대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.2, 161-191. June 2002

6차와 7차 교과서 분석을 통한 그래프 지도 방안

송정화* 권오남**

Ⅰ. 서 론

그래프는 다양하고 수많은 정보를 한눈에 알아보기 쉽게 나타낼 수 있는 중요한 표현도구이다. 그래프는 학교 수학에서 대수, 기하, 통계 등 수학의 여러 영역에서 수학적 개념 이해를 좀 더 깊고 풍부하게 강화시키고, 그 내용을 더 높은 수준으로 전이시키는데 핵심적인 표현 수단일 뿐 아니라, 각 영역을 연결하고 전체의 흐름을 통합하는데 있어서도 중요한 역할을 한다. 특히 함수의 그래프는 역사적으로 미적분학을 포함하여 수학에서 다른 중요한 발견을 촉진하는데 핵심적인 역할을 해왔다. 또한 그래프는 수학 이외의 타학문에서, 그리고 우리의 일상생활에서 세상의 현상과 변화를 설명하고, 조직하고, 요약하고, 예측하게 한다. Williams(1993)는 이런 그래프를 문화적인 가공물로 보기도 하였다. 이처럼 그래프는 수학의 개념화에서 효과적이고, 다양한 영역에서 그 경향을 이해하도록 하며, 우리가 살고 있는 세계를 반영하는 강력한 수단이라 할 수 있다. 학교수학의 목표가 미래 사회에서 지적인 삶을 영위하도록 하는 것임(교육부, 1997)을 상기하여 볼 때, 그래프에 대한 내용은 소수의 전문가뿐 아니라, 보통 사람들이 현실 세계를 이해하고 일상생활을 하는데 있어 꼭 필요한 매우 중요한 요소인 것이다. 따라서 학교 수학에서 그래프 학습은 그 의의가 크다고 할 수 있다.

하지만 현 학교수학에서는 주로 추상적이고 논리적인 기호조작의 대수식에 많은 시간을 할애하고 있다. 교과서에서 제시된 대부분 문제는 주로 대수적 조작으로 풀리도록 되어있고, 또한 제시된 그래프 과제 대부분은 초등학교 학기말 부분에 나오거나 여분의 주제로서 보통 정보를 나열하는 정도로 막대그래프, 그림그래프, 원그래프, 꺾은선그래프의 형태로 접근하고 있다(Demana, Schoen, & Wait, 1993; Yerushalmy & Schwartz, 1993). 상위학년에 가서도 그래프는 대수로 가기 위한 수단이 될 뿐 그래프 내용 자체는 거의 강조되지 못하고 있다. 이로 인해 학생들은 그래프를 그리고 해석하고 이해하는데 많은 어려움과 오류를 범하고 있고, 문제 상황에 그래프 표상을 잘 결합하지도 못하며, 이것이 문제를 해결하는 하나의 도구이며 필수적일 수도 있다는 사실을 잘 인식하지 못하고 있다(Arcavi, Moschkovich, & Schoenfeld, 1993; Dreyfus, & Eisenberg, 1991; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Dugdale, 1993; Janvier, 1987; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; Mevarech, & Kramarsky, 1997; Monk, & Nemirovsky, 1994; Vinner, & Dreyfus, 1989). 국내 선행 연구에서

* (주) 교원
** 이화여자대학교

도 대부분 학생들이 그래프 과제에서 좌표값을 찾거나, 그래프에서 단순히 자료를 읽는 문제에서는 별 어려움을 겪지는 않았으나, 기울기 또는 기울기에서의 변화량에 대한 정보 분석, 전체적인 그래프의 질적 해석, 그래프를 실세계의 상황과 연결시켜야 하는 문제 등에서는 많은 어려움을 호소하는 것으로 밝혀졌다(김태선, 1998; 최선준, 2000).

이들 연구를 보면, 그래프의 전반적인 내용에 초점을 맞추기보다는 주로 함수에 초점을 맞추어 그래프는 부수적으로 연구되어져 왔다. 최근 들어 테크놀러지의 발달로 시각화의 중요성과 함께 그래프가 부각되고 있기는 하나, 이는 단지 그래프 학습을 돕기 위한 여러 소프트웨어들의 소개나 조작 방법, 그리고 그것들의 발달에 대한 규준과 이론적인 고려들이 대부분일 뿐, 수학교육에서 그래프 교육에 대한 연구는 거의 이루어지지 않은 상태이다. 그래프가 수학교육에서 갖는 의의와 중요성을 논의하고, 학교 수학에서 실제로 그 내용이 어떻게 전개되고 다루어지는지 교수학적인 분석을 통해 바람직한 교육 방향을 모색할 필요가 있음에도 불구하고, 실제로 우리나라에서는 이에 대한 연구는 거의 없는 실정이다. 따라서 본 연구는 학교수학에서 다루어지는 그래프에 대한 전반적인 이론적 고찰과 함께, 학교수학에서 중심을 차지하고 학생들의 개념 이해에 직접적으로 영향을 주는 교과서에서 그래프에 관한 내용을 분석하여, 바람직한 그래프 교육의 방향을 구축하고 시사점을 제시하는데 그 목적이 있다. 이에 따라 본 연구는 수학교육에서 그래프 교육에 대해 고찰한 후, 현재 사용되고 있는 교과서를 바탕으로 실제로 그래프 내용이 언제, 어떤 비율로 다루어지고 있고, 그 계열화는 어떻게 되는지, 그리고 그래프 과제를 범주화하여 어떤 과제 부분이 어느 정도 다루어지고 있는지를 분석하여 그래프 교육의 바람직한 지도 방향을 모색하고자 한다.

II. 수학 교육에서 그래프

보통 그래프는 기호나 문자로 의미를 전달하는 것을 제외한 모든 것을 가르킨다. Fry(1984)는 그래프를 이차원 공간에서 점, 선, 면적의 위치에 의해서 전달되는 정보로 보고, 지도나 일기도, 사진, 설계도와 같은 것들을 포함한 일반적인 그림 전체를 그래프라 정의하였다. Wainer와 Grillan & Lewis는 그 정의를 좀 더 좁혀, 그래프란 양을 나타내기 위해 높이나 길이와 같은 공간적 특성들을 사용하여 정보를 제시하는 방법으로 정의하였는데(Friel, Curcio, & Bright, 2001), 이것이 학교 수학에서 보통 다루어지는 그래프이다.

그래프가 수학에서 이용되기 시작한 것은 데카르트 이후라고 할 수 있다. 데카르트가 좌표(x, y)라는 개념을 도입함으로써 대수학과 기하학이 하나로 통합되는 계기가 되었고, 함수의 개념을 명확히 곡선의 방정식으로 나타내는 획기적인 표현법을 마련하였으며, 대수 방정식을 그래프로 나타내어 직관적으로 파악하는 것이 가능하게 되었다. 문제를 시각화하기 위해 어떤 상황의 그래프를 그리기 시작한 것은 1360년 Nichole Oresme에 의해서이다. 그는 선의 길이나 직사각형의 면적과 같은 기하학적 요소를 변수의 값으로 표현하여 그래프를 그림으로써 그 당시 변화율이 문제가 되었던 운동역학 문제를 해결할 수 있었다. 이런 그래프는 후에도 형식적인 수학적 추론을 위한 모델로 중요한 역할을 하였고, 미적분학 발달에 지대한 영향을 미쳤다. 또한 현재 쓰이고 있는 대부분 통계 그래프는 최근에 발명된 것들이다. 그림그

래프, 선그림(line plot), 막대그래프, 원그래프, 히스토그램은 1700년도 William Playfair에 의해, 줄기-잎 그림, 상자 그림은 1977년 John Tukey에 의해 만들어졌다. 수학의 역사에 비해 그래프의 역사는 짧은 편이며, 다루어지는 종류도 일부분에 해당된다. 하지만 수학에서 이런 그래프의 도입은 수학사 발달에서 획기적인 도약점이 되었으며, 이로 인해 지금과 같이 여러 가지 추상적 개념들이 발달될 수 있었다. 이렇듯 그래프는 수학에서 아주 중요한 위상을 차지하고 있다.

