대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.2, 223-235. June 2002

피타고라스 정리의 지도에 대한 남북한 비교

박문환*

Ⅰ. 서론

1990년대 들어서 통일교육의 방향이 대결국면에서 화해국면으로 방향을 전환하고 있는 것과 궤도를 같이 하여, 남북한 사이의 이질화 극복 및 통합 방안이 각계에서 모색되고 있다. 특히 수학교육계에서도 남북한 사이의 이질화 극복 및 통합방안을 마련하기 위한 기초 연구 차원에서 수학교육을 비교하는 연구가 활발히 진행되고 있다(신성균, 1984; 교육개발원, 1996; 최택영 · 김인영, 1998; 현진오 · 강태석, 1999; 김삼태 · 이식, 1999; 박문환, 2001). 그러나 이와 같은 연구는 초등학교 혹은 중등학교 별로 전체적인 관점에서 교육과정의 비교를 시도하고 있으며, 국소적인 관점에서 학교수학에서 각 내용이 어떻게 다루어지는지 또는 강조점이 무엇인지 등에 대해 비교를 시도하고 있지 않다. 즉 남북한 교육과정의 통합에 대한 논의가 구체화되었을 때 거시적인 입장에서 통합에 대한 원칙이나 방향을 시사받을 수는 있지만, 각 내용의 통합을 어떻게 구체화하는가에 대한 의문은 해결되지 않은 채로 남을 가능성이 높다고 할 수 있다. 그러므로 초 · 중등학교에서 다루어지는 각각의 내용에 대한 보다 세밀한 분석작업이 지속적으로 요구되고 있다.

본 논문에서는 남북한에서 공통으로 다루어지는 내용 중, 교육과정에서 중요한 위치를 차지하고 있는 '피타고라스의 정리'를 중심으로 살펴보고자 한다. 이를 위해 남한의 중학교 3학년 교과서인 '중학교 수학 3(김연식 · 김홍기, 1998)'과 북한의 고등중학교 2학년 교과서인 '수학(기하) 고등중학교 2(류해동, 1990)' 및 고등중학교 4학년 교과서인 '수학(기하) 고등중학교 4(강후전, 1990)'을 분석의 대상으로 하였다. 먼저 남북한 교과서에서 '피타고라스 정리'를 다루는데 있어서의 지도계열을 살펴보고, 다음으로 교과서에 나타난 특징적인 차이를 살펴보았다. 물론 남한의 중등학교 수학 교과서는 검인정으로 여러 종이 존재하며, 북한의 교과서는 국정으로 1종이기 때문에 남한에서 사용되는 교과서 중 어느 교과서를 선택하는가에 따라 분석 결과가 다소 달라질 수도 있지만, 사실상 남한의 중등학교 수학 교과서는 체제나 내용, 전개방법이 거의 비슷하며, 이러한 이유로 남한의 어느 특정한 교과서를 택한다고 하여도, 남북한의 수학 교과서를 비교하는데 큰 차이를 보인다고 할 수 없을 것이다. 그러므로 이러한 분석을 통해 남북한의 교과서에 나타난 피타고라스 정리에 대한 차이점을 밝히고, 이를 통해 각각에 대한 장단점 및 교육적 시사점을 이끌어내고자 한다.

* 인천교대 강사

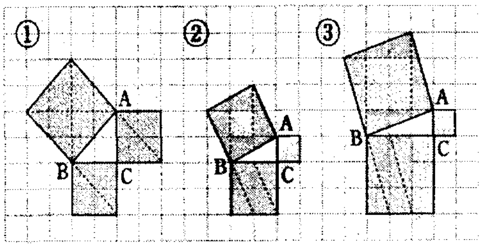
Ⅱ. 남한 교과서에 나타난 피타고라스 정리

남한의 제 6차 교육과정에 따르면 “기하 문제는 그 해결 방법이 다양하기 때문에 학생으로 하여금 창조적으로 사고하게 하고, 스스로 생각하게 하는데 효과적일 수(교육부, 1994, p.130)” 있다는 점에서 지도의 의의를 밝히고 있으며, 이를 위해 중학교 2학년에서는 삼각형의 합동조건 및 닮음조건을 이용하여 도형의 성질을 증명하도록 하고, 중학교 3학년에서는 피타고라스의 정리를 증명하게 하고, 이를 활용할 수 있게 하고, 원과 직선 및 두 원에 관한 여러 가지 성질을 이해하게 하고, 증명할 수 있게 하고 있다(교육부, 1994, pp.144-154).

특히 피타고라스의 정리의 지도와 관련하여 “피타고라스의 정리를 증명하는 방법은 여러 가지가 있으나 가급적 간단한 것으로 하며, 증명 자체보다는 피타고라스 정리의 의미를 파악하게 하는데 주안점을 두고 지도한다(교육부, 1994, p.149)”라고 하고 있으며, 피타고라스의 정리의 활용과 관련하여 "피타고라스 정리의 기하학적, 대수적 이해를 기초로 하여 평면도형에서의 변의 길이와 좌표평면 위에서의 두 점 사이의 거리, 입체도형에서의 선분의 길이를 구할 수 있게 한다(교육부, 1994, p.149)"라고 기술하고 있으며, 구체적으로 평면도형의 대각선의 길이, 정삼각형의 높이를 비롯한 평면도형에서의 선분의 길이를 구할 수 있게 하며, 입체도형에서는 직육면체의 대각선, 정사면체의 높이, 원뿔의 높이 등을 구하는데 활용할 수 있도록 하고 있다. 남한의 제 7차 교육과정에서도 ‘피타고라스의 정리’의 지도에 대해 거의 비슷한 언급을 하고 있다(교육부, 1999).

교과서에서는 30여쪽의 분량을 피타고라스의 정리에 할애하고 있으며, 다음 문맥을 통해 직각삼각형에서의 변 사이의 관계를 먼저 살펴보도록 하고 있다.

