大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 12 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XII, No.2, 229-245, May 2002

대수적 사고와 대수 기호에 관한 고찰[1)]

김 성 준*

Ⅰ. 서론

"대수적 사고란 무엇인가?" 이 질문은 대수의 정의 자체가 쉽지 않다(우정호, 1999)는 점으로부터 미루어볼 때 쉽게 답할 수 있는 성질의 것이 아니다. 이는 곧 대수를 일반화된 산술로 단순화해서 볼 경우 같은 맥락에서 일반화를 대수적 사고의 중심에 둘 수 있음을 의미하며, 한편 현대 대수의 특징인 구조를 대수의 핵심으로 파악할 경우에는 대수적 사고를 관계와 구조를 파악하는 함수적 사고와의 관련성 안에서 생각할 수 있음을 의미한다. 이처럼 대수적 사고에 대한 논의는 그 내용을 무엇으로 보느냐에 따라 다양한 모습으로 정의될 수 있을 것이나, 그러나 이러한 논의에서 대수 기호를 제외시킨다면 대수적 사고를 드러내는데 분명 한계가 있을 것이다. 이것은 대수에서의 기호 사용이 대수의 구조적인 연결성을 파악하고, 대수에서 진행되는 일반화 및 논증적인 성질을 이해하는데 바탕이 되기 때문이다.

이와 같은 맥락에서, 우정호(1999)는 대수에서 특히 기호주의의 발달에 주목하여, 절차적인 관점에서 구조적인 관점으로 사고의 전환을 가능하게 한 주요한 요소로 대수에서 진행된 기호주의의 발달에 주목하였다. 또한 그로 인하여 구체적인 계산 법칙을 표현하는 일반화가 가능해졌다는 사실과 그 결과 대수의 적용 가능성이 확장되었음을 강조하였다. 그러나 대수 기호의 이러한 역할에도 불구하고 정작 학생들은 대수 학습에서 대수 기호를 이해하고 사용하는데 많은 어려움을 경험하는 것이 사실이다. 학생들은 중등 수학 이후 수학의 다양한 영역에서 대수 기호를 접하게 되고 이와 함께 대수적 사고 과정에서 많은 어려움을 경험한다. 이 글은 이러한 어려움의 원인을 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 파악하는 데 있어서 학생들의 사고 과정이 유기적으로 연결되지 못한데서 찾고 있다. 그리고 그 결과 학생들이 만들어내는 많은 오개념 곧, 대수 기호 원래의 의미를 대신해서 사용하는 오개념을 대수적 사고 과정에서 나타나는 또 하나의 어려움으로 보고 있다.

학생들은 각기 다른 방식으로 기호에 새로운 의미를 부여한다. 그들은 대수 기호를 해석하는 과정에서 자신이 만들어낸 의미를 자신만의 맥락에서 사용하거나 또는 이미 학습한 산술 등의 학습 모델에 근거해서 이를 정당화하려 하기 때문에, 이런 식으로 한번 형성된 오개념은 쉽게 변하지 않는다. 그 결과 대수에서 경험하는 이러한 오개념은 학교 수학 전반으로 그 범위가 확대된다. 이러한 모습은 학교 현장

* 서울대학교 대학원
1) 이 논문은 2000-2001년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.

에서 교사와 학생이 사용하는 기호에서 그 예를 찾아 볼 수 있다. 우리는 수업 시간에 교사와 학생이 서로에게 다른 의미를 갖는 동일한 기호를 함께 사용하는 것을 보게 되는데, 이로 인하여 교사와 학생은 중등 이후 대수 수업에서 기호와 관련된 문제를 다룰 때 기호의 의미 대신 형식적인 규칙의 지도와 학습만을 강조하게 된다. 이처럼 대수 기호와 관련해서 학생들이 경험하는 어려움은 대수 기호와 그 의미를 역동적으로 연결시키지 못하거나 또는 그 연결에서 오개념을 사용하는 경우에 분명하게 드러난다.

이러한 맥락에서 보면 대수 기호는 중등 학교 이후의 수학 학습에서 중요한 역할을 하지만, 동시에 학생들의 입장에서 보면 대수 기호에서 부딪히는 많은 어려움으로 인하여 수학에 대한 흥미와 자신감을 잃어버리는 원인이 되기도 한다. 대수와 대수적 사고를 정의한 많은 연구들은 학생들이 대수 기호에서 경험하는 어려움을 그 유형에 따라 구분하고, 단편적인 상황을 재조직함으로써 이러한 어려움을 극복하려는 시도를 보여주지만, 포괄적인 관점에서 학생들의 인지 과정을 분석하고 학습에 필요한 제안을 효과적으로 제공하지는 못하고 있다(Arzarello외 et al., 2001). 선행 연구에서 드러난 이러한 문제들은 대수적인 사고가 그 자체로 표현이 가능한 형식화된 언어라는 점과 이러한 언어와 분리되지 않은 채 인지된다는 사실을 간과했기 때문인데, 이러한 입장은 언어와 사고에 관한 Vygotsky 이론가들에게서도 찾아볼 수 있는 부분이다.[2] 다시 말해, 대수적 사고와 언어는 같은 과정에 대해 서로 독립적인 양상으로 존재함과 동시에 서로 복잡하게 얽혀 있음을 알 수 있고, 이것은 선행 연구의 문제점을 분명하게 드러내는 대목이다. 따라서 대수적 사고를 기호 언어학적 관점에서 분석하는 것은 선행 연구를 보완하는 동시에 대수적 사고에서 이루어지는 언어와 기호의 역할을 분명히 하는데 도움이 될 것으로 기대된다.[3]

이러한 대수 기호와 대수적 사고에 관한 논의를 위해 이 글은 먼저 대수적 사고에 대한 정의를 관련 문헌을 통해 살펴보고 있으며, 이러한 논의를 통해 대수 기호가 언제나 대수적 사고의 핵심에 위치하고 있음을 보이고자 하였다. 이러한 분석에서부터 "대수 기호는 실제로 어떻게 사용되는가?"라는 물음이 제기되는데, 이에 대하여 3장에서는 대수 기호가 사용되는 유형을 구분하여 그 각각의 예를 살펴보고 있다. 그리고 대수적 사고에 대한 기호 언어학적 분석 모델을 Frege의 아이디어에서부터 살펴보았으며, 이 모델을 통해 대수적 사고의 어려움과 그 과정에서 일어나는 대수적 사고의 역동성에 대하여 논의하고 있다.

II. 대수적 사고의 정의

수학은 현상이나 경험의 정리 수단이 본질이며 수학의 학습은 그러한 본질에 대한 이해 곧 수학적 안목의 구성을 목표로 하는 것인 바, 이를 위해서 무엇보다 먼저 요구되는 것이 수학적 사고의 본질에 대한 분석이다(우정호,

2) Vygotsky(1962)는 '사고와 언어(1985, 신현정 역)'를 통해 사고와 언어의 분리된 기원에도 불구하고, 사고와 언어를 분리되거나 독립된 것으로 보는 것은 잘못된 관점임을 지적하였으며, 사고와 언어의 관계를 언어는 사고 도구 과정으로 그리고 사고의 발생은 보다 세련된 언어적 형태를 사용하게 하는 것으로 보고 있다.

3) Radford(2000)는 기호 언어학적-문화적 관점에 따라 대수적 사고를 기호가 중재되어 있는 인지적인 습관으로 파악하였으며, 이러한 관점에 따라 대수적 사고에 대한 분석을 시도하였다.

1999). Sternberg & Ben-Zeev(1996)는 이러한 분석의 필요성에서부터 수학적 사고의 본질을 정보 처리 이론의 관점에서, 그리고 문화적, 교육적, 수학적 관점 등 여러 관점으로 구분하여 논의하고 있다. 일반적으로 대수적 사고는 수학적 사고의 일부분으로서, 일반화된 산술에서, 문제 풀이 절차에서, 관계를 분석하고 기술하는 수단에서, 그리고 수학적 구조를 이해하고 규정하는데서 요구되는 다양한 사고를 포함해서 생각해 볼 수 있다.