이 장에서는 그래프가 수학교육에서 갖는 의의와 중요성, 학교 수학에서 그래프 교육의 위상, 그리고 최근 그래프 교육의 동향을 NCTM을 중심으로 논의하여 보고, 그래프 과제내용에 대해 고찰해나갈 것이다.

(1) 수학교육에서 그래프가 갖는 의의와 중요성

수학에서 다중 표현은 개념들의 심층 이해를 위해서 필수적이다. 수학에서는 대수식, 수치적인 값을 나타내는 표, 그래프가 주된 표현 요소인데, 이러한 표현들을 서로 연결하여 기하학적인 변형과 대수 연산 사이의 연결성을 탐구하고 문제를 해결해나가는 것은 중요하다. 이를 통해 수학을 대상으로 인식하여 구조적으로 보는 관점과 수학을 절차로 인식하여 조작적으로 보는 관점을 조화롭게 발달시켜 이해를 강화시켜나가는 것도 중요하다.

여러 표현들 중 그래프는 수치적인 체계와 기하학적인 체계를 통합한 형태로서, 대수 · 통계 · 기하 각 영역에서 뿐 아니라, 여러 수학 영역들을 연결시킬 수 있다는 점에서 수학교육에서 큰 의의를 갖는다. 뿐만 아니라 여러 정보들을 전달하는 매개체로서 수학적 의사소통면에 있어서도 중요한 역할을 하고, 자료들의 분석 단계에서 수치적 형태로는 쉽게 인식되지 않는 수학적 관계와 특성들을 쉽게 추측하고 발견하게 한다. 또한 그래프는 지식의 과정적 측면과 대상적 측면을 모두 포함하고 있어서 그 교육적 가치는 크다고 말할 수 있다. 이에 Tall(1991)은 그래프가 미분에 대한 직관적인 느낌을 발달시키는데 도움이 됨을 강조하면서, 고등 수학에서 그래프가 기본이 된 시각적인 사고의 중요성을 주장하였다. 그는 이런 시각화를 이용하면 수학 개념의 전체적인 형태를 제시하고 그 개념의 강점, 약점, 성질 등을 보여줄 수 있다는 장점을 들면서 그래프가 중심이 된 "Graphic Calculus"을 제시하기도 하였다.

또한 그래프 표현은 그것만이 가지고 있는 특징으로 인해 수학교육에서 중요한 위치를 차지한다고 할 수 있다. 대수식은 간결하고 정확하며 변수들의 관계를 쉽게 해석할 수 있다는 장점을 가지고 있으나, 직접적으로 해당하는 값을 읽어 그 식을 해석하거나 과정을 파악하기에는 어렵고, 변화양상을 시각적으로 파악하기에 어렵다는 단점을 가지고 있다. 이와 달리 표는 표현하기에 편리하며, 해당하는 값을 직접 정확하게 읽을 수 있다는 장점과 함께, 패턴을 발견하는데 있어서 유용한 도구라 말할 수 있다. 이는 주로 그래프를 그리기 이전에 문제 상황을 수치적으로 탐구하고 조사하는데 이용되며, 양들 사이의 관계를 일반화하는 대수식 발견에도 유용하다. 또한 표는 산술 과정에 대한 이해를 발달시키고, 이것은 좀 더 형식적인 대수 학습 이해에 도움이 되기도 한다. 하지만 표로는 변하는 양으로서 변수를 인식할 수 없고, 변화의 형태나 현상의 주기성을 관찰하기에 적합하지 않으며, 하나의 실체나 대상으로 그 관계들을 조작하기에는 어렵다는 단점

을 갖는다. 이런 두 표현과는 달리 그래프는 분포나 함수, 변화상태, 주기성, 패턴의 성질에 대한 전체적인 경향과 변화를 한눈에 알아볼 수 있다. 비록 그래프가 물리적인 제약으로 인해, 예를 들면, 그래프를 표현하는 선의 두께와 같은 것들로 인해 그 정확성에 있어서는 대수식이나 표에 비해 뒤떨어진다고는 하나(Freudenthal, 1983), 그래프는 정보들을 통합적으로 동시에 표현할 수 있고, 많은 데이터들을 표현하는 것이 가능하며, 앞으로의 경향을 예측하는 것도 가능하다. 그리고 방정식 · 부등식의 해 표현, 함수와 관계 표현, 기하학적인 표현 등을 통해 다양한 상황을 모델화함으로써 문제 상황의 전반적인 구조를 시각적으로 표현할 수도 있다.

특히 그래프는 함수 학습시 그 의의가 크다고 볼 수 있다. 함수 개념의 발생 맥락에서 보면 함수는 물리적, 사회적, 정신적 세계에서 변수 사이의 종속성을 발견해서 관계를 조직하기 위한 도구라 할 수 있다. 이런 함수에서는 역동적인 측면이 중요하다. 변화의 측면을 강조하기 위해서는 여러 변화 현상을 다루어 보는 중에 종속 관계를 파악하고, 기하학적 사상과 같은 특성을 가진 여러 현상들을 다루어 봄으로써 점진적인 수학화에 의해 이런 현상들을 통합해서 일반적인 함수 개념을 형식화할 수 있어야만 한다(정영옥, 1997). 따라서 그래프를 그리는 것과 그것을 해석하는 것은 함수에 대한 기본 이해가 시작되는 곳이며, 함수의 여러 가지 특징은 공식이나 표보다는 그래프에서 더 쉽게 인식될 수 있다고 할 수 있다. 그리고 어린 학생들이 친숙한 물리적 현상을 나타내는 그래프나 대수 방정식으로 쉽게 묘사되지 않는 함수 관계의 그래프를 접하게 되는 경우, 이러한 그래프들은 후에 변수로 함수 관계를 묘사하는 그래프에 대해 학생들이 갖게 될 개념화에 질적인 기초를 주게 될 잠재성 때문에 그 의의가 크다고 볼 수 있다(Dugdale, 1993). Freudenthal도 Dugdale과 마찬가지로 변화와 종속 관계 개념에 기초한 함수의 교육학적 접근을 강조하면서, 초등학교 아이들에게 함수를 도입할 때 그래프로 도입할 것을 주장하였다(Kieran, 1993). 또한 Sfard(1992)는 함수를 실체나 대상으로 인식하는 것이 중요하다고 제시하면서, 이를 위해서는 그래프 표현을 장려해야 한다고 주장하였다. 그에 의하면, 함수를 실체나 대상으로서 인식하기 위해서는 먼저 전체로 조직할 수 있어야만 하는데, 그래프 표현은 무한히 많은 함수의 요소들이 부드러운 선으로 통합되어 전체로서 동시에 포착될 수 있으므로 함수의 초점이 대수적 표현으로부터 그래프 표현으로 옮겨가야 한다는 것이다.

이런 그래프의 특성들은 수학적 개념의 심층 이해를 돕고, 의사소통과 개념화라는 점에서 완벽한 역할을 한다. 가설화와 실험 · 추론 · 탐구의 과정을 통해 활동적으로 수학에 참가하게 하여 지나치게 알고리즘화 되고 형식화된 수학에서 벗어나게 함과 동시에, 학습시 동기 유발을 일으키는 것은 물론, 학습자로 하여금 수학의 유용성 및 심미성을 가지게 할 수도 있다. 이와 같이 그래프는 수학교육에서 중요한 역할을 하며, 중요한 의의를 갖는다. 따라서 수학교육에서 그래프는 다른 표현들과 더불어 강조되어야만 하며, 충분히 학습되어질 수 있도록 그 노력이 뒤따라야 할 것이다.