아래 그림의 각각에서 △ABC는 ∠C가 직각인 삼각형이다.
$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AC}=c$일 때, 다음에 답하여라.



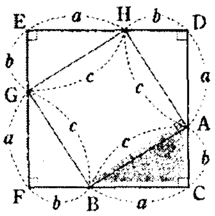
(1) 위 그림에서 모눈을 살펴보아 a, b, c를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 a^2, b^2, c^2 의 값을 오른쪽 빈칸에 써 넣어라.

	①	②	③
a^2	4		
b^2	4		
c^2	8		

(2) a^2, b^2, c^2 사이에는 어떤 관계가 있는지 위의 표에서 알아보아라(김연식 · 김흥기, 1998, p.178).

위의 예를 통해 직각삼각형 ABC에서는 모두 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다는 것을 보이고, 이를 다음과 같이 넓이 계산을 이용하여 증명한다.

우선 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 EFCD를 그리고, 이 정사각형의 네 꼭지점에서 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a, b인 직각삼각형을 그리면, 이들 네 개의 직각삼각형은 모두 합동(SAS 합동)이다. …중략…
한편, 정사각형 EFCD의 넓이는 정사각형 HGBA와 네 개의 직각삼각형의 넓이의 합과 같으므로,



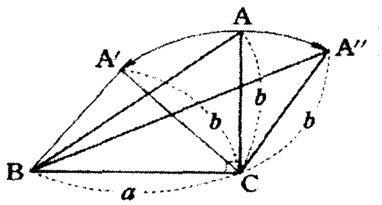
$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}\, ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$$

이상에서, 직각삼각형의 빗변의 길이의 제곱은 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합과 같음을 알 수 있다(김연식 · 김홍기, 1998, p.179).

이와 같은 접근 방법은 기하학적, 대수적 접근을 동시에 시도하고 있다는 점에서 교육과정에서 의도하고 있는 바를 충실히 반영하고 있다고 보여진다.

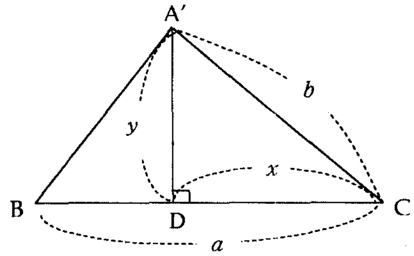


<그림 1>

다음에 삼각형에서 각의 크기에 대한 변의 길이의 관계를, <그림 1>을 이용하여 △ABC에서 변의 길이 a, b를 고정하고 ∠C를 변화시키면서 변 c의 길이의 변화를 살펴보도록 한 후, a^2+b^2과 $\overline{A'B}^2$, $\overline{AB}^2$, $\overline{A''B}^2$의 크기 관계를 조사하도록 함으로써, 삼각형의 각의 크기에 대한 변의 길이의 관계를 비교적 직관적으로 접근하고 있다.

그리고 나서 ∠C가 예각인 경우에 대해 $c^2 < a^2+b^2$이 됨을 피타고라스의 정리를 이용하여 다음과 같이 엄밀한 증명을 시도하고 있으며, ∠C가 둔각인 경우에 대해서는 <문제>로 제시되고 있다.

다음의 그림과 같이 꼭지점 A′에서 변 BC에 수선 A′D를 그으면, 직각삼각형 A′BD에서



$$\overline{A'B}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{A'D}^2$$
$$= (a-x)^2 + y^2$$
$$= a^2 - 2ax + x^2 + y^2 \cdots\cdots ①$$

한편, 직각삼각형 A′DC에서

$x^2 + y^2 = b^2 \cdots\cdots\cdots ②$

①, ② 로부터

$\overline{A'B}^2 = a^2 - 2ax + b^2$

여기서 $ax > 0$ 이므로, $a^2 - 2ax + b^2 < a^2 + b^2$

$\therefore\ \overline{A'B}^2 < a^2 + b^2$

따라서 △A′BC에서

∠C < 90° 이면 $\overline{A'B}^2 < \overline{BC}^2 + \overline{CA'}^2$

이 성립한다(김연식 · 김홍기, 1998, pp.182-183).

다음에 피타고라스의 정리의 역을 피타고라스의 정리를 사용하여 다음과 같이 증명한 후, 삼각형의 변의 길이에 대한 각의 크기 관계를 설명한다.

일반으로, 세 변의 길이가 각각 a, b, c 인 △ABC에서

$a^2 + b^2 = c^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$

이면 ∠C=90° 임을 밝혀 보자.

아래의 그림과 같이 ∠C′=90°, $\overline{B'C'} = a$, $\overline{C'A'} = b$ 가 되게 △A′B′C′을 만들고 $\overline{A'B'} = x$ 라고 하면, 피타고라스의 정리로부터

$a^2 + b^2 = x^2 \cdots\cdots$ ②

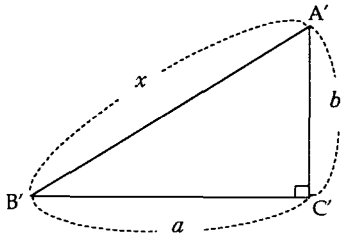
앞의 ①과 ②로부터

$$x^2 = c^2$$

여기서 $x>0$, $c>0$ 이므로 $x = c$

따라서, △ABC와 △A′B′C′은 세 변의 길이가 각각 같게 되어 △ABC≡△A′B′C′이다.

