해결 과정에서의 직관에 의한 오류를 수정하여 문제를 올바르게 해결했다는 것을 발견하였다(이봉주, 2002).

<표 1> 메타인지적 활동 안내 자료

문제이해	Ⅰ. 문제를 풀기 시작하기 전에 1. 문제를 한 번 이상 읽는다. 2. 문제가 무엇을 요구하는지를 생각해 본다. 3. 자신의 말로 문제를 설명해 본다. 4. 이전에 이러한 문제를 풀어본 적이 있는지를 생각해 본다. 5. 문제를 푸는 데 필요한 정보에 대하여 생각해 본다. 6. 필요 없는 정보가 있는지를 생각해 본다.
풀이계획	Ⅱ. 문제를 해결하기 위한 전략 1. 그림을 그린다. 2. 추측하고 점검한다. 3. 표를 만들어 이용한다. 4. 문제에 필요한 연산을 선택한다. 5. 규칙을 발견한다. 6. 구체물을 이용한다. 7. 단순화한다. 8. 문제의 순서대로 해 본다. 9. 방정식을 세운다. 10. 거꾸로 풀어본다.
계획실행	Ⅲ. 문제를 푸는 도중에 1. 문제를 푸는 중에 모든 단계를 생각해 본다. 2. 한 단계를 마칠 때마다 문제로 되돌아가 본다. 3. 일단 중단하고 이미 실시한 단계를 다시 생각해 본다. 4. 문제를 풀면서 단계별로 자신의 활동을 점검해 본다.
점검활동	Ⅳ. 문제를 다 풀고 난 후에 1. 풀이 절차가 정확하게 이루어졌는지를 확인해 본다. 2. 계산이 맞는지를 알아보기 위해 점검해 본다. 3. 처음부터 다시 자신의 활동을 점검해 본다. 4. 답이 옳은지를 확인하기 위해 문제를 다시 본다. 5. 문제를 푸는 또 다른 방법을 생각해 본다. 6. 중요한 정보를 기록한다.

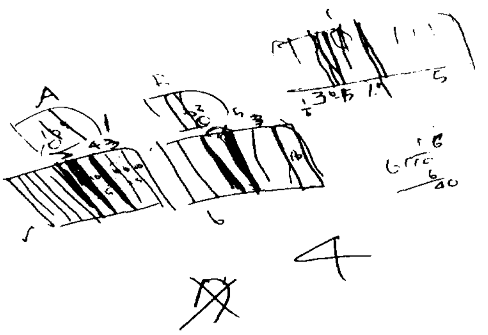
연구자가 메타인지적 활동을 유도하여 문제를 해결하도록 하는 과정에서 호현이에게 제시한 문제 중의 하나는 다음과 같다.

벽에 페인트를 칠하는 데 A는 10분이 걸리고, B는 6분이 걸린다. A와 B 두 사람이 함께 이 일을 한다면 약 얼마나 걸리겠는가?

호현이는 이 문제를 받고 처음에는 직관적으로 8분이라고 답하였다. 그리고 나서 메타인지적 활동 안내 자료를 확인하였다. 잠시 후 그림 그리기 전략을 세워 문제를 풀어보더니 답을 7분이라고 적었다. 호현이는 다시 한번 자신의 답을 점검하기 시작하였다. 문제해결 과정에서 전략을 세우고 자신의 해결 과정을 반성함으로써 답을 근사적으로 구해 내었다. 호현이는 답을 정수로 구하여 약 4분이라고 하였다. 호현이가 약 4분이라고 답하는 것을 보고, 관찰자가 4분보다 더 많이 걸리는지 아니면 4분보다 더 적게 걸리는지 물어보았다. 호현이는 3분보다는 훨씬 많이 걸리지만, 4분 안에 일을 끝낼 수 있다고 답하였다. 호현이가 직관에 의해 답을 추측한 후에 안내된 메타인지적 활동을 통해 문제해결을 완성해 가는 과정에서 묘사한 도식은 <그림 1>과 같다.

이 문제해결 과정에서 호현이는 직관에 의한 오류를 자신의 메타인지적 활동을 통해 확인하고 수정하였음을 알 수 있었다. 이러한 예에서, 학생들의 직관에 의한 오류 수정을 위해 메타인지가 매우 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다.