(2) 학교 수학에서 그래프 교육 위상

시각적인 표현이 매우 유용하고 같은 아이디어를 나타내는데 있어서 언어적 · 대수적 표상보다 훨씬 더 이해하기 쉬움에도 불구하고, 지금까지 학교교육 현장에서는 그래프 자체 내용

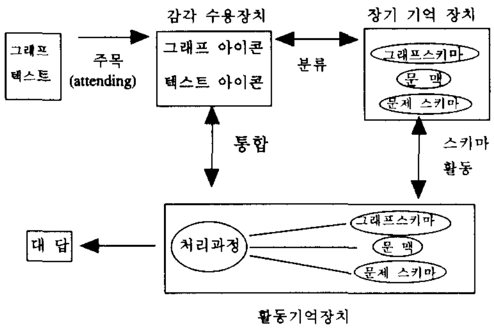
에 초점이 맞추어지기보다는 단지 대수로 가기 위한 하나의 수단밖에는 되지 못해왔다. 그래프가 제시되어졌다 하더라도 문제 해결 방법에 있어서는 주로 대수식 위주로 되어 왔으며, 그래프 자체를 해석하여 그래프에 초점을 둔 해결 방법은 강조되어 오지 못했다. 이렇듯 학교 수학에서 그래프 교육의 위상은 그리 높지 않았는데 이것은 3가지 차원에서 생각해 볼 수 있다.

첫째, 수학의 본질과 관련된 철학적인 측면에서 논의해 볼 수 있다. 20C 부르바키 학파를 중심으로 공리 중심의 구조주의 수학이 형성되면서 공리화 될 수 없는 것은 아예 수학이 아니라고 인정하였다. 수학이란 엄밀한 형식을 갖추어야만 하고, 산술화 되어져야만 하며, 그렇지 않으면 존재하지 않는다는 믿음이 대부분이었다. 이런 부르바키 학파의 형식·논리주의의 영향으로 현대 수학에서 직관은 배제되어 왔고, 시각적인 것은 수학의 본질이 아니며, 수학을 왜곡하는 것으로 인식되어 왔다. 단어 없는 증명은 증명이 아닌 것으로 되었고, 시각적인 방법은 수학에서 기껏해야 기억력을 증진시키는 부차적인 것으로만 여겨지게 된 것이다(Dreyfus, & Eisenberg, 1991). 학교 수학에서도 이런 상황은 그대로 반영되어, 주로 대수적 측면과 형식적 측면이 중심을 이루게 되었다. 수학에서 시각적인 방법은 수학적인 능력이 부족한 사람들이 사용하는 수준이 낮은 방법으로 인식되어졌고, 주로 대수화, 기호화, 산술화를 통한 분석적 방법이 강조되었다. 따라서 시각화를 통한 접근법은 기피되어졌고, 그래프 표현에 의한 학습도 그 자체 내용에 초점이 맞추어지기보다는 대수로 가기 위한 부수적인 것으로 행해져왔다.

둘째, 그래프를 이해하는 인지적인 측면에서 논의해 볼 수 있다. 보통 도식화는 매우 복잡한 정보를 간단하게 압축하여 표현할 수 있는 방법으로, 그림에 포함된 전체 정보를 문자 형태로 표현한다면 부가 설명이 너무 많아져 훨씬 많은 공간을 차지하게 되고, 그 의미가 오히려 더 흐려질 가능성이 있다(Skemp, 1983). 또한 같은 정보를 포함하더라도 도식적 표현에서는 분석적 표현에서보다 정보의 많은 것들이 한눈에 알아보기 쉽게 명백하게 제시된다. 하지만 시각적인 표현은 언어적-대수적 체계에 비해 의사소통이 어렵고 사회화되기 어렵다(Skemp, 1983). 즉 이런 도식적 표현은 그것에 익숙한 사람들만이 이해하기 쉬울 뿐 그것을 처음 접하거나 익숙하지 않은 사람들이 직접적으로 이해하기에는 어렵다는 것이다. 그래프는 두 개나 그 이상의 변수 사이 관계의 특징들을 나타내고, 두 개의 다른 정신적 대상을 언급하기 때문에, 이것을 이해하기 위해서는 거기에 따른 인지과정이 필요하게 되고, 그래프 규약을 알아야만 한다. 또한 그래프의 공간 배열은 실제의 공간 배열과 차이가 있음을 알아야만 한다. 어떤 경우에는 실제 상황과 인지적으로 정반대로 많이 틀리기 때문에 그래프 표현을 이해하는 것은 그리 간단한 것이 아니다.

Fisher(1992)는 그래프를 인식하여 그래프를 이해하는 과정을 [그림1]과 같이 4단계의 모델로 제시하였다. 그래프 과제를 이해하기 위해서는 우선 표현된 그래프에 주목하는 과정이 선행되어야 한다. 이렇게 그래프 자극이 처음에 인식되고 주목되었을 때 감각 수용장치에서는 그래프 아이콘과 텍스트 아이콘이 만들어진다. 이것들은 장기 기억장치에 저장되어 있는 적절한 그래프 스키마나 그래프 자극의 지적 모델(mental model) 유형, 문제 시나리오에 맞추어져 분류가 일어나게 된다. 여기에서는 그래프의 문맥이 그래프가 읽혀지는 방법에 영향을 줄 수 있다는 점을 고려하여 문제 문맥의 중요

성을 강조하고 있다. 분류가 일어나는 동안 활동 기억장치에서는 적절한 스키마 활동에 의해 입력된 모델이 놓여 처리된다. 이 과정에서 그래프에 담겨진 정보를 통합하여 이를 모델에 맞추어서 문제에 대한 답을 결정하게 되는데, 이러한 과정들은 항상 순차적으로만 일어나는 것은 아니다.



[그림1] 그래프 이해 과정 (Fisher, 1992)

Fishbein(1987)도 다이어그램 모델의 직관적인 표상성을 언급하면서, 규칙 및 제약을 지닌 다이어그램은 실제 대상에 대한 직접적인 이미지가 아니므로 그 중재적 구조에 대한 명확한 이해가 없다면 아무 의미도 전할 수 없다고 하였다. 그래프도 다이어그램의 일부로서 이것을 해석하고, 이를 이용하여 문제를 해결하기 위해서는 그 개념적 중재 구조, 다시 말해 수학적 함수에 대한 이해가 필요하다. 이러한 이해 없이 그래프를 직접적으로 즉시 해석하는 것은 불가능하다는 것이다. 이런 그래프는 원래 현상과 관련된 규약체계를 분명하게 이해한 후에야 직관적 도구가 될 수 있으며, 그리고 나서야 비로소 그래프 표현은 내면화되고 자동화될 수 있다(Fishbein, 1987).

이처럼 그래프의 이해와 해석에서 시각적인 해독이 필수적인 요소이기는 하나, 그것만으로는 충분치 않다는 것을 알 수 있다. 그래프를 이해하기 위해서는 그래프 규약, 즉 그래프의 구문론적인 요소와 의미론적인 요소와 더불어 그 개념적 중재 구조를 익혀야 하고, 그래프에 담긴 상황이나 문맥까지 이해하여야만 한다. 또한 그래프 이해 과정에서도 주목이나 통합의 과정과 같이 단순한 지각에 의한 처리 과정뿐만 아니라, 분류와 스키마 활동과 같은 기억장치 과정들이 존재하므로, 그래프 정보를 이해하기 위한 그래프 스키마나 지적 모델이 따로 존재한다는 것을 알 수도 있다. 이렇듯 그래프를 이해하는 것은 그리 간단한 문제가 아니며, 복잡한 인지 과정이 요구되고, 이로 인해 학생들은 그래프를 어려워하고 기피하는 경향이 있다.