∴ ∠C=∠C′=90°



(김연식 · 김홍기, 1998, pp.184-185)

'피타고라스의 정리의 활용' 단원에서는 크게 평면도형에의 활용과 입체도형에의 활용으로 나누어져 있다. 평면도형에의 활용과 관련하여 피타고라스의 정리를 이용하여 평면도형에서 길이와 넓이를 구하기, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리를 구하기가 다루어지고 있으며, 여기서 제시된 문제의 유형은 직사각형의 대각선의 길이 구하기, 빗변의 길이가 주어진 60°의 각을 가진 직각삼각형의 나머지 변의 길이를 구하기, 특별한 직각삼각형의 세 변의 길이의 비, 세 변의 길이가 주어진 삼각형의 넓이 구하기, 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 구하기 등이 있다. 입체도형에의 활용과 관련하여 피타고라스의 정리를 이용하여 입체도형에서 길이, 넓이, 부피 등을 구하도록 하고 있으며, 제시된 문제의 유형으로는 직육면체의 대각선의 길이 구하기, 정사면체의 높이 구하기, 원뿔의 높이 구하기 등이 있으며, 다양한 문제상황에 대한 피타고라스 정리의 적용에 초점을 맞추고 있다.

Ⅲ. 북한 교과서에 나타난 피타고라스의 정리

북한의 교육과정을 입수하지 못했기 때문에, 고등중학교 교과서를 중심으로 피타고라스의 정리를 살펴보고자 한다.

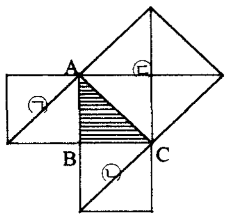
북한에서는 피타고라스의 정리를 고등중학교 2학년과 4학년에 나누어서 다루는 것이 이채롭다. 먼저 고등중학교 2학년에서는 피타고라스 정리를 다루기 전에 단위 면적을 이용하여 직사각형의 면적을 구하는 공식을 유도하고, 평행사변형의 면적은 '잘라붙이기'[1]를 통해 직사각형으로 만들어서 공식을 유도하며, 삼각형의 면적은 합동인 삼각형을 하나 더 붙임으로써 평행사변형을 만들어 공식을 유도한다. 또한 사다리꼴의 면적은 대각선에 의해 두 삼각형으로 분할한 후 공식을 유도한다. 마지막으로 '5. 세평방공식'[2]에서 직각이등변삼각형의 세 변

1) 평행사변형의 넓이 공식을 만드는 과정에서, 남한에서는 "평행사변형의 한 높이를 선택하여 자른 뒤에 이를 교과서의 그림과 같이 붙여 직사각형을 만들도록(교육인적자원부, 2002, p.212)" 하고 있으며, 북한에서는 "평행4변형에서 그림과 같이 △ABE를 잘라내여 다른쪽에 잇대여(류해동, 1990, p.32)" 보도록 하는 정도로 언급하고 있다. 즉 '잘라붙이기'라는 용어는 남북한에서 모두 공식적으로 사용하는 용어는 아니다. 그러나 본 논문에서는 논의의 전개를 위해 '잘라붙이기'라는 용어를 도형의 일부를 잘라서 겹쳐지지 않도록 재배열하여 새로운 도형을 만드는 것이라는 의미에서 사용하겠다.

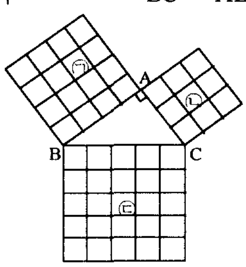
2) 북한에서는 피타고라스의 정리를 '세평방정리'라고 하며, 직각삼각형에서의 세 변 사이의 관계식을 '세평방공식'이라고 한다. '세평방공식'에 해당하는 남한의 용어로 '피타고라스의 공식'을 생각할 수 있으나, 남한에서는 '피타고라스의 공식'이라는 의미를 피타고라스의 정리를 만족하는 정수쌍을 나타내는 $(2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1)$이라고 소개하고 있어 전혀 다른 의미를 나타내고 있다(김연식 · 김홍기, 1998, p.205).

사이의 관계를 다음과 같이 도입하고 있다.

직3각형의 변들 사이에 어떤 관계가 있는가를 알아보자.



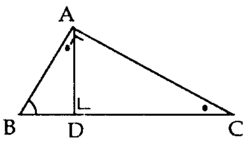
1) 그림에서 △ABC는 직2등변3각형이다. 바른4각형 ㉠과 ㉡의 면적의 합과 ㉢의 면적을 비교하여라.
나누어진 3각형의 개수를 가지고 생각하여보아라.
2) 그림에서 △ABC는 두 직각변이 3cm, 4cm이고 빗변이 5cm인 직3각형이다. ㉢의 면적과 ㉠, ㉡의 면적의 합을 구하여 비교하여라. 무엇을 알 수 있는가?
3) 다음의 빈곳에 알맞은 글자를 써 넣어라.
㉠의 면적 = … ㉡의 면적 = …
㉢의 면적 = … $BC^2 = AB^2 + \cdots$



(김봉래 · 김우철, 1990, pp.35-36)

다음에 직각삼각형의 변 사이의 관계를 제시하고 있다. 고등중학교 2학년에서는 '세평방공식'을 1.5쪽 정도의 분량으로 간단히 다루며, 두 직각변[3]이 주어져있을 때, 빗변의 길이 구하는 문제, 도형의 면적을 구하는 문제가 제시되고 있다. 그러나 다음에 제시되는 '련습문제', '복습문제' 및 '종합문제'에서는 이와 관련된 문제를 전혀 다루지 않고 있다. 고등중학교 4학년에서는 '도형의 닮음'을 먼저 다루며, 닮은 삼각형에서의 변 사이의 비례관계를 이용하여 대수적 방법으로 다음과 같이 피타고라스 정리를 증명한다. 고등중학교 4학년에서는 피타고라스 정리에 약 8쪽 분량을 할애하고 있다.

정리 1. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면
1) $AD^2 = BD \cdot CD$
2) $BA^2 = BC \cdot BD$
$CA^2 = CB \cdot CD$
이다(강후전, 1990, p.48).



정리 2. 직3각형에서 빗변의 두제곱은 두 직각변의 두제곱의 합과 같다(강후전, 1990, p.50).