한편 대수적 사고는 대수에서 어떤 내용을 포함하느냐에 따라 다양하게 정의된다. 다시 말해 대수적 사고는 대수에서 강조되는 어떤 한 측면에 초점을 두면서, 그 측면에서 요구하는 사고가 무엇이냐에 따라 결정될 수 있다. 예를 들어, 대수에서 추상적인 측면을 강조한다면, 대수적 사고는 알려진 기지의 양을 조작하는 산술적 사고와 대비해서 미지의 양을 추상화하고 조작하는 능력으로 생각해 볼 수 있다. 만약 함수를 대수의 핵심으로 본다면, 대수적 사고는 변수간의 관계를 드러내고, 양적 상황을 표현하는 능력으로 정의할 수 있을 것이다. 이러한 대수적 사고에 대한 정의는 여러 선행 연구에서 논의되어 왔으나, 그 정의를 분명하게 단정적으로 제시한 것은 찾아보기 힘들다. 다만 대수적 사고의 정의 및 방법에 관한 이러한 논의에서 우리가 알 수 있는 것은, 대수 기호가 언제나 대수적 사고의 바탕에 놓여 있는 동시에 대수적 사고에서 핵심적인 역할을 한다는 사실이다. 우리는 대수적 사고에 관한 다음 선행 연구에서 이러한 사실을 확인할 수 있다.

먼저 Mahoney(1980)는 대수의 역사와 현대적 관점을 동시에 고려하면서, 대수적 사고를 연산적인(operational) 기호체계, 수학적 관계와 구조, 추상성과 관련된 내용을 묶어서 포괄적으로 정의하였다(Charbonneau, 1996, p.15, 재인용). 이 정의에서 강조하는 '연산적인 기호체계'는 수학적 관계를 보장하는 동시에 현대 수학의 핵심인 구조를 결정한다는 점에서, 그리고 술어 논리보다 관계 논리에 따르는 대수적 사고를 가능하게 한다는 점에서 무엇보다 중요한 의의를 갖는다. 다시 말해 그는 대수 기호 체계가 대수의 역사에서뿐만 아니라 오늘날에도 대수적 사고의 중심에 있음을 강조하고 있다. Kaput(1992)의 경우, 대수적 사고는 구조와 일반화, 동적 변화를 파악하는 능력으로 정의하였다(Melillo, 1999, p.14, 재인용). 여기에 덧붙여서 그는 대수적 사고를 분석의 한 유형으로 보았는데, 그의 정의는 대수에서의 기호 사용이 분석과 대수적 사고에 어떤 의미를 가지는지를 분명하게 보여준다. 이는 곧 분석에서 요구하는 사고와 언어는 기호를 통해 표현될 때보다 분명해지며, 또한 대수적 사고에서 요구하는 구조와 패턴, 규칙 등을 파악하기 위해서는 무엇보다 기호 사용이 선행되어야 함을 강조한 것으로 볼 수 있다. Bell은 대수적 사고를 대수를 사용하는 방법에 따라 그 내용을 구분하여 제시했는데[4](Bell, 1996), 그 가운데에는 '조작 가능한 기호 언어의 사용'이 명시적으로 드러나 있으며, 그 이외의 내용들 역시 대수 기호가 기본적으로 전제되어야 가능하다는 것을 알 수 있다. 한편 Straley(1992)의 경우 대수와 실세계와의 관련성을 특히 강조하였는데,

4) Bell(1996)은 대수적 사고를 다음에서 제시한 방법들의 조합으로 파악하고 있다: 단계적으로 주어진 것에서 미지의 것을 찾거나 또는 전체를 인식하는 다양한 산술적 관계를 사용해서 복잡한 문제를 해결하기. 다른 형태의 문제에 대해서 일반적이며 체계적인 방법을 사용하거나 공식화하기. 수(기하)의 일반화를 발견하거나 증명하기. 수 체계와 연산에 대한 일반적인 성질을 인식하고 사용하기. 표준적인 함수(일차함수 등)를 인식하고 이름 붙이고, 사용하기. 조작 가능한 기호 언어를 사용하기.

그 가운데 그는 '기호적 대상의 조작'을 통한 탈문맥화와 재문맥화의 과정을 대수적 사고를 가능하게 하는 가장 중요한 요소로 보고 있다[5](Melillo, 1999, p.14, 재인용).

다음으로 대수적 사고 유형에 대한 논의에서 Driscoll(1999)은 그 유형을 세 가지로 구분하여, 함수와 관계에서 요구하는 사고, 연산과 구조에서 추상화하는 사고, 그리고 가역적 사고를 제시하고 있다. 효과적인 대수적 사고는 가역성을 포함해야 한다. 이러한 가역적 사고는 다른 두 가지 유형의 대수적 사고에 적용되어 나타나는데, 우리가 이 과정에서 주목해야 할 부분은 '대수 기호'가 항상 그 바탕에 놓여 있다는 사실이다. 먼저 함수와 관계에서 생각해보면, 관계에서부터 함수 규칙을 발견하는 능력은 대수 기호를 관계 안에서 의미 있게 해석할 때 가능하며, 발견된 규칙 곧 기호로 표현된 함수 규칙을 다시 원래의 관계로 되돌려 생각하는 과정 역시 기호를 재해석할 수 있을 때 가능하다. 다음으로 연산과 구조 측면을 보면, 계산을 추상화해서 구조를 보기 위해서는 오늘날 현대 대수에서 사용하는 기호 체계가 우선 갖추어져 있어야 가능하며, 다시 구조 안에서 연산을 하는 과정에서도 기호 조작은 핵심적인 역할을 수행한다. Charbonneau(1996) 역시 대수적 사고 방법을 설명하는 과정에서 기호 체계의 역할을 강조하는데, 그는 이러한 기호 체계가 의미를 가지기 위해서는 문자에 대한 연산이 의미론에서 해석됨과 동시에 연산을 통해 새로운 대상(objects)으로 정의되어야 한다고 보았다. 이것은 기호 체계가 의미 있는 대수 기호로서 제 역할을 하기 위해서는, 기호가 단순한 연산으로 해석되어서는 안되며, 이보다 더 넓은 맥락에서 관계와 분석을 통해 기호의 의미가 해석되고 그 가운데 대수 기호가 위치해야 함을 강조한 것이다.

이러한 대수적 사고에 대한 논의를 종합하면, 대수적 사고에는 무엇보다 기호 체계가 기본적으로 전제되어 있음을 알 수 있으며, 수학적 관계와 구조, 추상화와 관련된 내용 역시 이러한 기호 체계를 그 바탕에 두고 있음을 알 수 있다. 이와 함께 대수적 사고는 일반화, 동적 변화 등을 파악하는 능력을 요구하는데, 이것 역시 기호적 대상의 조작을 통해 탈문맥화와 재문맥화의 과정을 동시에 볼 수 있을 때 가능하게 된다. 또한 대수적 사고를 관계 측면에서 생각해보면, 대수적 사고는 양들 사이의 일반적인 관계를 추론하고, 이러한 관계에서 나타나는 양적 상황을 이해하는 사고로 볼 수 있는데, 이러한 사고는 언어 곧 기호와 상징적 언어를 도구로 하여 상황을 논의하고, 분해하고 그리고 표현하는 일련의 과정을 통해 획득되는 것이다.

이상의 논의에서 볼 수 있듯이 대수 기호 체계는 대수적 사고를 분석하는 과정에서 핵심적인 역할을 하고 있다. 따라서 기호 언어학적 관점에서 대수적 사고를 분석하기 위해서, 대수 기호가 어떤 식으로 사용되고 있는지에 대한 논의는 대수 학습과 지도에서 우선적으로 제시되어야 할 부분이 된다.

III. 대수 기호의 사용 유형

5) Straley(1992)는 대수적 사고에 대하여 다음과 같이 말하였다(Melillo, 1999, p.14, 재인용). "대수적 사고는 실세계와 대수적 명제 사이의 해석을 가능하게 함으로써 실세계를 바라보는 하나의 방법이다. 기호 모델은 구성되고 그리고 대수의 과정은 기호적 대상을 조작하는데 사용된다. 이 과정에서 기호적 대상들은 일시적으로 그 의미로부터 벗어날 수 있지만, 그러나 그 의미는 어느 시기가 되면 다시 살아나게 된다."