셋째, 학자들의 학문적 지식이 학교에서 가르쳐지는 지식으로 변환될 때 나타나게 되는 교수학적 변환의 측면에서 생각해 볼 수 있다. 수학자들은 다방면의 수학적 지식들을 연결하여 새로운 학문적 지식을 만들어 낸다. 하지만 수학교육자들은 이런 복잡한 수학 주제를 학생들에게 가르치기 위해 지식을 좀 더 작은 덩어리로 잘라서 그것이 수학적 관점으로부터 논리적인 순서로 순서화 될 수 있도록 단순화시키려 노력한다. 따라서 교과서의 지식은 수학자의 지식과는 달리 개념과 절차 사이의 연결이 제거되고 지식들이 서로 연결되지 못한 채 처음과 끝이 있는 고립된 형태로 구조화되어 선형적으로 나타나게 된다(Dreyfus, & Eisenberg, 1991). 이렇게 선형화되고 구획화된 지식은 알고리즘과 절차를 강조하는 방법으로 공식화된다. 보통 학교에서 가르쳐지는 지식은 그 앞뒤 선후 관계가 암묵적이라기보다는 명백하게 제시되어야만 하고, 학습자가 이미 소유한 지식과 가능한 한 유사한 방법으로 제시되어야만 하며, 가능하면 새롭지 않도록 해야 하는데, 이것은 주로 알고리즘이나 또는 절차를 세우는

수단에 의해서 성취되는 경향이 있다. 이를 종합해보면 순차적이고 명백하게 공식화된 언어나 기호 형태의 표현이 학교수학에서 제시하기 더 적절하다는 것이다. 즉 학교나 교사는 교수학적 변환이 쉬운 언어형태의 표현을 더 선호하고 있으며, 이것을 학생들에게 제시할 때 가장 효율적이라고 생각한다는 것이다. 그러므로 학생들도 도식적 표현보다는 언어 형태의 표현을 더 선호하게 되고, 그만큼 그래프 교육은 그리 강조되어 오지 못했다고 볼 수 있다.

학습자들은 자신과 가장 친숙한 것을 기억하고 가장 친숙한 표현을 사용한다(Poppe, 1993)는 점을 볼 때, 많은 선행 연구의 결과처럼 대부분 학생들이 그래프를 어려워하는 것은 당연할런지도 모른다. 비록 언어적 표현이 주가 되는 대수화·산술화가 엄밀한 수학적 사고를 가능하게 하고 교수학적 변환이 쉽다 하더라도, 그림을 그려서 생각하는 것은 매우 중요한 수학적 사고 전략이며, 시각화 기능 없이 수학은 의미있게 전개되기 어렵다(우정호, 2000). 최근 컴퓨터, 비디오, TV등의 영상매체의 발달로 인해 시각적 특성을 선호하는 학생들을 고려하고, 학습이란 개인에 의해 의미 충실하게 되는 관계적 이해라는 관점을 고려할 때, 수학 교육을 위한 이미지의 활용은 더욱 강조되어야만 할 것이며, 그래프 교육도 이와 더불어 강조되어야만 할 것이다.

(3) NCTM에 나타난 그래프 교육의 동향

최근 NCTM에서 발표된 '학교 수학을 위한 원리와 규준(Principle and Standards for School Mathematics, 2000)'에서는 그래프 표현의 중요성과 함께 각 학년별로, 각 영역별로 그래프를 다른 표현들과 통합하여 교육할 필요성을 언급하고 있다.

대수 영역에서는 학생들이 함수를 학습할 때 다양한 표현을 충분히 경험할 것을 제시하면서 그래프의 중요성을 강조하고 있다. 6-8학년에서는 다양한 패턴과 함수를 여러 표현들로 표현·분석·일반화 하고, 이것들을 사용하여 상황화된 문제를 모델화하고 해결할 수 있어야 함을 강조하고 있다. 또한 그래프로 선형 관계뿐 아니라 비선형 관계에서도 양의 관계를 표현하고 이해하도록 하여 변화 패턴을 모델화하는 함수에 초점을 맞출 것을 강조하고 있다. 그리고 여러 가지 상황에서 그래프를 통해 변화량과 누적된 전체량 사이의 관계를 명확하게 발달시키도록 하여 미적분학에 대한 기초를 쌓도록 하고 있다. 9-12학년에서는 다양한 축척에서 함수의 그래프를 관찰하도록 하여 각 함수의 특징을 파악하도록 하고, 기호 조작과 그래프를 해석하는 능력이 구체적으로 어떻게 관련되는지를 보도록 하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석하여 결론을 이끌어 내도록 하고 있다. NCTM의 대수 영역에서는 변화현상이나 변화패턴에 초점을 맞추어 그래프를 통해 함수의 특성들을 고찰하고, 문제 상황을 해석하고, 예측하도록 하여 다양한 현상과 관계들을 분석할 수 있는 수학적인 힘을 기르도록 하고 있다.

기하 영역에서는 학생들이 좌표 평면을 통해 어떤 대상의 위치를 정하고, 좌표 기하와 다른 표현을 사용하여 공간 관계를 설명할 수 있도록 하고 있다. 특히 중·고등학생들은 다양한 시각적인 표현과 좌표 평면을 이용하여 문제를 분석, 해결하고, 그것들의 결과를 증명할 수 있어야만 하며, 도형의 특징들을 발견할 것을 강조하고 있다. 6-8학년에서는 도형의 특징들을 표현하고 탐구하기 위해 좌표체계를 사용할 수 있어야 하고, 대수적으로도 그 특징을 설명할 수 있어야 함을 강조하고 있다. 9-12학년에서는

카테시안 좌표체계뿐만 아니라, 구면 좌표체계나 극 좌표체계가 간단하게 다루어질 필요성과, 문제에 따라서 어떤 좌표계가 더 간단하고 유용한지 판단할 수 있는 능력의 중요성을 강조하고 있다. 이처럼 그래프는 기하영역을 대수 영역과 연결시켜 학생들로 하여금 스스로 도형의 성질과 특성들을 탐구해나갈 수 있도록 하고 있으며, 이러한 것들을 대수식과 관련하여 보게 하는 등 여러 수학적 사고를 연결시킬 수 있도록 하고 있다.

데이터 분석과 확률 영역에서는 데이터를 모아서 조직하고 나열할 수 있어야 하며, 자료를 분석하기 위해 적절한 통계적 방법을 선택하고 사용할 수 있어야 할 것을 제시하면서 그래프를 강조하고 있다. 6-8학년에서는 다양한 표현들과 다양한 그래프가 어떻게 데이터들의 중요한 특징들을 표현하는지를 고려하여 적절한 그래프를 선택하고 구성하고 사용할 수 있어야 함을 강조하고 있다. 또한 학생들은 그래프로 데이터들의 관계를 분석하고 고찰할 수 있어야만 하고, 그래프 모양으로 관계들의 특성들을 결정하고 예측하도록 장려하는 것이 중요하다고 하고 있다. 9-12학년에서는 이 외에도, 두 개의 측정 데이터 사이에서 테크놀러지를 이용하여 가장 적합한 회귀직선과 회귀방정식, 상관계수를 계산할 수 있어야 하고, 상관 계수와 그래프 모양, 변수사이 관계를 설명할 수 있어야 하며, 이를 통해 앞으로의 경향도 예측할 수 있어야 한다는 점을 강조하고 있다. 예전에는 단지 모아진 데이터를 가지고 손으로 그래프를 그리는데 많은 시간을 보냈던 것에 비해, 최근에는 테크놀러지를 활용하여 그래프를 통해 자료를 분석하는데 더 많은 비중을 두고 있다.

수와 연산 영역에서는 학생들이 연산의 의미와 그러한 연산들이 서로 어떻게 관련되어 있는지 이해할 것을 강조하면서 여기에서 그래프가 이용될 수 있음을 보이고 있다. 9-12학년에서 식의 연산의 의미를 그래프를 통해 확인하도록 하고 있고, 연산의 이해를 새로운 수체계로 확장시키는데 그래프를 이용하도록 하며, 좌표체계에서 2차원 벡터를 표현하고 벡터의 합을 결정하도록 하고 있다.