정리 2 곧 피타고라스 정리의 증명은 정리 1을 이용하여 증명하고 있다. 이를 바탕으로 정삼각형의 높이를 구하는 예제를 제시하고, 특수각의 삼각비, 좌표평면에서의 두 점 사이의 거리, 직육면체의 대각선의 길이 등을 구하는 방법을 비교적 간단히 소개하고 있다. 그리고 피타고라스의 정리를 이용하여 중선정리를 증명하고 있다.

정리 3. △ABC에서 AD를 가운데선이라고 하면 $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ 이 선다.
(강후전, 1990, p.53)

마지막으로 피타고라스 정리의 역을 다음과 같이 제시하고 있다.

3) '두 직각변'이라는 용어는 직각삼각형에서 직각을 끼고 있는 두 변을 의미하며, 북한에서만 사용되는 용어로 이에 해당하는 남한 용어는 없다.

정리 4. (세평방정리의 거꿀정리)

세 변이 a, b, c 인 3각형에서 $a^2=b^2+c^2$ 이면 그 3각형은 변 a를 빗변으로 하는 직3각형이다.

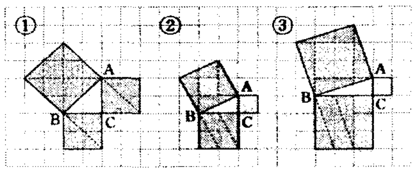
(강후전, 1990, p.54)

Ⅳ. 남북한 교과서에서의 피타고라스 정리의 지도에 대한 비교

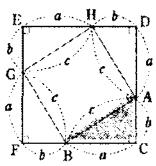
남북한 교과서에서 피타고라스의 정리는 부분적으로 유사하게 다루어지고 있으나, 여러 가지 면에서 매우 다르게 다루어지고 있다. 먼저 다루어지는 계열에 있어서 차이를 들 수 있다. 피타고라스의 정리를 남한에서는 중학교 3학년에서 다루어지며, 이전 단원이나 이후 단원과는 비교적 독립적으로 구성되어 있다.[4] 북한에서는 고등중학교 2학년에 도형의 넓이를 다루는 마지막 단계에서 '세평방공식'을 간단히 다룬다. 그리고 고등중학교 4학년에 도형의 닮음을 다루고 삼각형의 닮음을 이용하여 피타고라스 정리에 대한 대수적 증명이 시도되고 있다.

둘째, 피타고라스 정리가 차지하고 있는 교과서 분량 면에서 차이가 있다. 남한의 교과서는 피타고라스와 관련된 수학사에 2쪽, 피타고라스 정리에 6쪽, 피타고라스 정리의 역에 3쪽, 피타고라스의 정리의 활용에 12쪽, 그리고 학습내용 확인문제, 연습문제, 기본문제, 심화문제 등에 6쪽, 연구학습에 1쪽으로 총 30쪽을 할애하고 있다. 북한의 교과서는 '세평방공식'에 1.5쪽, '직3각형의 비례선분'에 2쪽, '세평방정리' 및 '세평방정리의 거꿀정리'에 5쪽, 연습문제 1.5쪽으로 총 10쪽을 할애하고 있다. 북한 교과서에는 수학사와 관련된 내용이 전혀 없다. 또한 5쪽을 할애하고 있는 '세평방정리'에서는 특수삼각형[5]에 대한 변의 길이 사이의 관계, 특수각의 삼각비, 좌표평면에서의 두 점 사이의 거리, 직육면체의 대각선의 길이, 중선정리 등을 다루고 있어서 남한에서 피타고라스의 정리의 활용을 따로 다루는 것과는 대조적이다.

셋째, 피타고라스의 정리를 도입하는데 있어서 차이가 있다. 즉 남한에서는 학생들이 스스로 사고할 기회를 제공하면서, 이를 바탕으로 연역적 전개를 시도하는데 비해 북한에서는 학생들에 대한 배려가 두드러지지는 않는다. 남한의 교과서에서는 피타고라스의 정리를 도입하면서 <그림 2>를 제시하고 있으며, 피타고라스의 정리의 역을 도입하면서 비슷한 그림을 제시하여, 학생들로 하여금 추측해 보도록 하는 활동을 의도하고 있다. 그리고 <그림 3>을 이용하여 피타고라스 정리의 증명을 시도한다.



<그림 2>



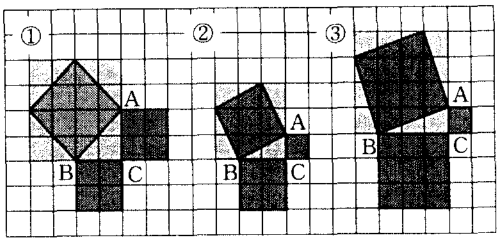
<그림 3>

그러나 도입을 위해 제공된 문맥과 증명 과정에서의 문맥 사이의 관련성을 찾기 어렵다는 점에서 문제점으로 지적될 수 있다.

4) 남한의 교과서 단원 순서는 'V. 통계, VI. 피타고라스의 정리, VII. 원'의 순서로 이루어져 있다.

5) 직각이등변 삼각형 및 세 각이 30°, 60°, 90°인 직각삼각형

예를 들어, 위의 증명 방법을 택하기 위해서는 도입부분에서의 문맥이 <그림 4>와 같이 수정될 필요가 있을 것이다.



<그림 4>

<그림 4>에서 빗변을 한 변으로 하는 정사각형과 빗금을 친 부분을 모두 포함하는 큰 정사각형의 넓이는, 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 직각삼각형 네 개의 넓이를 더한 넓이와 같게 된다는 사실에서 출발하여야 하며, 이는 증명과정에 포함되어 있는 다음과 같은 계산의 근거가 되기 때문이다.