언어는 표현 수단에 따라서, 언어를 구사하는 주체의 특성에 따라서, 교과에 따라서 구분되는 등 다양한 의미를 가지며, 그 결과 번역과 변형의 문제를 낳는다(우정호, 1999). 수학에서 사용하는 형식적 언어는 그 의미에 주목하지 않고 변형 규칙에 따라 어휘나 문장을 구성할 수 있고, 문장의 참 거짓을 판단할 수 있는 언어이다. 여기서 이러한 형식적 언어는 수학에서 사용하는 다양한 기호에 의해서 결정된다. 기호 사용은 수학에서 가장 주요한 속성 가운데 하나로 볼 수 있다. Usiskin(1996)은 수학을 표현하고, 수학적 의미를 서로 교환하는 데 있어서 기호가 가장 중요한 수단이 된다고 말하였다. 또한 Pimm(1991)은 수학에서 가장 분명하고 두드러지는 특징 가운데 하나를 수학의 기호적인 특징으로 보고, 기호의 기능을 수학의 구조를 설명하고, 절차를 간소화시키며, 수학에서 반성적 사고를 가능하게 하는 것 등으로 설명하였다(Rubenstein & Thompson, 2001, p.265, 재인용). 그렇다면 기호는 무엇을 의미하는가? 일반적으로 수학에서 사용하는 기호와 수학적인 표기들은 개념 형성 과정에서 보조물 정도로 여겨진다. 그러나 기호와 그것이 의미하는 바 사이의 관계는 기호 언어학적 문제에서 보면 그 핵심에 놓여 있으며, 따라서 이 글은 기호를 학습에 있어서 단순히 보조물이 아닌 구체적인 구성 성분으로 보고 있다. 이러한 관점은 대수 언어의 구문론적인 구조와 기호의 의미를 이해하는 데 있어서 대수 기호를 보다 분석적으로 그 유형에 따라 살펴볼 것을 요구하며, 이러한 분석의 결과는 각각의 대수 기호 유형에서 학생들이 경험하는 어려움을 해석하는데 도움을 줄 것이다. 이와 함께 학생들에게 수학을 이해시키고, 풍부한 수학적 경험을 제공하기 위해서는, 무엇보다 대수 기호 사용이 우선되어야 한다. 그러나 정작 학생들은 중등 이후 학교 수학에서 대수 기호로 인하여 많은 어려움을 경험하는 것이 현실이다. 교사에게 의미 있는 대수 기호라 하더라도 학생들에게는 이러한 기호가 친숙한 개념으로 다가가지 못하는 경우가 발생한다. 따라서 학생들은 대수적 사고를 표현하고 대수를 사용하거나 또는 대수적 아이디어를 확장하기 위해, 대수 기호를 말해야 하고, 읽고, 써야 하는 상황에 부딪히게 된다. 이처럼 표준화된 대수 기호를 사용하여 의사소통을 할 수 없는 학생들은 그로 인하여 학습 과정에서 많은 장애를 경험하게 되는데, 이러한 경험은 중등 이후 학습하게 되는 수학 전반에 영향을 미치게 된다. 따라서 우리는 '대수 기호가 실제로 어떻게 사용되는가?'라는 물음과 함께 대수 기호의 사용 유형과 방법을 구분하고 그 구분에 따라 지도할 필요가 있을 것이다.

다음 <표 1>은 이러한 필요에서부터 기호 사용을 6가지 유형으로 나누고(Rubenstein & Thompson, 2001), 각 유형에서 대수 기호가 어떻게 사용되는지를 교과서에 제시된 예를 통해 살펴본 것이다. 이러한 구분은 학교 현장에서 대수 기호가 어떻게 사용되는지를 논의하고, 그리고 각 유형에서 발생하는 어려움을 분석하는데 기초 자료가 될 것이다.

<표 1>의 첫 번째 것은 개념을 명명하는데 기호가 사용되는 것으로, 기호 언어학에서 보면 이것은 기호의 명사적 역할에 해당한다. 예에서 제시한 문자 x는 '시간 수'를 나타내는 것으로 개념을 명명한 경우에 해당한다. 두 번째 경우는 이러한 개념들 사이의 관계를 나타내기 위해 기호가 사용된 것으로, 이것은 기호의 동사적 역할에 해당하며, 기호는 수학적 문장 곧 관계 가운데에서 표현된다. <표 1>에서 제시한 일차방정식은 등호라는 기호를 통해 관계가 형성된 것으로 볼 수 있다. 세 번째와 네

<표 1> 대수 기호의 사용 유형

사용	예
개념의 이름	(중학교 수학1, 두산, p.94) 한 시간에 4㎞씩 걸을 때 걸은 거리는 걸린 시간에 따라 4×(시간 수) (㎞)로 구할 수 있다. 이 때 '시간 수' 대신 문자 x를 사용하면 x 시간 걸은 거리는 $4\times x$ (㎞)로 나타내어지고...
관계의 설명	(중학교 수학1, 두산, p.114) "어떤 수 x와 3의 합이 7"이라는 말은 "$x+3$이 7과 같다"는 뜻으로 이것을 등호 $=$를 사용하여 $x+3=7$과 같이 나타낸다.
하나의 값을 갖는 연산이나 함수의 표현	(중학교 수학3, 두산, p.40) n을 양의 정수라 할 때, $\sqrt{20n}$이 정수가 되도록 하는 n 중에서 최소인 n을 구하여라.
둘 또는 그 이상의 값을 갖는 연산이나 함수의 표현	(공통수학, 금성교과서, p.183) 함수 $f(x)=3x-2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $(g\circ f)(2)$와 $(f\circ g)(2)$를 구하여라.
단어, 단위, 정리 등의 약어	(공통수학, 금성교과서, p.93) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 $D=b^2-4ac$의 부호만 가지고도 실근인지 허근인지를 판별할 수 있으므로 $D=b^2-4ac$를 이차방정식의 판별식이라 한다.
그룹화의 표현	(공통수학, 금성교과서, p.219) 다음 지수 부등식을 풀어라. (1) $3^{2x-1}>27$

번째 구분은 연산자로서 기호를 사용한 것으로, 이들을 구분하자면 세 번째 것은 단일한 연산자(근호)를 포함하며, 네 번째 것은 두 개 이상의 값을 갖는 연산이나 함수(f, g, $\circ$)를 표현하는 것이다. 이런 경우 기호 언어는 연산자를 통하여 수학적인 어구가 된다. 다섯 번째 경우는 기호를 사용해서 수학적 문장을 간략하게 나타낸 것이다. 예에서 제시한 판별식에 대한 기호 D는 이러한 경우에 해당한다. 이 경우 학생들은 그 간략화가 무엇을 의미하는지 알고 있어야 하고, 이러한 약속을 대수 문제에서 수행할 수 있어야 한다. 여섯 번째 경우는 암묵적인 그룹화의 표현으로, 여기서 기호들은 구두점(punctuation) 역할을 한다. <표 1>의 지수 방정식에서 $2x-1$은 지수에 해당하는 것으로 묶어서 하나로 생각해야 한다. 이처럼 수학적 언어에서 그룹화의 기호들은 명백하게 드러날 수도 있고 아닐 수도 있다.

대수 기호 사용과 관련된 어려움은 <표 1>에서 제시한 유형에 따라 각기 다르게 나타난다. 예를 들어, $\log xy$ 와 같이 로그 기호에 의해 간접적으로 제시된 암묵적인 그룹화는 계산기에 입력할 때는 $\log,(,x,y,)$의 순서로 입력되어야 하고, 이것은 괄호가 암묵적으로 제시되어 있음을 나타내는 것이다. 학생들은 변환하거나 수치를 구하는 상황에서 그룹화의 기호를 바꾸는데 실패하기 때문에, 간접적이거나 암묵적인 그룹화에서 종종 어려움을 겪게 된다.