측정 영역에서는 Computer-Based Laboratories (CBL)를 이용하여 다양한 그래프를 만들도록 하고 있는데, 이를 선형관계와 비율, 변화율과 기울기의 이해를 발달시키는 경험과 연관시켜 다른 영역과 연결하도록 장려하고 있다. 이런 경험들은 과학 시간과 함께 통합하여 시도할 수 있다. 이는 측정에서 주제에 대한 학생들의 이해를 풍부하게 할 뿐만 아니라, 데이터 표현과 분석에 대한 연구에서 도약점이 되기도 한다.

이상에서 고찰한 바와 같이, 그래프는 과거에 비해 수학의 전 영역에서 광범위하게 이용하고 있으며, 그 중요성도 점점 더 강조되고 있다. 최근 NCTM에서 나타난 그래프 교육의 동향을 보면, 그래프는 예전처럼 단지 대수적인 특성들을 확인하거나 대수의 내용을 도입할 때 부수적으로만 활용되는 것은 아니다. 그래프 자체에 초점이 맞추어져 그래프에서 기울기나 기울기의 변화량에 대해 정보를 분석하고, 전체적인 모양을 파악하여 해석 · 분석하며, 그래프를 실세계의 상황과 연결시키고, 그래프를 보고 물리적 사건을 추측하게 하는 등 다양하게 학습하도록 하고 있다. 즉 문제해결에 있어서 핵심적인 중요한 도구로 활용될 수 있도록 강조하고 있다. 특히 컴퓨터 테크놀러지의 발달로 인해 이런 그래프 학습은 예전과는 다른 방법으로 좀 더 역동적이고 통합적으로 새롭게 학습될 수 있음을 제시하고 있으며, 과거에 비해 그래프를 통합한 예제들의 중요성을 많이

강조하면서, 이를 통해 강력한 개념 구성을 할 것을 강조하고 있다.

(4) 그래프 과제 내용에 대한 고찰

그래프에 대한 접근법은 크게 두 가지로 구별할 수 있다. 그래프를 읽을 때나 그릴 때 공간적으로 초점을 어디에 두었는지에 따라 점별 접근, 국소적(local) 접근, 광의적(global) 접근으로 나눌 수 있고, 양적인 값에 초점을 두었는지 또는 그렇지 않은지에 따라 양적 접근과 질적 접근으로 구분할 수 있다. Freudenthal(1983)에 의하면, 점별 접근이란 그래프를 해석할 때 오직 한 점만을 보는 것으로, 주어진 독립변수 값에 대해 종속변수의 값을 읽거나 또는 반대로 값을 읽는 것을 의미한다. 국소적 접근이란 한 점 근방에서 그래프 움직임을 상대적으로 보는 것으로, 양과 음, 증가·감소, 연속, 최대·최소, 가파른 정도, 불연속으로 건너뛰는 지점, 직선인지 구부러졌는지, 오목한지, 볼록한지 등을 보는 것을 말한다. 광의적인 접근이란 국소적인 특징을 비교하는 것으로, 국소적인 접근이 한 점 근처에서 그래프의 움직임을 보는 것이라면, 광의적인 접근은 어떤 구간을 기준으로 해석하는 것을 말한다. 즉 그래프를 광의적으로 읽는 것은 양의 구간, 음의 구간, 증가·감소 구간, 연속인 구간, 극소값·극대값, 단조성, 진동성, 다양한 종류의 점근선 움직임, 주기성, 선형성이나 이차곡선 또는 다른 대수적 특징, 지수 함수적 특징, 삼각함수적 특성과 같은 것들을 알아보는 것을 의미한다. 양적 접근이란 그래프에서 수치적인 값에 초점을 맞추는 것으로, 주로 축에 정해진 양을 기반으로 하여 해석이나 구성을 하는 것을 의미한다. 반면에 질적 접근이란 그래프를 보고 두 변수 사이의 관계나 의미를 구하는 것으로, 정확한 양에 기초한다기보다는 그래프 그 자체에 초점을 두어 그래프의 대략적인 경향을 스케치하거나 해석하는 접근을 말한다. 이런 질적 접근은 주로 광의적인 접근과 연결되고, 반대로 양적 접근은 국소적인 접근과 연결되는 경향이 있다.

Leinhardt 등(1990)은 함수 그래프와 관련된 내용을 그래프 활동과 그래프 과제로 나누었는데, 그래프 활동은 해석과 구성으로, 그래프 과제는 예측, 분류(classification), 번역, 축척(scaling) 4가지로 범주화하였다.

우선 그래프 활동에서 해석이란 주어진 그래프나 또는 그 일부로부터 의미를 이해하거나 의미를 얻을 수 있는 활동으로, 이에 관련된 활동의 예는 변수에 대응하는 값 찾기, 변인간의 관계를 진술하기, 종속변수간 관련짓기, 특정한 사건이 일어나거나 어떤 상태가 충족되는 곳 결정하기, 그래프의 내삽법과 외삽법 등을 들 수 있다. 이런 해석과제는 국소적이거나 광의적인 방식으로 이루어질 수 있고, 양적이거나 질적인 방식으로도 이루어질 수 있다. 구성이란 새로운 무언가를 이끌어내는 활동으로, 주어진 자료나 방정식으로부터 그래프를 그리거나 또는 반대로 그래프가 주어졌을 때 그것에 맞는 대수 관계를 만드는 활동을 말한다. 해석이 주어진 그래프나 방정식 등에 의존하여 답하는 것이라면, 구성은 주어지지 않은 새로운 부분을 형성하는 것을 말한다. 하지만 구성은 해석과 마찬가지로 국소적이거나 광의적인 방식, 그리고 양적이거나 질적인 방식으로 이루어질 수 있다는 공통점을 가지기도 한다.

그래프 과제는 예측, 분류, 번역, 축척으로 범주화된다. 예측은 분명하게 주어지지 않았거나, 또는 분명하게 그려지지 않은 그래프를 보고 그래프의 다른 점들이 어디에 위치하는지, 또는 그래프의 다른 부분이 어떻게 될지 추론

하도록 요구하는 과제를 의미한다. 이는 그래프에서 나오지 않은 부분을 구성하는 활동을 주로 포함한다. 분류란 어떤 특별한 관계가 함수인지를 결정하거나, 다른 관계들 속에서 함수임을 확인하는 것, 또는 다른 함수들 사이에서 연속함수라든지, 일대일대응 등 특별한 종류의 함수를 확인하는 것을 말한다. 이는 그래프에서 함수의 형식적인 정의, 그리고 특별한 종류의 함수의 형식적 정의와 관련있는 해석활동을 주로 포함한다. 번역이란 실제 상황에서의 자료, 그래프, 방정식, 순서쌍의 도표와 같이 다양한 표현에서 같은 함수임을 인식하는 과제, 또는 한 함수에서 다양한 표현으로 구성하는 과제를 의미하는 것으로 해석과 구성 활동을 모두 포함한다. 마지막으로 축척은 축, 축의 크기, 축에 표시될 눈금의 단위와 관련된 과제를 말한다. 이 과제는 주어진 함수의 그래프를 그릴 적절한 축의 크기나, 눈금의 크기를 결정하는 것과 같은 구성활동과, 다른 크기의 축에서 그려진 여러 개의 그래프가 같은 함수임을 확인하는 것과 같은 해석활동 모두를 포함한다.