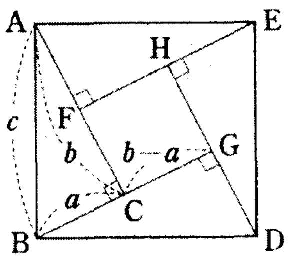
$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$$

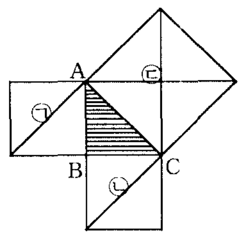
즉 <그림 4>는 <그림 2>에 대한 아이디어를 제공해 줄 수 있을 것이다.

오히려 <그림 2>를 통한 활동은 <그림 5>를 이용한 증명과 관련성을 짓는 것이 올바른 방법으로 생각된다.

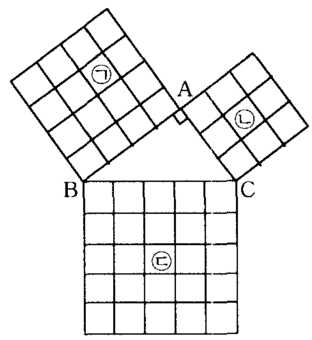


<그림 5>

반면 북한에서는 고등중학교 2학년에 여러 가지 도형의 면적을 계산하는 방법을 고안한 후, <그림 6>과 <그림 7>를 제시하면서 '세평방정리'를 도입하고 있다. <그림 6>에서 직각이등변삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 면적 사이의 관계를 분할된 삼각형의 면적을 이용하여 직관적으로 파악하도록 하고 있다. 그러나 <그림 7>에서는 △ABC가 두 직각변이 3cm, 4cm 이고 빗변이 5cm인 직각삼각형임을 밝힌 후, 면적 관계를 살펴보도록 하고 있어서 주어진 삼각형이 진짜로 직각삼각형이 되는지를 확인할 기회를 주지 않고 있다.



<그림 6>



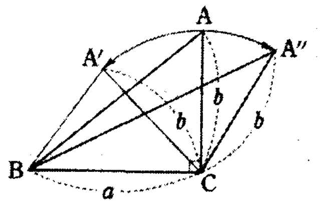
<그림 7>

고등중학교 4학년에서는 직각삼각형에서의 닮음관계를 이용하여 증명을 시도하고 있으며, 고등중학교 2학년에서의 학습내용과 연계하여 지도되고 있지는 않은 듯 하다.

이러한 양상은 피타고라스의 정리의 역을 밝히는 과정에서도 다시 재연된다. 증명과정은 크게 다르지 않으나, 남한에서는 예각삼각형,

직각삼각형, 둔각삼각형에서의 변 사이의 관계를 <그림 8>을 이용하여 직관적으로 접근하도록 한 후, 형식적 증명을 시도하고 있으나, 북한에서는 이러한 과정이 생략된 채 바로 증명이 시도되고 있다.

그러나 피타고라스의 정리 자체만을 생각하면 남북한 모두 면적을 이용하여 피타고라스의 정리를 직관적으로 파악하도록 하고, 이를 엄밀하게 증명하고, 피타고라스의 정리의 역을 증명하고, 이를 활용하는 과정을 거치고 있다



<그림 8>

는 점에서는 유사하다고 할 수 있다.

넷째, 강조점의 차이를 들 수 있다. 남한에서는 교육과정에서 제시하고 있듯이 "증명 자체보다는 피타고라스 정리의 의미를 파악하는데 주안점을 두고" 지도하도록 하고 있으며, 피타고라스의 정리를 기하학적, 대수적으로 이해하고 이를 기초로 피타고라스의 정리를 활용하도록 하고 있다. 반면 북한에서는 적은 쪽수에 많은 내용을 담고 있어서 짧은 시간에 많은 내용을 학생들이 받아들이도록 의도하고 있는 듯이 보이며, 비교적 간략히 다루려는 의도가 엿보인다. 이러한 사실은 앞에서도 언급한 바와 같이 피타고라스의 정리 및 그 역, 피타고라스의 정리의 활용에 대해 남한에서는 20여쪽을 할애하고 있으며 특히 활용에 대해 12쪽 분량을 할애하고 있어서 교육과정상의 의도를 잘 반영하고 있다고 생각된다. 그러나 교과서에서는 피타고라스 정리의 증명에 대한 여러 가지 방법을 소개하고 있어서,[6] 증명 자체에 주안점을 두지 말도록 한 교육과정에서의 의도와는 맞지 않은 듯 하다. 그러나 북한에서는 피타고라스 정리에 대한 증명은 본문에서 소개된 증명 외에는 없으며, 특히 닮음의 성질과 관련하여 기하학적 의미를 제시하려 시도하고 있다. 북한에서의 전개 양식을 다시 살펴보자.

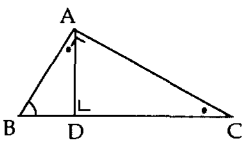
정리 1. 직3각형 ABC의 직각의 정점 A에서 빗변에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하면

1) $AD^2 = BD \cdot CD$

2) $BA^2 = BC \cdot BD$

$CA^2 = CB \cdot CD$

이다(강후전, 1990, p.48).

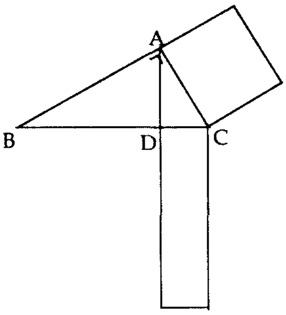


이 정리 바로 다음에 <그림 9> 등을 제시하여 정리 1에서 다룬 관계식의 기하학적 의미를 부여하고 있다. 즉 <물음>의 형태로 문제를 제시하여 직각삼각형 ABC에서 AC를 한 변으로 하는 정사각형의 면적은 가로의 길이가 CD이고 세로의 길이가 BC인 직사각형의 면적과 같다는 것을 기하학적으로 설명하도록 요구하고 있다.