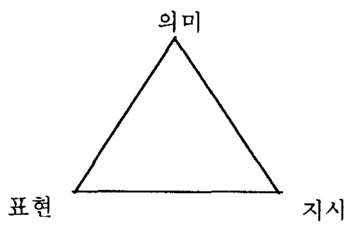
이와 함께, 학생들이 대수 학습에서 어려움을 겪는 주된 이유 가운데 하나는 학습 내용이 수에 관한 비교적 구체적인 내용으로부터 문자 기호를 다루는 추상적인 내용으로 급속하게 전환되기 때문이다. 위에서 제시한 <표 1>에서 우리는 어떤 부분들은 초등 수학에서부터 사용되어온 기호의 의미를 이후 대수 학습에서 계속해서 사용하면서 그 연결성을 유지하지만, 반면에 중등 이후 많은 기호들을 새롭게 도입해서 사용하고 있음을 알 수 있다. 이처럼 기호는 어떤 경우는 확장되며 어떤 경우는 단절되며 또 다른 경우에는 새롭게 도입되면서 학습과정에서 사용되기 때문에, 기호 사용 및 그 유형을 파악하는 데는 자연스럽게 어려움이 따른다. 예를 들어, <표 1>에서 제시한 문자 기호의 사용 범주에서, 교과서 예는 개념의 이름에서 그룹화의 표현까지 그 사이에는 일정한 수

준의 차이가 있음을 보여준다. 다시 말해 개념의 이름, 관계의 설명으로 사용된 문자는 대수 학습의 초기 단계에서부터 도입되어 그 이후에도 계속 사용되는 유형인 반면, 연산과 함수의 표현, 약어화된 문자 사용, 그리고 그룹화의 표현 등은 학습 수준이 높아지면서 새롭게 추가되고 그 사용 빈도가 증가하는 유형으로 볼 수 있다. 따라서 중등 수학 이후 강조되는 대수 기호의 사용은 그 사용 유형에 따라 이전 학습과 연결해서 지도하거나, 경우에 따라서 새롭게 도입하는 내용은 그 규칙을 새롭게 결정해서 지도하는 등 다양한 지도 방법이 고려되어야 한다.

우리는 2장을 통해 다양한 대수적 사고의 정의에서 대수 기호가 핵심적인 역할을 하고 있음을 논의하였다. 그리고 이러한 대수 기호가 사용 유형에 따라 다양하게 구분될 수 있음을 3장의 논의를 통해 살펴보았다. 이제 이러한 논의를 토대로 Frege의 아이디어에서부터 이러한 대수적 사고 과정을 분석하기 위한 모델을 제시하고, 이 모델을 통해 학생들에게 대수적 사고가 왜 어려운지 그리고 대수적 사고가 어떤 과정을 거쳐 역동적으로 나타나는지에 대하여 살펴볼 것이다.

Ⅳ. 대수적 사고 과정 분석

대수적 사고는 그 자체로 표현이 가능하면서 형식화된 대수 기호와 분리되지 않은 상태에서 인지된다. 또한 대수 기호는 그 사용 유형에 따라 대수에서 서로 다른 역할을 하게 되는데, 이 과정에서 대수 기호 사용은 각기 다른 어려움을 직면하게 된다. 그렇기 때문에 대수적 사고의 역동성을 대수 기호와 관련해서 전체적으로 파악하는 것은 결코 쉬운 일이 아니다. 이 글은 이러한 어려움을 해결하기 위해 곧, 대수적 사고 과정의 역동성과 오개념을 설명하는 도구를 제시하고 그리고 대수 기호 표현에 대한 의미를 이론적으로 보다 분명하게 분석하기 위한 방안으로 기호 언어학적 관점에서 '대수적 사고 과정 분석 모델'(Arzarello 외 2인, 2001)을 제시하고 있다. 이 모델은 Frege(1892, 1918)의 의미론적 삼각형(semiotic triangle) 아이디어에서 비롯된 것으로, 대수의 기호적인 표현을 해석하고 대수적 사고 과정을 분석하기 위해 대수 기호를 의미, 기호 표현, 그리고 지시 대상으로 구분하여, 이들 사이의 관계를 삼각형으로 표현한 것이다(Arzarello 외 2인, 2001, p.63, 재인용).



<그림 1> Frege의 의미론적 삼각형
(대수적 사고과정 분석 모델)

<그림1>에서 삼각형의 세 꼭지점은 의미(sense), 표현(expression), 지시(denotation)로 구별된다. 어떤 표현에 있어서 지시는 표현이 지시하는 대상을 의미하며, 반면에 의미는 대상이 마음에 심어지는 방식 곧 표현에 의해 나타나는 사고를 말한다. 대수적인 표현에서 그 의미는 표시된 대상을 나타내는 계산 규칙들에 따르거나 또는 의미가 획득되는 방식에 의해 분명하게 드러난다. 대수의 역동적인 사고 과정은 각 요소들 간에 이루어지는 상호 작용으로 해석할 수 있을 것이다.

대수적 사고는 구문론적인 조작, 곧 같은 식

을 기호 조작에 의해 결합하는 방법과 형태에 의해 결정된다. 이러한 기호 조작은 문제에 따라, 상황에 따라 다양하게 파악되며, 이러한 복잡성 때문에 실제 학습에 있어서는 대수 기호가 모호한 상태로 파악되기 쉬우며, 결국 학생들에게 전달되는 대수 기호와 대수적 사고는 의미, 지시, 표현이 엇갈린 형태로 나타나게 된다. 우리는 <표 2>에서 대수적 사고 과정에서 일어나는 이들간의 상호 작용을 변하는 것과 변하지 않는 것으로 구분하고, 각각의 유형을 의미론적 삼각형 내부에서 일어나는 세 요소간의 변화를 통해 살펴보았다. 다시 말해 우리는 대수적 사고 과정 모델을 분석함으로써 대수적 사고에서 일어나는 많은 어려움에 대하여 그 과정 및 원인을 생각해 볼 수 있을 것이다. 여기에서 우리는 대수 기호의 구문론적 조작 과정 및 원인을 생각해 볼 수 있을 것이다. 여기에서 우리는 대수 기호의 구문론적 조작과 의미 사이에서 일어나는 불균형을 대수적 사고를 어렵게 하는 주된 원인으로 보았으며, 그리고 기호 표현의 외연과 내포가 사고 과정에서 유기적으로 연결되지 못한 채 기호 조작으로 일관하는 학습 형태를 의미론적 삼각형의 붕괴로 보았다. 다음 <표 2>는 이러한 예를 교과서에서 찾아본 것이다.

첫 번째 경우는 의미와 지시가 식에서나 또는 표현에서 상응하는 변화 없이 다르게 해석되는 경우이다. 곧 같은 표현에 대하여 의미와

<표 2> 대수 기호와 의미, 지시, 표현간의 불균형

의미, 지시, 표현간의 관계	예	해석
의미와 지시는 다르지만 표현은 같다	(고등학교 공통수학, 금성교과서, p.103) 다음 미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀어라. $5x+y-7=0,\ y=2x$ (고등학교 공통수학, 금성교과서, p.141) 다음 두 직선의 교점을 구하여라. $3x-y-14=0, 2x+y+6=0$	동일한 표현, 곧 두 개의 일차식($5x+y-7=0,\quad y=2x$)을 제시하고, 그 의미를 연립일차방정과 두 개의 직선으로 해석할 경우, 그 지시는 다르게 나타난다.
의미와 표현은 다르지만 지시는 같다	(고등학교 공통수학, 금성교과서, p.188) 다음 이차함수의 그래프를 그려라. $y=-x^2+4x+5$ (고등학교 수학Ⅱ, 지학사, p.59) 점 $(1,4)$에서 포물선 $x^2=-2y$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.	동일한 지시 대상, 곧같은 그래프에 대하여, 의미와 표현을 달리하여 이차함수($y=-x^2$)를 의미하기도 하고, 포물선($x^2=-y$)을 의미하기도 한다.
의미와 지시는 같지만 표현은 다르다	(고등학교 수학Ⅱ, 지학사, p.32) 일차변환 f의 변환식이 $x'=x+3y,\ y'=-2x+y$ 일 때, 이를 행렬로 나타내면, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 이다.	동일한 의미와 지시를 갖는 일차변환을 변환식과 행렬로 다르게 표현하였다.