Leinhardt 등이 함수의 그래프 활동과 과제를 분류한 반면, Friel 등(2001)은 통계 그래프 과제를 3가지로 분류하였다. 그래프에 표현된 데이터를 읽어내어 그대로 뽑아내는 것에 초점을 두는 기본단계 과제, 구문론적 특성들을 조작하여 그래프에서 데이터들의 관계들을 탐구하고 발견하는 중간단계 과제, 외삽을 통해 그래프에서 분명하지 않은 관계들을 분석하는 진보된 단계 과제가 그러한 것들이다. 여기에서 기본 단계는 주로 주어진 그래프에서 국소적인 것에 초점을 맞추어 양적으로 점의 위치를 파악하여 번역하는 것이 주가 되고 있고, 중간단계는 좀 더 초점의 범위를 넓혀 데이터들을 범주별로 통합하고 정리하여 구간별로 데이터들을 파악하는 것이다. 또한 진보된 단계는 주로 그래프의 광의적인 측면과 질적 측면에 초점을 두어 일반화하거나 예측 또는 전체적인 경향을 파악하는 것을 포함하고 있다. 이는 앞의 두 단계처럼 단지 그래프에서 표현된 사실을 기반으로 한다기보다는, 표현된 데이터들을 통합하여 비교 · 대조 등의 분석을 통해 전체적인 데이터에 대한 평가를 내리는 등 비율적 사고와 추론적 사고, 논리적 사고와 같은 좀 더 고등적인 수학적 능력을 요구한다. 이렇듯 그래프 과제는 단순히 점을 읽고 해석하는 것 이상으로 다양하며 여러 가지 관점으로 제시할 수 있다. 다음 장에서는 이 절에서 살펴본 그래프 내용을 바탕으로 학교수학에서 기본이 되는 교과서에서 그래프에 대한 내용이 어떻게 다루어지고 있는지를 분석할 것이다.

III. 연 구 방 법

(1) 분석 대상

본 연구는 학교수학에서 그래프 내용에 대한 내용을 분석하기 위해 현재 실행되고 있는 6차 교육과정과 7차 교육과정에서 중 · 고등학교 교과서를 분석하였다. 6차 교육과정에서 중학교의 경우에는 8종의 교과서가 사용되고 있고, 고등학교의 경우에는 17종의 교과서가 사용되고 있는데, 이중 중학교에서는 8종 모두를 분석하였으며, 고등학교에서는 두 권의 교학사(박두일 외 3인, 박배훈 외 5인), 동아출판사(장태환 외 2인), 두산(김연식, 김흥기), 한샘(금종해), 중앙진흥연구소(윤옥경 외 4인), 지학사(우정호), 천재교육(이현구 외 6인)등 8종의 교과서를 분석하였다. 7차 교육과정에서는 현재 실행되고 있는 중학교 1학년 교과서만 대상으로 하였는데, 현재 실제로 사용되고 있는 13종의 교

과서 모두를 분석하였다. 분석 과정에서 편의에 따라 임의로 6차 교육과정 교과서는 알파벳 대문자로 구별하였고, 7차 교육과정 교과서는 알파벳 소문자로 구별하였다.

(2) 분석 내용 및 방법

본 연구는 중, 고등학교 각 교과서에서 그래프에 대한 기본 이해를 제공하기 위한 내용이나 그래프가 다루어지는 부분을 다음과 같이 분석하였다.

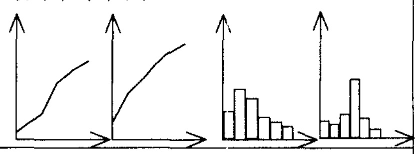
첫째, 교과서에서 그래프가 다루어지는 비율과, 종류 및 계열성을 분석하였다. 그래프 내용이 다루어지는 비율은 각 학년의 교과서 전체 페이지에서 그래프에 대한 내용이 다루어진 페이지를 백분율로 나타내었고, 그래프의 종류와 계열성도 각 수준의 교과서 전체 페이지를 바탕으로 그래프가 다루어지는 페이지를 중심으로 분석하였다.

둘째, 그래프 과제를 그래프 해석과 구성으로 나누어 국소적 대 광의적 측면과 양적 대 질적 측면으로 분석하였다. 이는 Leinhardt 등(1990)이 분류한 그래프 활동을 바탕으로 하였다. 여기에서 Freudenthal이 분류한 점별 접근은 국소적인 접근에 포함시켰다. 분석과정 중 그래프 과제는 교과서 전체에서 주로 문제 위주로 분석하였는데, 보기 및 예제, 문제, 연습문제, 종합문제 및 심화문제 중에서 해당하는 문제를 분석하였으며, 내용을 설명하는 본문은 제외시켰다. 분석 결과는 그래프 과제에 해당하는 전체 문제 중에서 각 영역이 해당하는 비율을 백분율로 정리하였다.

셋째, 그래프 과제 내용을 번역, 예측, 축척으로 범주화하여 주로 그래프 능력의 어떤 측면이 제시되는지 분석하였다. 이는 Leinhardt 등(1990)이 분류한 틀을 바탕으로 하였는데, 단 본 연구는 함수의 그래프만 대상으로 하는 것이 아니라 교과서에서 모든 그래프를 대상으로 하였으므로 함수의 그래프에만 해당되는 분류는 제외하였다. 분류에 해당하는 과제는 여러 그래프 중에서 함수의 그래프를 찾아 분류하거나 특정한 함수를 분류하는 과제로 이 과제도 그래프를 보고 번역하는 문제라 할 수 있으므로 이것은 번역에 포함시켰다. 분석 방법과 결과는 둘째와 같이 나타내었다.

넷째, 6차와 7차 교육과정에서의 교과서를 서로 비교해 보아 위의 3가지 관점에서 그래프 과제에 대해 어떤 변화가 일어났는지를 분석해 보았다.

위의 둘째와 셋째에서 그래프 과제 각각에 대한 것을 문제로 예를 들면 다음과 같다.

해석	· 다음 그래프에서 키가 160cm 이상인 학생은 모두 몇 명인가?
구성	· 정의역이 수전체의 집합일때 y=-3x의 그래프를 그려라.
국소적	· 다음 그래프에서 12시의 온도는 몇도인가?
광의적	· (가)와 (나) 그래프 중 체온의 변화를 더 잘 알 수 있는 것은 어느 것인가?
양적	· 다음 그래프에서 연필의 개수가 제일 많은 사람은 누구이고, 그 사람이 가지고 있는 연필의 수는 몇 개인가?
질적	· 다음은 두개의 자료에서 얻은 누적도수의 그래프와 히스토그램이다. 같은 자료를 나타내는 것끼리 짝지어라. 
번역	· 다음 표를 보고 그래프를 그려라.
예측	· 다음 그래프에서 1990년부터 1995년까지 여학생의 키가 변한 것을 보고 2000년의 여학생의 키를 어림하여 보아라.
축척	· 각각 눈금이 다르게 정해진 다음 그래프 중에서 서로 같은 것을 나타내는 것은 어느 것인가?

IV. 그래프 과제에 대한 교과서 분석 결과

(1) 6차 교과서

1학년	2학년	3학년
· $y=ax$, $y=\frac{a}{x}$ 그래프 · 히스토그램 · 도수분포다각형 · 누적도수그래프	· $y=ax+b$의 그래프	· $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프 · 상관도

<표1> 중학교 그래프에서 그래프 계열성

(가) 중학교 교과서 분석

㉮ 그래프 비율 및 계열성

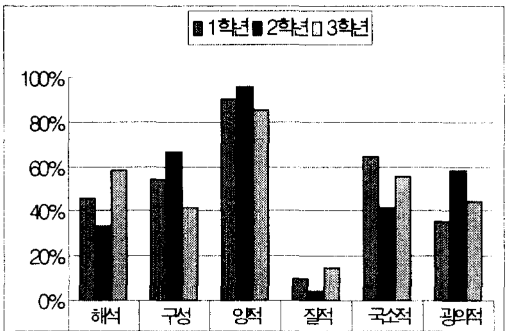
중학교에서 그래프가 다루어지는 비율은 1학년의 경우는 전체에서 10.4%, 2학년의 경우는 14.5%, 3학년의 경우는 22.8%로, 학년이 올라가면서 점점 증가하는 것으로 나타났다. 각 학년에서 다루어지는 그래프 내용은 <표1>과 같다.