<그림 9>가 갖는 기하학적 의미는 유클리드 원론에서 제시하는 <그림 10>를 이용한 증명에 대한 아이디어를 줄 수 있다는 점에서 교육적으로 의미가 있다고 보인다. 즉 <그림 10>에서 정사각형 ACGF의 면적은 직사각형 ADIH의 면적과 같고 정사각형 CBKJ의 면적은 직사각형 HIEB의 면적과 같으므로 직각삼각형의 빗변의 제곱은 나머지 두 변의 제곱의 합과 같다는 것

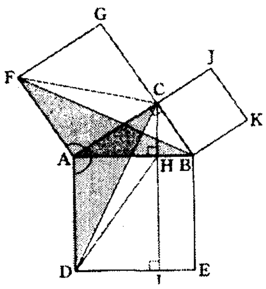
---

6) 교과서에서는 본문, 문제, 연습문제 등에서 피타고라스 정리의 여러 가지 다른 증명 방법을 소개하고 있다. 북한에서 제시한 증명 방법도 남한의 교과서에서는 <문제>로 제시하여 학생들이 직접 접근해 보도록 시도하고 있다.



<그림 9>

을 직관적으로 파악할 수 있으며, 유클리드 원론에서는 이것을 순전히 기하학적 관점에서 증명을 시도한 것으로 해석할 수 있다. 그러나 북한 교과서에서는 <그림 10>을 이용한 증명방법은 보이지 않는다.



<그림 10>

남한에서는 고등학교 공통수학 '평면좌표' 단원에서 좌표를 이용하여 증명하는 중선정리를 북한에서는 피타고라스 정리를 이용하여 증명하는 것도 남북한 사이의 차이점 중의 하나이다.

전반적으로 북한에서는 기하학적, 직관적 해석 능력을 보다 더 중시하고 있으며, 논증기하는 필요한 정도만 간략히 다루고 있다고 보인다.

다섯째, 문제 및 연습문제의 구성에서 차이점을 살펴볼 수 있다.

남북한 모두 피타고라스 정리를 이용하여 길이나 넓이를 구하는 문제, 증명에 대한 문제, 좌표평면에서 두 점 사이의 거리를 구하는 문제, 세 변의 길이가 주어진 삼각형 중에서 직각삼각형을 고르는 문제 등은 공통으로 다루어지고 있다. 그러나 남한에서는 입체도형과 관련된 다양한 문제가 포함되어 있으며, 북한에서는 삼각기둥의 부피를 구하는 문제가 한 개 포함되어 있을 뿐이다.[7] 남한에서는 피타고라스 정리의 다른 증명방법에 대한 문제가 몇 개 포함되어 있으나, 북한에서는 이러한 문제가 전혀 없다는 점도 차이점으로 언급될 수 있다. 그러나 북한 교과서에는 남한 교과서에는 덜 강조되는 작도 문제가 다수 포함되어 있다는 사실이다. 예를 들면, 가로와 세로의 길이가 a, b인 직사각형의 넓이와 같은 정사각형을 작도하는 문제,[8] 주어진 선분 a, b에 대하여 $x^2=2ab$, $2x^2=ab$를 만족하는 선분 x를 작도하는 문제, 빗변이 c이고 다른 한 변이 a인 직각삼각형을 작도하는 문제, 변의 길이가 a인 정사각형과 b인 정사각형의 넓이의 합과 같은 정사각형을 작도하는 문제 등이 포함되어 있다.[9]

마지막으로 남한 교과서의 <연구 학습>에서 다루는 '피타고라스의 수'에 대한 내용 가운데 문제점으로 지적될 수 있는 부분에 대해 언급하고 싶다. <연구 학습>에서는 피타고라스의 수를 구하는 여러 가지 방법이 있다고 전제하고, (1) 피타고라스의 공식, (2) 플라톤의 공식, (3) 디오판토스의 공식 등 세 가지를 소개한

---

7) 북한의 교과서에서 <예제>에서는 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 문제와 원뿔의 높이를 구하는 문제가 포함되어 있으나, <문제> 및 <연습문제>에서는 주로 평면도형과 관련된 문제만을 다루고 있다.

8) 이 문제는 원의 성질을 이용하여 작도하도록 요구하고 있다.

9) 남한의 교과서에도 반지름의 길이가 2cm, 3cm 인 두 원의 넓이의 합과 같은 넓이를 가지는 원을 작도하는 문제가 한 개 포함되어 있다.

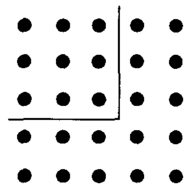
후, "여기서 원의 방정식이나 반각의 삼각비 등을 알고 있으면, 위의 피타고라스의 수를 밝힐 수 있으나 지금으로서는 중학교 학생의 정도를 넘기 때문에 이 정도로 줄인다(김연식 · 김흥기, 1998, p.205)"라고 기술하고 있다. 그러나 이와 같이 기술하는 것은 경우에 따라 매우 위험할 수 있다. 왜냐하면 원의 방정식이나 반각의 삼각비를 알고 있어야만 접근 가능하다는 해석을 낳게 할 소지가 있으며, 중학교 학생의 정도를 넘기 때문에 중학생 수준에서는 다룰 수 없다는 해석도 가능하기 때문이다. 이것은 원천적으로 창의적 사고를 제한하고 있을 뿐만 아니라, 다른 방법에 의한 접근이 불가능하다고 판단할 수 있기 때문이다. 실제로 플라톤의 공식이라고 제시된 피타고라스의 수 ($2n$, n^2-1, n^2+1)은 대수적 방법과 기하적 방법을 병행하여 다음과 같이 해결될 수 있다.

<그림 11>에서 한 변이 $m+2$개의 점으로 이루어진 정사각형 모양을 생각하자.