지시가 다르게 나타는 것으로, <표 2>에서 동일한 두 개의 일차방정식에 대하여 그 의미와 지시는 연립일차방정식과 직선의 방정식으로 다르게 나타난다. 다른 예를 보면, 정수론에서 $n(n+1)$은 두 개의 연속하는 정수의 곱이라는 의미를 갖는 반면, 초등 기하학에서는 변의 길이가 n, $n+1$인 직사각형의 넓이를 의미할 수도 있다. 대수 기호의 조작은 학습 수준에 따라 동일한 표현에 대하여 다른 해석과 지시 대상을 필요로 할 때가 많으며, 이런 경우 학생들은 기존에 학습한 내용과의 유사성과 차별성을 구분할 수 있어야만 대수 기호에서 서로 다른 의미, 지시에 따라 동일하게 표현되는 현상을 이해할 수 있게 된다.

두 번째 경우는 대수적인 변환에 따라 다른 대수적인 의미와 표현을 갖지만, 반면에 같은 지시를 갖는 경우이다. 대수식의 변환에서 $n(n+1)$과 n^2+n은 그 의미(일차식의 곱과 이차식)와 표현은 다르지만 같은 지시 대상을 나타낸다. 또한 <표 2>에서 제시한 예는 동일한 지시 대상(그래프)에 대하여 그 표현 ($y=-x^2$, $x^2=-y$)을 달리하면서 의미(이차함수, 포물선)까지 다르게 해석하는 경우인데, 문제는 학생들이 표현과 의미의 차이로 인해 지시 대상마저 다르게 해석할 경우 같은 문제를 다르게 해석함으로써 그 적용의 범위가 제한된다는 데 있다.

세 번째로 같은 지시를 갖는 두 개의 표현은 대수적인 변환에 의해 그 의미가 항상 변하는 것만은 아니다. 곧, 표현은 다르지만 의미와 지시는 같게 나타나는 경우이다. 이 경우는 대수에서 가장 흔하게 등장하는 것으로, 구문론적 조작에 의해 표현의 변화는 일어나지만 그 가운데 의미와 지시 대상은 동일하게 유지되는 경우이다. 대수에서 학생들에게 주로 강조되는 내용이 이러한 구문론적 규칙이지만 실제로 학생들은 표현이 달라지면 그 의미와 지시까지 변하는 것으로 생각하게 되고, 따라서 각기 다른 표현들을 다른 의미로 해석하기 때문에 대수적 사고 과정에서 자주 혼란을 겪게 된다.

이와 함께 생각해볼 수 있는 것은 대수적인 변환에 따라 지시, 의미, 표현이 각기 다르게 변하는 경우를 들 수 있다. 그 예로는 매개변수[6]와 관련된 문제에서 매개변수가 경우에 따라 변수로, 상수로, 미지수로 그 역할을 달리하는 경우를 들 수 있는데, 각각의 경우에서 매개변수는 표현과 의미, 지시 사이에서 서로 다른 변화를 보이게 된다.

따라서 <표 2>에서 제시한 것처럼 의미, 지시, 표현 사이의 이러한 불균형은 대수식을 어떤 일정한 형태로 받아들이는 것을 방해하면서 동시에 오개념을 낳는 원인이 된다. 이러한 불균형은 한 개의 표현에 가능한 의미들이 내포적인 양상(intensional aspect)으로 구성되는 데 비해, 어떤 영역 안에서 그것의 지시는 외연적인 양상(extensional aspect)에 의해 표현되기 때문에 비롯된다. 이것은 표현이 가질 수 있는 의미의 다양성이 대수적 언어가 가지는 표의 문자적인 특징으로 인해 더욱 분명하게 나타나는데, 대수식의 경우 이러한 특징이 직접적인 방식으로 나타난다. 이러한 각각의 대응을 인식하는 것은 보다 높은 정신 작용을 요구하는 것으로, 기호 표현의 경우 그 형식과 이에 수반된 각기 다른 대상들 사이의 관계에서부터 서로 다른 의미를 형성하고 있는데, 대수에서

6) 고등학교 수학을 학습한 학생들에게 있어서 보통 매개변수는 한 가지 의미 곧, 곡선 및 곡면을 표현하기 위한 수단으로 받아들여진다. 그러나 매개변수는 사실 다양한 형태로 등장하며 그 해석 또한 다양하게 주어지는데, 예를 들어 기울기와 절편으로 표현된 직선방정식의 일반형인 $y=mx+b$에서 m과 b는 매개변수로 해석될 수 있다. 여기서는 매개변수를 후자의 경우로 보고 있다.

의 기호 표현은 이러한 과정 모두를 직접적인 방식으로 포함한다. 대수 기호 사용과 관련해서 대수의 의미론에서 나타나는 이러한 어려움은 수치적인 표현과 비교해볼 때 더욱 분명하게 대비된다. 산술의 경우, 의미와 지시 사이의 불균형이 존재하지 않기 때문에 실제로 의미와 지시, 표현은 동일하게 파악된다. 사실 수치적인 표현은 항상 분명한 수로 표시되고, 그 의미는 실제로 유일하다고 할 수 있다. 따라서 산술적인 표현에서는 각 경우마다 하나의 해석이 하나의 의미를 갖게 되지만, 이에 비해 대수적인 표현은 일반적으로 각 경우마다 다른 방식으로 해석되어지며, 앞서 <표 2>에서 보았듯이 문제 상황에 따라 기호 표현은 서로 다르게 해석된다.

이러한 분석의 결과를 대수 학습에 적용해서 생각해보면, 대수 학습 과정은 기호 표현에 있어서 형식(표현)과 대상(지시), 그리고 의미를 구분하면서 동시에, 이들간에 나타나는 불균형을 정직하게 보여주는 것을 필요로 한다. 이와 함께 대수 학습에서 형식적인 의미론을 사용하기 위해서는 무엇보다 많은 주의가 요구되며, 기호 표현에 따라 내포와 외연을 정확하게 구분 짓는 것은 특히 대수 학습에서 중요하게 다루어져야 한다. 이것은 수학의 특징을 정확하게 파악할 때 가능하다. 수학은 외연성 공리의 가정에 기초하는 동안 모든 내포적인 양상이 단절된 상태로 나타나고, 그 결과 내포적인 양상에 상관없이 수학적인 대상이 불변성을 띠는 것처럼 보인다. 그 예로 전문 수학자들의 경우 그들이 사용하는 수학적인 언어는 내포적인 양상을 정의 등을 통해 명확하게 드러내지 않고도 자연스럽게 증명 과정을 따라가면서 전개된다. 그러나 그들이 자신의 명제에 불변성을 부여한다고 해서, 실제로 외연을 가정하는 동안 이에 따르는 내포적인 양상을 전적으로 배제하고 있는 것은 아니다. 그럼에도 불구하고 학교 대수에서 학생들이 배우는 내용은 각각의 외연적인 양상에 따르는 표현으로 제한되어 제시되고 있다. 다시 말해 수학자들이 수학을 발견하고 증명하는 과정은 학생들과 다름에도 불구하고, 학생들에게 가르쳐지는 수학은 수학자의 과정으로 지도되고 있으며, 그 결과 학생들이 수학을 이해하는 것은 사실상 불가능하게 된다. 결국 이러한 대수 기호의 사용, 곧 내포를 파악하지 못한 상태에서 외연만을 강조하는 기호 학습은 학생들에게 오개념을 심어주는 주요한 원인이 된다[7]. 따라서 많은 대수적인 어려움은 지시의 불변성만을 강조하는 대신 그에 따르는 다양한 의미와 그리고 그 의미를 파악하는 방법을 학생들에게 정확하게 제시할 때 극복될 수 있을 것이다. 그러나 그렇다고 해서 다른 한편으로 의미, 지시, 표현 사이에 존재하는 일대일 대응을 지나치게 강조한다면 이러한 구분 역시 또 다른 오개념을 낳는 원인이 될 것이다. 왜냐하면 이러한 대응을 정확하게 파악하기 위해서는 복잡한 관계를 필요로 하는데, 학생들은 이러한 관계를 피하기 위해 이 세 가지를 하나로 동일시해서 보려 하기 때문이다. 그리고 결국 그들에게 남는 것은 지시로 제한된다. 그 결과 학교 대수에서 기호 표현은 의미 없는 기호의 모임으로 존재하게 되고, 학생들은 대수를 구문론에 따라 좌우되는 것으로 생각하게 된다. 이는 곧 Frege의 의미론적 삼각형의 붕괴를 뜻하는 것으로, 의미, 지시, 표현이 유기적으로 연결되지 못하고 불균형을 이루

7) Sfard(1995)는 이와 비슷한 맥락에서, 형식적인 기호 개념을 의미론적인 입장에서 포기할 것을 그 자신이 정확하게 알고 있으며 또한 포기한 의미를 적절할 때마다 완벽하게 다시 되살릴 수 있는 경우에 사용 가능한 것으로 보았으며, 학생들의 경우 기호를 사용하면서 이처럼 의미를 포기하고 되살리는 것에 대한 인식이 힘들기 때문에 어려움에 놓인다고 보았다.