중학교에서 그래프가 다루어지는 단원은 주로 함수와 통계 부분으로 중학교 2학년 때 방정식의 해를 그래프와 연결하여 소개한 것 이외 다른 단원에서는 그래프가 거의 다루어지지 않고 있다. 중학교 1학년에서는 함수가 소개되면서 초등학교 6학년 때 이미 학습한 정비례 그래프와 반비례 그래프를 바탕으로 $y=ax$꼴의 그래프와 $y=\frac{a}{x}$꼴의 그래프가 소개되고 있고, 통계 단원에서는 히스토그램과 도수분포다각형, 누적분포 그래프가 다루어지고 있다. 2학년에서는 1학년 때 배운 $y=ax$ 그래프를 기초로 $y=ax+b$ 꼴의 일차함수의 그래프가 다루어지는데, 여기에서는 평행이동과 xy절편, 기울기 탐구를 통해 일차함수 그래프의 성질을 이해하게 하고 있고, 또 이를 이용하여 그래프를 그리고, 반대로 그래프에서 대수식으로 번역하게 하고 있다. 그리고 일차방정식과 일차함수를 연결하여 연립일차방정식의 해를 그래프로 이해하도록 하고 있는데, 해가 한 개인 경우, 해가 없는 경우, 해가 무수히 많은 경우를 그래프 모양에 따라 구분하게 하고 있다. 3학년에서는 이차함수의 그래프와 두 변량 사이의 관계를 나타내는 상관도가 다루어진다. 이차함수 그래프는 처음에는 $y=ax^2$의 그래프를 먼저 학습한 후, 평행이동을 이용하여 $y=a(x-p)^2$의 그래프와 $y=ax^2+q$의 그래프, $y=a(x-p)^2+q$의 그래프 유형과 그 특징들을 설명하고 있고, $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 이런 유형들로 고쳐 이차함수 그래프의 특징들을 탐구하게 하고 있다. 또 최대값과 최소값을 그래프를 통해 설명하고 있고, 이차방정식을 이차함수의 그래프와 연결하여 x축과의 교점을 통해 근의 개수를 알 수 있음을 제시하고 있다. 그리고 상관도가 다루어지는데, 여기에서는 점의 분포를 전체적으로 파악하여 상관관계가 있는지, 즉 양의 상관관계인지 음의 상관관계인지, 또는 아무런 상관관계가 없는지를 해석하게 하고 있다.

중학교에서 그래프를 살펴보면, 그래프에 관한 내용임에도 불구하고 대부분이 그래프에 초점을 두기보다는 대수적인 풀이로 대신하는 경향이 강했고, 내용 설명 시에는 그래프를 이용하고는 있으나 실제로 과제를 제시할 때에는 그래프는 전혀 제시조차 되지 않는 경우가 있었다. 그런 대표적인 예로는 3학년 '통계' 부분으로, 가평균 설명시 막대그래프로 도입하고 있고, 산포도를 설명할 때에도 히스토그램으로 도입하고 있으나, 과제에서는 이런 그래프를 해석하거나 구성함으로써 그 내용을 학습하는 부분은 전혀 나타나고 있지 않고 있었다.

㉯ 그래프 활동

중학교에서 영역별로 그래프 활동 비율을 분석한 결과는 [그림2]와 같다.



	해석	구성	양적	질적	국소적	광의적
1학년	45.50%	54.50%	90.30%	9.70%	64.90%	35.10%
2학년	33.40%	66.60%	95.80%	4.20%	42%	58.00%
3학년	58.60%	41.40%	85.50%	14.50%	55.90%	44.10%

[그림2] 중학교 각 학년 교과서에서 그래프 활동의 비율 그래프

중학교에서 그래프 활동을 보면, 해석보다는 구성이 좀 더 높은 비율을 차지하고 있고, 질적 측면보다는 양적 측면이, 그리고 광의적인 측면보다는 국소적인 측면이 더 높은 비율을 보이고 있다.

중학교 1학년, 2학년에서는 그래프를 보고 그래프의 특성이나 성질들을 해석하는 활동보다는 주로 구성이 대부분을 차지하고 있고, 이런 구성 중에서도 특히 그래프를 그리는 활동이 대부분을 차지하고 있다. 함수의 그래프는 학생들이 축과 눈금을 정하고 식에 맞는 점들을 찍고 연결하여 그래프를 그리는 광의적인 방법으로 그리도록 되어 있고, 통계 그래프는 교과서에서 이미 계급의 크기나 통계표가 주어져있어 국소적인 방법으로 그래프를 그리게 되어있다. 해석은 주로 광의적인 해석이라기보다는 점 하나에 초점을 맞추어 점을 읽어냄으로써 그래프를 해석하는 국소적인 측면이 강하게 나타나고 있다. 예를 들면, 점을 찍거나 점의 위치를 알아내는 것, 그래프에서 주어진 x에 대응하는 y의 값을 찾거나 그것을 식에 대입하여 미지수의 범위를 결정하는 것, 그래프를 보고 가장 많거나 가장 작은 수의 데이터를 찾는 것, 또는 xy 절편을 찾는 것이 대부분이었다. 중학교 3학년에는 비선형 함수 그래프가 처음으로 도입되는 시기로 함수 그래프의 특성들을 해석하는 과제의 비율이 전 학년에 비해 증가하고 있으며, 학년이 높아질수록 국소적인 측면보다는 광의적인 측면의 비율이 더 높아지는 것을 볼 수 있다. 질적인 측면도 학년이 높아짐에 따라 조금씩 증가하고 있는 것을 볼 수 있는데, 이런 질적인 측면은 중학교 3학년에서 나오는 상관도의 해석에서 주로 나타난다. 이는 그래프에서 점들의 분포를 한꺼번에 보거나 또는 주어진 데이터들을 직접 점을 찍어보아 전체적으로 그 분포를 보아서 두 데이터 간에 어떤 상관관계가 있는 것인지 탐구하므로, 주로 그래프 자체에 초점을 두어 해석하는 질적인 접근이라 할 수 있다. 하지만 어떤 상황의 그래프를 전체적으로 설명해보거나, 또는 상황의 그래프를 대략적으로 그려봄으로써 그래프에 관한 내용을 강화시키는 활동은 본문에서 거의 다루어지지 않고 있었다.

㉰ 그래프 과제의 분류

중학교 각 학년의 교과서에서 다루어지는 그래프 과제의 분류와 그 비율은 <표2>와 같다.

<표2> 중학교 각 학년에서 그래프 과제 비율

	1학년	2학년	3학년
번역	95.3 %	100 %	100 %
예측	4.7 %	·	·
축척	·	·	·

중학교 교과서에서 그래프 과제는 번역이 대부분인 것으로 나타났다. 특히 대수식이나 표를 그래프로 번역하는 과제가 대부분이었다. 예측 과제는 중학교 1학년 누적도수 분포도에서 주로 나타나고 있는데, 측정된 그래프의 구간에서 중간값을 어림과 측정으로 예측하여 문

제를 해결하는 과제가 거의 모든 교과서에서 나타나고 있다. 하지만 축척에 관한 과제는 어느 학년의 어느 교과서에서도 나타나지 않고 있다. 그래프를 완전하게 이해하고 해석하기 위해서는 축척이 매우 중요함에도 불구하고, 다만 1학년 G 출판사에서 '생각하는 수학'이라는 부록 부분에서만 축척의 중요성을 언급하고 있을 뿐이다. 여기에서는 같은 데이터이라도 축척에 따라 그래프가 현저하게 다르게 보일 수 있으며, 다른 정보를 옮기는 것으로 잘못 해석할 수도 있다는 점을 강조하면서 신중하게 그래프를 해석할 것을 강조하고 있다.