이 때, 관계식 $m^2+(4m+4)=(m+2)^2$ 이 성립한다. 먼저 피타고라스의 수를 찾기 위해서 $(4m+4)$가 완전제곱수라고 가정하자. $(4m+4)$는 짝수이므로 $(4m+4)=(2n)^2$ 이라고 놓을 수 있다. 여기서 $m=n^2-1$ 이 되므로 플라톤의 공식이 곧바로 유도된다.

물론 이와 같은 방법을 중학교 수준의 학생이 쉽게 찾을 수는 없겠지만, 그렇다고 전혀 불가능한 것도 아니다. 왜냐하면, 곱셈공식을 모른다고 하더라도 기본적인 대수적 지식과 <그림 11>을 이용하면 위의 증명을 이해하는데는 큰 무리가 없으며, 또 다른 더 쉬운 접근 방법에 대한 가능성은 항상 존재하기 때문이다.

이러한 점에서 피타고라스의 수에 대한 공식은 탐구학습 문제로 제시하는 것이 보다 바람직하다고 생각된다.



<그림 11>

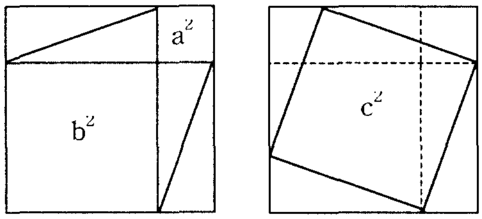
전반적으로 남한에서는 피타고라스의 정리를 여러 측면에서 증명을 시도해 보고, 다양한 활용 가능성을 제시하는데 비해, 북한에서는 핵심적 내용을 중심으로 비교적 간략히 다루고 있다.

Ⅴ. 남북한 비교를 통한 교육적 시사점

남한의 교과서에서는 피타고라스의 정리를 먼저 직관적으로 파악하도록 한 후, 피타고라스의 정리의 증명을 위해 기하적-대수적 방법을 혼용한 증명방법을 택하고 있어 교육과정에서의 이념을 충실히 이행하고 있다고 보여진다. 북한에서도 '잘라붙이기' 방법을 사용하여, 직각삼각형에서의 변의 길이 사이의 관계를 직관적으로 파악하도록 하려고 하는 시도를 하고 있어, 남북한 모두 피타고라스 정리에 대한 직관적 접근이 선행되고 있음을 알 수 있다.

역사적으로 보아도 그리스 수학이 유클리드 원론에서와 같은 공리나 공준에 바탕을 둔 논증적인 학문으로 확립되기 전에는 다분히 직관적이고 경험적인 증명이 시도되었을 것이며, 이러한 점에서 Hankel은 <그림 12>를 통해 증명을 하였을 것이라고 추측한다(김용운 · 김용국, 1994, p.57). 이 증명은 원론에 비해 다분히 직관적이고 경험적이며 역사적으로 4,000년 전

에 이미 알려져 있었다.



<그림 12> 피타고라스 정리의 증명

이러한 점에서 남북한에서 취하고 있는 접근 자체는 모두 건전한 것으로 판단된다. 그러나 남한의 경우 최초에 시도되는 면적계산과 피타고라스의 정리를 증명하는 방법 사이의 연결성에 문제가 있으며, 북한의 경우 '잘라붙이기'를 통한 면적계산 공식과 직각삼각형에서의 변의 길이 사이의 관계를 설명하는데 있어서의 비약이 문제점으로 지적될 수 있다. 피타고라스의 정리에 대한 직관적 파악이 이루어지기 위해서는 남북한에서 시도되고 있는 방법의 적절한 조화가 이루어질 필요가 있을 것이다. 즉 활동을 통한 개념적 파악이 선행될 필요가 있으며, 이를 위해 북한에서 시도되는 '잘라붙이기' 활동을 고려해 볼 필요가 있다.

<그림 9>를 이용한 '잘라붙이기' 활동은 유클리드 원론에서 제시한 증명방법의 개념적 토대가 될 수 있다. Loomis(1972)는 적절한 방법으로 정사각형을 3-4개의 조각으로 잘라서 붙이면, 요구되는 모양이 만들어짐을 보이고 있다(Loomis, 1972, p.136).

이 외에도 Loomis가 정리한 피타고라스의 정리에 대한 여러 가지 증명방법은 교육적으로 이용될 수 있는 여지가 많다.

Loomis는 피타고라스의 정리에 대한 증명방법을 크게 ① 기하학적 방법, ② 대수적 방법, ③ 벡터를 이용한 방법, ④ 역학을 이용한 방법 등으로 구분하고 있다(Loomis, 1972). 이 중 기하학적 방법에 의한 것이 약 250여 가지, 대수적 방법에 의한 것이 약 100여 가지, 그리고 나머지 방법에 의한 것이 10여 가지정도가 알려져 있으며, 기하학적 방법에 의한 것의 대부분이 '잘라붙이기'를 이용하고 있다는 점에서 특히 교육적 활용의 가능성을 볼 수 있을 것이다. 기하학적 방법이 250여 가지가 된다는 것은 피타고라스 정리의 증명에 있어서 기하학적 직관이 그만큼 중요한 역할을 한다고 할 수 있으며, 대수적 방법이 100여 가지가 된다는 것은 '피타고라스 정리'가 기하 영역과 대수 영역을 연결할 수 있는 중요한 소재가 될 수도 있음을 뜻한다. 즉 중학교 2학년에서 닮음을 학습한 후에 직각삼각형에서의 닮음의 성질을 고찰한 후, 실제로 '잘라붙이기' 활동을 통해서 이러한 사실을 직관적으로 확인하는 과정을 포함시키는 것을 고려해 볼 수 있을 것이다.