게 됨을 의미한다[8].

이처럼 의미론적 삼각형 모델은 의미, 지시, 표현 사이에서 나타나는 대수적 사고의 어려움을, 이들 사이의 불균형에 의해 일어나는 것으로 설명하고 있다. 이와 함께 대수적 사고과정 분석 모델은 대수적 사고의 역동성을 설명하는데 적용될 수 있다. 대수적 사고는 결코 정적인 상태에서 파악되는 것이 아니다. 대수적 사고의 역동성은 앞서 논의했듯이 대수 기호의 다양한 사용과 함께 상황에 따라 변하는 의미, 지시, 표현과도 관련이 있으며, 이것은 대수적 사고의 어려움을 야기시키는 또 다른 원인으로 볼 수도 있다. 먼저 대수적 사고의 역동성을 설명하기 위해 앞서 제시한 Frege의 의미론적 삼각형과 함께 '개념적 틀(conceptual frame)'에 대하여 살펴보자(Arzarello 외 et al., 2001). 지식은 조직된 개념들의 집합으로 볼 수 있다. 여기에는 수학적인 대상들, 특성들, 전형적인 알고리즘, 그리고 일반적으로 논의되는 전략 등이 포함되어 있다. 학생들은 문제를 해결하는 동안 자신의 지식에 따라 추론하고, 공식을 조작하고, 결과를 예상하기 위해 다양한 방법을 동원한다. 학생들은 문제를 해결하기 위해 식의 의미를 조작하고 해석하면서 그 의미를 연결한다. '개념적 틀'의 정의는 이러한 과정에서 그들이 사용하는 조직된 지식들의 집합과 가능한 행동들을 모두 포함한다. 학생들은 주어진 과제를 해결하기 위해 문제 해결 과정에서 다양한 개념적 틀을 연결한다. 이 과정에서 학생들은 문제 상황과 관련해서, 자신의 사고와 활동을 중재하기 위해 기호 체계를 사용하게 된다. 기호 사용과 함께 학생들은 문제를 해결하기 위한 모든 대상으로부터 그 의미를 추출하게 되며, 이 과정은 서로 다른 '개념적 틀'이 각 단계마다 연결되면서 이루어진다. 다음 문제 1에서 그 해결 과정은 어떻게 개념적 틀이 변화하면서 문제가 해결되는지를 보여주고 있다[9].

문제 1: 연속하는 홀수 개의 수의 합에서 발견되는 규칙에는 무엇이 있는가?

수준 1: 학생 A는 먼저 연속하는 세 수의 합을 구해본다. $1+2+3=6$, $2+3+4=9$, $3+4+5=12$,..., $10+11+12=33$ 등에서 연속하는 세 수의 합이 3으로 나누어짐을 확인할 수 있다. 그러나 수준 1에서 학생A는 문자 기호를 사용하여 자신의 답을 확인하지 못하고, 계속 3으로 나누어질 수 있음을 실제 계산을 통해 확인한다. 이 풀이는 불완전한 귀납의 논리를 통해 확보된다. 물론 이러한 결과가 정당성을 확보한 것은 아니다. 다시 말해 수준 1에서 학생A는 자신이 행한 수를 넘어가는 경우에 있어서 세 수의 합을 다시 확인함으로써 자신의 결론을 다시 정당화한다.

수준 2: 수준 1에 근거해서 학생 A는 모든 연속하는 세 수의 합은 3으로 나누어진다는 결론을 내린다. 학생 A는 이제 이러한 사실을 수에서 나온 결과를 토대로 하여 문자 기호를 사용하여 확인하려 한다. 만약 세 수에서 가운데 수를 n이라고 하면 다른 두 수는 $n-1$, $n+1$이 될 것이다. 그리고 그 합 $(n-1)+n+(n+1)$은 $3n$이 된다. 이것은 3으로 나누어진다. 이 단계에서 학생 A는 일차적으로 하나의 특별한 경우 곧, 연속하는 세 수의 합에 있어서 문자 기호를 통해 자신의 결과를 정당화시켰다. 그러나 다른 경우 즉, 다른 연속하는 5개, 7개의 수

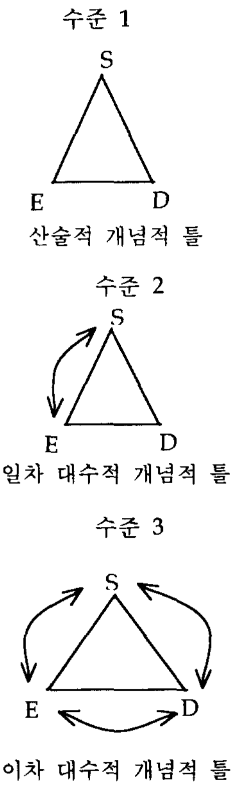
8) 이러한 설명은 Sfard(1991)에게서도 찾아볼 수 있다. 그녀가 사용한 secondary process라는 용어는 기호로 된 지시의 동일화 때문에 순수하게 구문론적 규칙으로 존재하게 된 경우를 뜻하며, 그녀는 그 결과 학생들이 pseudo structural 상태에 빠지게 된다고 보았다.

9) 문제와 풀이 과정은 Driscoll(1999, p.69)에서 인용하였으며, 이 글은 그가 제시한 풀이 과정을 개념적 틀의 변화에 따라 구분하여 적용한 것이다.

에 대해서는 이와 유사한 결론 곧, 각각이 5로 나누어지고, 7로 나누어진다는 결론을 내린다 하더라도, 수준 2에서는 이러한 서로 다른 경우 모두를 문자 기호를 사용하여 일반화해서 표현하지는 못한다.

수준 3: 이 단계에서 학생A는 이제 수준 2의 과정을 뛰어넘어 한 단계 높은 일반화를 시도하기 위해 보다 복잡한 문자 기호를 사용한다. 먼저 연속하는 m(m은 홀수)개의 수의 합을 N으로 놓고, N이 m으로 나누어지는가를 확인해보고자 한다. 학생은 N을 m으로 나누고, 그 결과를 k라고 가정한다. 그리고 m은 홀수이기 때문에, 연속하는 m개의 수 $\ldots k-1,\ k,\ k+1 \ldots$을 언제든 구할 수 있음을 확인한다. 그리고 $N = mk$임을 통해 가정 곧 N이 m으로 나누어짐을 확인한다. 이 수준에서 학생A는 문자 기호 사용에 있어서 수준 2의 일차적인 수준을 넘어 보다 복잡하고 많은 문자 기호를 사용함으로써 문제에서 요구하는 답을 일반화하여 정당성을 확보한다.

위에서 제시한 각각의 단계에서 학생A는 다음 <그림2>에서 보듯이 세가지 '개념적 틀'을 연결해서 문제를 해결하고 있다[10].



<그림2> 문자 기호 사용에 따른 개념적 틀의 변화

첫 번째 개념적 틀은 산술 과정에서 진행된 것으로, 이 단계에서는 정형화된 문자 기호 대신 오직 산술에서 요구하는 일관된 의미론에 따라 풀이가 이루어진다. 또한 그 결과에 대한 정당화를 요구받을 경우 계속해서 산술 연산만이 적용된다. 이러한 과정은 다음 단계에서 진행될 과정을 뒷받침하는 주요한 자료가 된다.