한편, 직관에 의한 문제해결 과정에서의 메타인지적 활동이 오류를 수정할 수 있다는 사



<그림 1> 메타인지적 활동에 의한 문제해결 과정의 도식

실은 수학 학습이 직관과 논리의 균형에 의해 이루어져야 한다는 것을 의미한다. 이를 위해, 수학 교사는 직관적 판단에 의한 결과가 오류를 일으킬 수 있음을 인식시켜 주어야 하며, 학생들이 기존에 가지고 있는 지식으로는 해결할 수 없는 상황을 제시해 줌으로써 정신적 갈등을 경험하도록 유도하고, 다른 한편으로는 직관을 통한 문제해결 과정에 논리적으로 사고하는 발문이나 기회를 제공해 주어야 한다.

V. 결론

이 글은 직관에 의한 오류를 처치할 수 있는 하나의 방안으로 메타인지를 제시하였다. 연구 목적을 위하여, 먼저 수학교육에서의 메타인지의 역할과 수학 문제해결 과정에서의 직관에 의한 오류를 살펴보았다. 그리고 수학 문제해결 과정에서의 직관에 의한 오류의 교정을 위한 인자로 메타인지를 들 수 있음을 이론과 하나의 예를 통하여 살펴보았다. 특히, 제시된 예를 통하여 문제해결 과정에서 직관에 의한 오류 수정에 메타인지가 매우 중요한 역할을 한다는 것을 제시하였다.

직관과 메타인지적 활동을 경험할 수 있는 기회를 제공하는 수학교육은 논리 위주의 수학교육에 새로운 방법론적 변화를 제시해 줄 수 있다. 또한, 메타인지는 문제해결 과정에서뿐만 아니라, 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 지도할 때에 나타날 수 있는 직관에 의한 장애를 수정하는 데에도 유용한 역할을 담당할 것이다.

수학 교육에서 학생들은 직관의 중요성을 인식하고, 직관의 발현을 경험할 수 있는 다양한 기회를 가져야 할 것이다. 이를 위한 다양한 교수학적 노력이 요구된다. 또한, 수학 학습에서 직관의 오류를 피하기는 어렵다. 따라서, 직관적 판단 후에는 자신의 사고 과정을 다시 생각해 보는 메타 인지적인 활동이 병행되어야 한다. 이것은 학생들의 메타인지적 능력을 향상시킬 수 있는 교수-학습 방안의 모색의 필요성을 시사한다.

참 고 문 헌

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부.

김수미(1996). 메타인지의 수학교육적 고찰. 서울대학교 박사학위 논문.

김응태, 박한식, 우정호 (1995). 증보 수학교육학개론. 서울: 서울대학교 출판부.

이봉주(2002). 수학 문제해결 과정에서 고등학생들의 메타인지적 능력 활성화 방안 탐색. 한국교원대학교 박사학위 논문.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking(pp.153-166).* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart problem solving: How metacognition helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser (Eds.), *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 47-68). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Fischhoff, B., Slovic, P., & Lichtenstein, S. (1977). Knowing with certainty: The appropriateness of extreme confidence. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance,* 3(4), 552-564.

Garofalo, J. & Lester, F. K.(1985). Meta cognition, cognitive monitoring, and Mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education,* 16(3). 163-176.

Polya, G. (1957). *How to solve it: Vol. 2.* New York: Doubleday. 우정호 (역) (1997). 어떻게 풀 것인가: 수학적 사고 방법. 서울: (주)천재교육.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking(pp.3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

岩合一男(1990). 數學教育におけるメタ認知にかかわる認識過程の綜合的研究, 廣島大學.

Intuition and metacognition in Mathematical Problem Solving Process

Lee, Dae-hyun(Jeon-ju technical high school)
Lee, Bong-ju(Jin-ju high school)

The purpose of the paper is to provide the importance of matacognition as a factor to correct the errors generated by the intuition. For this, first of all, we examine not only the role of metacognition in mathematics education but also the errors generated by the intuition in the mathematical problem solving process. Next, we research the possibility of using metacognition as a factor to correct the errors in the mathematical problem solving process via both the related theories about the metacognition and an example. In particular, we are able to acknowledge the importance of the role of metacognition throughout the example in the process of the problem solving.

It is not difficult to conclude from the study that emphasis on problem solving will enhance the development of problem solving ability via not only the activity of metacognition but also intuitive thinking. For this, it is essential to provide an environment that the students can experience intuitive thinking and metacognitive activity in mathematics education.