즉 남한에서의 문자를 이용한 피타고라스 정리의 증명은 충분한 활동이 이루어지지 않은 상태에서, 급속도로 이루어진다는 느낌이 없지 않으며, 교육과정에서 제시하고 있는 피타고라스 정리의 기하학적, 대수적 의미 모두를 충분히 구현하기 위해서는 위와 같은 활동이 고려되어야 할 것이다. 그렇지 않을 경우 단지 변용된 형태의 기하-대수적 방법만을 채택하고 있다고 밖에 볼 수 없다. 이러한 경향은 남한의 다른 교과서에서도 나타나고 있는 현상이다. 피타고라스의 정리에 대한 접근 방법으로서 '잘라붙이기'를 통한 실제적 활동을 바탕으로 직각삼각형에서의 변 사이의 관계를 암묵적으로 파악한 후, 기하적 혹은 대수적 접근방법으로의 가능성을 타진하고, 이를 바탕으로 실제적 활용에 대한 지도의 계열을 고려해 볼 수 있을 것이다.

또한 북한의 교과서에 나타난 작도와 관련된

문제를 생각해 볼 수 있다. 남한에서는 중학교 1학년에 작도에 대해 다루고, 그 이후에는 거의 다루지 않고 있다. 남한에서는 도형의 성질을 지도하기 전에 작도를 지도하기 때문에, 작도의 이유를 실제 종이를 오려 보는 활동을 통해 설명하고 있다. 그러나 북한의 교과서에는 곳곳에서 작도를 다루고 있으며, 도형의 성질과 관련하여 작도의 타당성을 설명하고 있다. 작도의 이유를 구체적 활동에 의해 설명하는 것과 논리적으로 설명하는 것은 나름대로 장단점이 있을 수 있다. 형식적 조작이 가능한 시기에는 논리적으로 설명하는 것이, 개념을 간명하게 그리고 명료하게 받아들이는데 도움을 줄 수 있을 것이며, 궁극적으로는 개념을 보다 확고히 하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 그러므로 피타고라스의 정리를 다룬 후, 피타고라스 정리와 관련된 다양한 작도문제를 다루어 보도록 하고, 작도의 이유를 논리적으로 설명해 보도록 하는 방법을 고려해 볼 수 있을 것이다.

본 논문에서는 남북한 교과서에 나타난 피타고라스의 정리를 비교함으로써, 북한 교과서에서는 다루지만 남한 교과서에는 보이지 않는 부분을 중심으로, 교육적으로 활용 가치가 있다고 생각되는 부분에 대해 언급하였다. 그러나 이러한 작업이 구체화되기 위해서는 보다 세밀한 분석이 요구되며, 특히 학생들이 실제로 학습하는데 있어서 부담을 느끼지 않는지에 대한 실험연구가 필요하다.

피타고라스의 정리는 수학적으로도, 그리고 교육적으로도 매우 중요한 가치를 지니고 있다. 그러나 직관적 파악이 쉽지 않기 때문에 여러 가지 구체적 활동이 전제되어야 하며, 다양한 활용 가능성 뿐만 아니라 논증기하의 전형으로써 학생들이 피타고라스의 정리를 접할 기회가 마련되어야 할 것이다. 이러한 점에서 보다 효율적인 지도계열, 방법, 내용의 선정에 대한 연구가 이루어질 필요가 있다.

참 고 문 헌

교육부(1994). 중학교 수학과 교육과정 해설. 서울:대한교과서주식회사.

______(1999). 중학교 교육과정 해설(III) -수학, 과학, 기술・가정-. 서울:대한교과서주식회사.

______(2001). 고등학교 교육과정 해설 -5수학-. 서울:대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002). 교사용 지도서 수학 5-가. 서울:대한교과서주식회사.

강후전(1990), 수학(기하) 고등중학교 4. 평양: 교육도서출판사.

구광조・황선욱(2000). 중학교 수학 3. 서울:지학사.

김삼태・이식(1999). "남・북한 중등학교 수학 교과서의 영역별 내용 비교 분석-대수, 통계, 해석, 기하 영역을 중심으로-". 한국수학교육학회시리즈 A 수학교육, 38(1), 1-14, 한국수학교육학회.

김연식, 김흥기(1998). 중학교 수학 3. 서울:두산동아.

김용운, 김용국(1994). 수학사대전. 서울:도서출판우성.

김응태 외(1998). 중학교 수학 3. 서울:한샘출판.

류해동 외(1990). 수학(기하) 고등중학교 2. 평양:교육도서출판사.

박문환(2001). 남북한 중등학교 수학교육 비교분석. 서울대학교 학위논문.

신성균 외(1996). 남북한 초등학교 수학과 교육과정 및 교과서 비교 분석 연구. 서울:한국교육개발원.

오병승(2000). 중학교 수학 3. 서울:바른교육사.

최택영 · 김인영(1998). “남북한 수학 교과서의 비교 -북한의 고등중학교(중등반) 기하를 중심으로-”. 한국수학교육학회시리즈 A 수학교육, 37(1), 35-54, 한국수학교육학회.

현진오 · 강태석(1999). “남북한 수학교과서의 내용체계 및 용어에 대한 비교분석”. 한국수학교육학회시리즈 A 수학교육, 38(2), 105-128, 한국수학교육학회.

Loomis, E. S.(1972). The Pythagorean Proposition. NCTM.

Comparative Study on Teaching of Pythagorean Theorem in South and North Korea

Park, Moon Hwan(Inchon National University of Education)

Researchers have started to conduct comparative studies of mathematics education in South and North Korea. Most of these studies have a tendency to compare with the curriculum of South and North Korea in the macroscopic standpoint. But microscopic comparative studies on each topic of school mathematics have not been attempted yet. Microscopic studies as well as macroscopic studies are required to prepare for unification the curriculum of South and North Korea.

This paper attempts to compare the contents related pythagorean theorem which is dealt with in secondary school mathematics textbook of South and North Korea. Through this study, meaningful differences between textbooks are founded and some implications are obtained. Specially, 'cutting off and rearranging' method needs to be taken into consideration for active learning. Also the construction of the figure using the pythagorean theorem needs to be dealt with in order to develop the logical thinking.