두 번째 개념적 틀은 문자 기호의 사용으로 시작된다. 첫 번째 단계의 개념적 틀이 정당화의 문제에서 문제 상황을 설명하지 못하기 때문에 개념적 틀은 변화되었으며, 문제에 대한 접근 역시 변화가 일어났다. 이제 추론은 문자 기호를 어떻게 사용할 것인가 곧, 연속하는 세 수를 어떻게 놓을 것인가로 이어지고, 그 과정에서 문자 기호의 표현과 의미는 구체성을 띠게 된다. 그러나 문제 전체의 의미를 해석하는 데 있어서는 아직 불완전한 개념적 틀을 보유하고 있으며, 이것은 문제에서 요구하는 지시 대상을 정확하게 파악하지 못한 것으로, 이러한 불완전성은 다음 단계에서 새로운 문자 기호의 도입과 함께 해결된다.

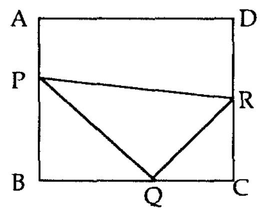
세 번째 단계에서 문자 기호를 사용하는 대수적 사고는 갑작스런 도약을 맞이한다. 문자 기호는 문제 해결을 위한 일련의 조작과 추측, 증명 등이 결합되면서 의미를 갖게 된다. 이 단계에서 사용되는 개념적 틀은 문자 기호의 의미, 지시 관계를 사고 도구로 사용하면서, 내

포적인 양상과 외연적인 양상이 모두 표현된다. 곧 연속하는 수의 개수(m)와 합(N)이 문자 기호로 표현되고, 그 가운데에서 문제를 해결하는 실마리가 N이 m으로 나누어지는가에 따라 결정된다는 사실을 확인하고, 그 과정을 다시 문자(k)를 써서 나타낸다. 수준 3에서 사용한 문자 기호는 수준 2에서 발견한 문자 기호보다 일반적인 범위로 확장된 것으로, 문제 해결 과정 전반에서 의미, 지시 등과 함께 유기적으로 결합되어 나타난다.

이처럼 문제 해결 과정에서 문자 기호는 두 가지 방법에서 사고 도구로서 의미를 가진다. 먼저 문자 기호가 지시를 가정하고 그에 따라 예상되는 의미와 결합될 때, 곧 형태를 만들기 위하여 형식적인 조작이 지시적인 양상과 깊은 관련을 만들 때, 문자 기호는 사고 도구로 사용된다. 이것은 가정된 외연(지시)에 따라 문자 기호의 내포를 변환시키는 것으로, 위의 수준 3에서 N으로 표현된 합이 궁극적으로 mk로 표현되는 것을 그 예로 들 수 있다. 두 번째는 문자 기호는 형식적 조작을 하지 않으면서 새로운 외연(지시)과 동시에 새로운 내포(의미)를 발견하면서 사고 도구로서 역할을 한다. 그 예로 수준 2에서 n으로 표현된 문자와 수준 3에서 k로 표현된 문자를 들 수 있다. 문자 기호의 내포와 외연은 하나 혹은 그 이상의 개념적 틀에서 구현되면서 나타나기 때문에 이러한 변화들은 항상 일어나는데, 그에 비해 이 변화를 정확하게 파악하는 것은 쉽지 않다. 이처럼 대수적 사고 과정의 역동성은 대수 기호와 함께 나타나는 개념적 틀의 변화를 통해 설명이 가능하다.

대수 기호를 전제로 하고 있는 학교 대수에서 대수적 사고의 역동성은 많은 문제에서 요구된다. 이는 곧 문제에서 의미, 지시, 표현 사이의 결합을 유기적으로 인식하고 그 과정에서 일어나는 개념적 틀의 변화를 인식할 때 문제가 해결됨을 의미한다. 개념적 틀은 학습 수준이 높아짐에 따라 보다 높은 수준의 내용들과 연결되고, 이 과정은 학생들은 개념적 틀의 변화를 의미한다. 중등 이후의 수학은 대수 기호의 사용으로 인하여 다른 어떤 도구를 사용할 때보다 이러한 개념적 틀의 변화를 인식하는 것이 강하게 요구되는데, 대수에서 이러한 개념적 틀의 변화는 수학을 이해하는 주요한 수단이 된다. 한 예로 고등학교 공통수학(조태근 외 6인, 금성교과서, p.204)에 나오는 다음 문제에서 이러한 개념적 틀의 변화를 살펴 볼 수 있다[11].

문제 2: 한 변의 길이가 2 m인 정사각형 ABCD의 변 AB, BC, CD 위에 점 P, Q, R 을 $\overline{AP}=x$, $\overline{BQ}=2x$, $\overline{CR}=3x$가 되게 잡을 때, △PQR의 넓이를 최소가 되도록 하는 x의 값을 구하여라.



이 문제에서 처음 등장하는 개념적 틀은 삼각형 넓이의 최소값을 구하기 위해 그 넓이를 문자 기호로 나타내려는 시도에서 비롯된 것이다. 그러나 이 문제를 해결하기 위해서 다음

11) 문제 1에서는 문제 내에서 이루어지는 문자 기호의 사용 여부에 따라 그 개념적 틀의 변화를 기술하였으며, 이에 비해 문제 2는 문자 기호가 전제된 상태에서 문제 해결에 사용된 주제에 따라 개념적 틀을 구분한 것이다.

단계는 넓이로 표현된 식을 이차함수의 최소값을 구하는 문제로 해석해야 하며, 이 변화에서 개념적 틀은 삼각형의 넓이에서부터 이차함수로의 변화를 요구한다. 그리고 이 문제는 이차함수의 최소값을 완전제곱식의 변형을 통해, 그 표현은 바꾸면서 의미와 지시는 그대로 살려둠으로써 해결할 수도 있겠지만, 또 다른 개념적 틀인 미적분학에서 이차함수의 극대·극소를 구하는 방법을 이용해서 문제를 해결할 수도 있을 것이다.

삼각형의 넓이를 구하는 문제	문제 이해를 위한 개념적 틀
이차함수의 최소값을 구하는 문제	문제 해결을 위한 개념적 틀 I
미적분학에서 함수의 극값을 구하는 문제	문제 해결을 위한 개념적 틀 II

<그림 3> 주제에 따른 개념적 틀의 변화

결국 <그림 3>에서처럼 문제 2는 문자 기호를 이용해서 넓이를 구하는 식에서부터 시작해서 이차함수로 그리고 마지막에는 미적분학으로 개념적 틀이 변하면서 해결된다[12]. 따라서 문제 해결에서 중요한 것은 학생들이 그 외연의 변화와 더불어 의미의 변화를 동시에 수용할 때 곧 각각의 단계에서 문제 해결을 위한 개념적 틀의 변화를 파악하는 단계에서 문제가 성공적으로 해결되는가 그리고 학생들의 대수적 사고는 활성화되는가 하는 것들이다.

위에서 제시한 문제 1, 2를 통해 우리는 대수적 사고의 역동성이 대수 기호에서 의미, 표현 그리고 지시 사이의 관계(Frege의 의미론적 삼각형)와 개념적 틀의 활동, 개념적 틀의 상호작용에 따라 파악될 수 있음을 살펴보았다. 이처럼 대수적 사고 과정에서 역동적 측면은 어떤 틀 안에서 혹은 하나의 틀에서 다른 틀로의 변화 안에서, 의미론적 삼각형이 수정되어 가는 방식을 통해 설명될 수 있다. 예를 들어 높은 수준의 대수적 사고를 하는 학생들 가운데 몇몇은 그 틀로서 일상 언어의 코드를 사용하는데, 이런 경우 그들은 보통 학생들이 사용하는 대부분의 개념적 틀을 단축하면서 마지막의 것으로 바로 나아가는데, 이 과정에서 단축된 틀이 다양한 방식을 통해 완전한 의미를 가진 상태로 보존되는 것을 볼 수 있을 것이다[13].

대수 기호와 관련해서 살펴본 대수적 사고 과정은 단순한 기호 표현에서와 같은 단일한 요소에 따라 결정될 수 있는 것이 아니다. 대수적 사고는 기호 표현과 함께 의미, 지시가 상호 작용에서 변하는 것과 변하지 않는 것이 동시에 드러날 때 파악될 수 있는 성질의 것이다. 또한 이 과정은 개념적 틀의 변화를 요구하는데, 대수적 사고 과정은 이러한 측면에서

12) 이 과정에서 대수적 사고 과정 분석 모델, 곧 의미, 표현, 지시간의 관계는 문제 내용에 따라 개념적 틀이 변할 때마다 새로운 모델로 전개된다. 이것은 앞서 문제1의 경우, 동일한 개념적 틀에서 의미, 표현, 지시간에 이루어지는 상호작용과는 다른 양상을 띠는 것으로, 각 단계에서 완전히 새로운 개념적 틀을 통해 서로 간의 관련성을 파악해야 됨을 의미한다.

13) Arzarello 등은 이 과정을 '압축(condensation)'이라는 용어를 써서 표현한다(Arzarello외 2인, 2001). 그에 따르면, '압축'은 마지막 공식에서 사고의 단일한 행동에 따라 정점에 이른 상태를 말하며, 이것은 공식에서부터 주제로 그리고 마지막 해를 찾아가는 일종의 수렴 과정으로 볼 수 있다. 따라서 압축은 표현에서 바른 의미와 지시를 보존하면서 표현 정보의 내용을 극대화하고, 동시에 정보를 보다 높은 수준에서 표현함으로써 의미론적 통제를 보다 원활하게 하는 것으로 볼 수 있다.

역동성을 가지며, 따라서 대수 학습에서는 이러한 역동성에 대한 구체적인 지도를 필요로 한다. 이와 함께 대수적 사고과정 분석 모델에서처럼, 우리는 기호 표현을 의미와 지시로 세분화함으로써 실제 학교 대수에서 기호가 사용될 때 일어나는 다양한 현상을 포착하게 되며, 동시에 대수적 사고의 어려움과 대수적 사고의 역동성을 이해하게 될 것이다.

V. 결론

이 글은 대수적 사고와 그 과정을 Frege가 제시한 기호 언어학적 관점에 따라 살펴본 것이다. 대수적 사고란 무엇인가? 이 주제에 관한 논의는 수학적 사고의 본질을 다양한 관점에서 접근하려는 시도와 함께 수학 교육에서 다루어지는 핵심적인 문제 가운데 하나로 볼 수 있다. 수학적 사고의 본질을 파악하려는 시도는 정보 처리 이론 및 문화적으로 교육적으로 그리고 수학적으로 접근하는 방법 등을 통해 다양하게 논의되어왔다(Sternberg & Ben-Zeev, 1996). 이러한 논의의 일부분으로서 대수적 사고에 대한 논의 역시 학교 대수에 접근하는 관점에 따라 다양한 측면에서 제시되어 왔다(Bednarz, 1996). 이 글은 대수 기호와 대수적 사고와의 관계를 분명히 하기 위해, 먼저 선행 연구에서 제시한 대수적 사고의 다양한 정의, 유형 및 방법에 대하여 살펴보았으며, 그로부터 기호 체계에 대한 이해가 대수적 사고의 바탕에 놓여 있음을 확인하였다. 따라서 대수적 사고를 이해하기 위해서는 무엇보다 대수 기호 사용에 관한 논의가 요구되며, 3장에서는 대수 기호를 그 사용 유형에 따라 여섯 가지 형태로 구분하여 그 예들을 중·고등학교 교과서에서부터 찾아보았다. 그리고 학생들이 대수 학습에서 어려움을 겪는 것이 이러한 다양한 유형의 기호 사용을 이해하는 과정에서 비롯된다는 결론을 도출하였으며, 이러한 논의를 바탕으로 대수적 사고와 대수 기호에서 일어나는 이러한 어려움을 살펴보기 위해 4장에서 대수적 사고과정 분석 모델을 제시하였다. 또한 4장에서는 대수 학습에서 대수적 사고를 신장시키기 위해서는 대수 기호에 대한 분석이 필요하다는 2장의 결론을 토대로 하여, Frege가 제시한 의미론적 삼각형 모델을 통해 대수 기호를 의미, 표현, 지시로 구분하여 분석하고, 대수 학습의 어려움 및 대수적 사고의 역동성이 이들 요소간의 상호작용과 변화에 의존한다는 사실을 확인하였다.

대수에서 기호의 사용은 산술과 구분되는 분명한 특징 가운데 하나이다. 또한 대수에서의 기호 사용은 간단한 산술에 비해 보다 복잡한 정신 작용을 요구한다. 이 글은 학생들이 대수 학습에서 겪는 근본적인 어려움의 원인을 대수 기호의 의미와 표현, 지시를 유기적으로 이해하지 못하고 오히려 이들간의 관계에서 인식의 불균형에 놓여 있기 때문으로 보고 있다. 그리고 이러한 문제를 파악하는 하나의 방법으로 기호 언어학적 관점을 선택하여, 대수적 사고 과정을 분석하였다. 이와 함께 대수에서 기호가 어떤 식으로 의미와 지시간에 연결되어 있는지 또한 상황에 따라 기호 사용과 대수적 사고가 어떻게 관련되어 있는지를 살펴보았다. 이 글에서 제시된 기호 언어학적 관점은 대수 기호 사용의 어려움과 대수적 사고의 역동성에 대한 일련의 분석으로, 기호와 관련된 인식론적 측면과 문화적인 측면 등은 구체적으로 논의되지 못하였다. 대수 기호에 관한 이러한 연구가 대수적 사고를 분석하는 후속 연구를 통해 계속 제시되기를 기대해본다.

참 고 문 헌

김연식, 김홍기(2000). 중학교 수학1. (주)두산.

김연식, 김홍기(1998). 중학교 수학2. (주)두산.

김연식, 김홍기(2000). 중학교 수학3. (주)두산.

우정호(1998). 고등학교 수학Ⅱ. 지학사.

우정호(1999). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

조태근 외 6인(1998). 고등학교 공통수학. 금성교과서(주).

Arzarello, F. & Bazzini, L. & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic processes of thinking. In R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on school algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Bednarz, et al. (Eds.), *Approaches to algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, et al. (Eds.), *Approaches to algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking; a guide for teachers, grades 6-10*. Heinemann.

Melillo, J. A. (1999). An analysis of students' transition from arithmetic to algebraic thinking. Kent State University Thesis (Ph.D.).

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 237-268.

Rubenstein, R. & Thompson, D. R. (2001). Learning mathematical symbolism: Challenges and instructional strategies. *Mathematics Teacher*, 94, 265-271.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sternberg, R. J. & Ben-Zeev, T. (1996). *The nature of mathematical thinking*. Lawrence Erlbaum Associates.

Vygotsky. (1962). *Thought and Language*. 신현정(역) (1985). 사고와 언어. 서울: 성원사.

A Study on the Algebraic Notations and Algebraic Thinking

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

In this paper, we start with the question "what is algebraic thinking?". The problem is that the algebraic thinking is not exactly defined. We consider algebraic thinking from the various perspectives. But in the discussion relating to the definition of algebraic

thinking, we verify that there is the algebraic notations in the core of algebraic thinking. So we devide algebraic notations into the six categories, and investigate these examples from the school mathematics. In order to investigate this relation of algebraic thinking and algebraic notations, we present 'the algebraic thinking process analysis model' from Frege' idea. In this model, there are three components of algebraic notations which interplays; sense, expression, denotation. Thus many difficulties of algebraic thinking can be explained by this model. We suppose that the difficulty in the algebraic thinking may be caused by the discord of these three components. And through the transformation of conceptual frame, we can explain the dynamics of algebraic thinking. Also, we present examples which show these difficulties and dynamics of algebraic thinking. As a result of these analysis, we conclude that algebraic thinking can be explained through the semiotic aspects of algebraic notations.