(나) 고등학교 교과서 분석

㉮ 그래프 비율 및 계열성

고등학교에서 그래프가 다루어지는 비율을 보면, 공통수학에서는 전체에서 29.4%, 수 I 에서는 28%, 수 II 에서는 44.9%인 것으로 나타났다. 고등학교에서는 중학교와 비교하였을 때 그래프에 대한 내용이 거의 2배 이상 더 많이 다루어지는 것을 볼 수 있다. 그래프가 다루어지는 내용을 보면 <표3>과 같다.

고등학교에서는 많은 단원에서 그래프를 연결하여 개념을 설명하고 있다. 공통수학에서는 7개의 단원 중 '도형의 방정식', '함수', '지수함수와 로그함수', '삼각함수' 등 4개의 단원에서 그래프를 다루고 있고, 수에서는 7개의 단원 중 '극한'과 '미분법', '적분법', '통계' 등 3개의 단원에서 그래프를 다루고 있으며, 수 II 에서는 '방정식과 부등식', '일차변환', '삼각함수와 복소수', '이차곡선과 공간도형', '미분법', '적분법' 등 거의 모든 단원에서 그래프를 다루고 있다. 여기에서는 개념의 도입이나 전개시 그래프를 이용하여 설명하고 있으나, 실제로 과제를 해결할 때에는 이런 그래프를 이용하여

공통수학	수학 I	수학 II
· 원 그래프 · 다항함수 그래프 · 유리함수 그래프 · 무리함수 그래프 · 지수함수 그래프 · 로그함수 그래프 · 삼각함수 그래프	· 확률밀도 그래프 · 정규분포 그래프	· 포물선의 그래프 · 타원의 그래프 · 쌍곡선의 그래프 · 복소평면

<표3> 고등학교 교과서에서 그래프 내용의 계열성

풀도록 제시하기보다는 오히려 대수식으로 문제를 해결하도록 과제 옆 도움말 칸에서 유도하고 있다.

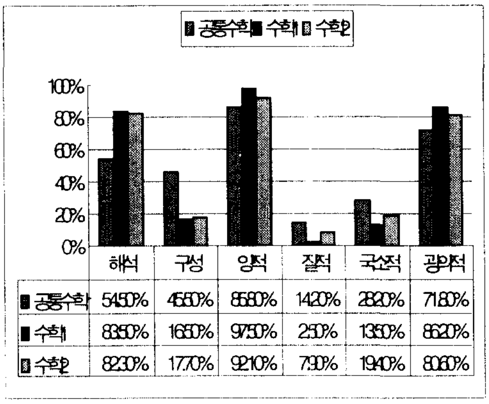
공통수학에서는 점과 점 사이의 거리와 직선의 방정식, 점과 직선과의 거리, 원의 방정식, 접선의 방정식, 평행이동, 대칭이동을 공식화하여 그래프를 참고하지 않고 대수적으로 문제를 해결하게 하고 있으며, 실제로 교과서의 풀이에서도 그래프는 나오지 않고 있다. 하지만 부등식의 영역이나 다항함수, 유리함수와 무리함수, 지수함수와 로그함수, 삼각함수에서는 그래프가 중심이 되어 그래프를 그리는 문제와 더불어 최대값이나 최소값 구하기, 역함수 그래프 그리기, 방정식과 부등식을 그래프와 연결시켜 해 판별하기, 점근선, 매개변수에 따른 그래프 모양의 변화, 주기성 등 그 성질들을 탐구하도록 하고 있다. 수학 I 에서는 무한 수열이 수렴하는지 발산하는지를 그래프를 통해 그 경향을 살펴보아 예측하게 하고 있고, 함수의 극한과 연속성, 최대 · 최소값의 정리, 중간값의 정리, 접선의 방정식, 확률 밀도 함수가 그래프로 설명되었으나, 과제에서는 그래프를 직접적으로 이용하기보다는 대수식이나 계산을 통해

풀도록 제시되어 있다. 분석된 교과서에서 오직 3개의 교과서에서만 그래프로 풀도록 제시되어 있었다. 하지만 극값을 구하거나, 절대값이 있는 적분을 하거나, 적분을 이용하여 넓이나 회전체의 부피를 구할 때, 그리고 통계에서 정규분포에 근사 시켜서 확률을 구할 때에는 그래프로 접근하였다. 수학 II에서는 거의 모든 단원에서 그래프가 다루어지고 있는데, 우선 방정식에서는 무연근을 판별하거나 무리방정식의 근을 판별할 때 그래프로 접근하고 있으며, 부등식의 해를 구할 때에도 그래프를 그려 접근하고 있다. 또한 포물선의 방정식과 타원의 방정식, 쌍곡선의 방정식을 그래프와 연결하여 설명하고 있고, 이를 통해 이런 도형들의 특성들을 탐구하도록 하고 있으며, 삼각함수의 합성이나 복소수의 극형식으로 변형할 때에도 그래프를 이용하고 있다. 롤의 정리와 평균값의 정리, 함수의 증가나 감소, 극값, 최대값이나 최소값, 곡선의 오목 볼록도 그래프로 해결하도록 하고 있으며, 방정식을 풀거나 부등식을 증명할 때에도 대략적인 그래프를 그려서 이를 통해 해결하도록 하고 있다. 그리고 수학 I과 마찬가지로 절대값이 있는 적분을 하거나, 적분을 이용하여 넓이나 회전체의 부피를 구할 때에도 그래프를 통해 문제를 해결하도록 하고 있다.

㉯ 그래프 활동

고등학교 교과서에서 그래프 활동을 분류한 것은 [그림3]과 같다.

위에서 알 수 있듯이, 고등학교에서 그래프 활동은 중학교와는 달리 구성보다는 주로 해석에 치우쳐 있고, 국소적인 측면보다는 광의적인 측면이 현저하게 높은 것을 볼 수 있으며, 이런 현상은 상위 학년으로 갑에 따라 비율이 점차적으로 증가하는 것을 알 수 있다. 질적 측면도 그 비율이 증가하기는 하였으나 여전히 대부분의 과제는 양적인 측면으로 이루어져 있다.



[그림3] 고등학교 각 학년에서 그래프 활동에 대한 각 영역의 비율 그래프

해석은 주로 그래프를 그려서 최대값이나 최소값, 극값을 구하거나 주기를 구하는 활동, 그리고 그래프를 통해 적분하여 넓이나 회전체의 부피를 구하는 것이 대부분이었다. 전학년에서는 해석이 주로 국소적인 측면에서 이루어졌던 것에 비해 고등학교 시기에서는 전체적인 그래프 모양을 통해 그 특성을 해석해내는 광의적인 측면이 두드러졌으며, 그래프를 그리는 활동도 주로 광의적인 측면에서 이루어졌다. 하지만 이전 학년과 같이 상황의 대략적인 그래프를 그리거나 해석하는 질적 문제는 없었다.

㉰ 그래프 과제

그래프 과제의 분류는 <표4>와 같다.

<표4> 고등학교 각 학년에서 그래프 과제 각 영역의 비

	공통수학	수학 I	수학 II
번역	99.9%	99.7%	100%
예측	0.1%	0.3%	·
축척	·	·	·

고등학교 교과서에서 그래프 과제는 중학교와 마찬가지로 주로 번역이 대부분이다. 이 시기에서 번역은 단순히 식이나 표에서 그래프를 그리는 활동보다는 그래프를 대략적으로 그려 최대값이나 최소값, 극값, 주기를 구하거나, 방정식의 해를 찾거나, 그래프를 이용하여 넓이나 부피를 구하는 것이 대부분이었다. 이 시기에도 예측 과제가 종종 보이기는 하나 매우 적은 양만이 다루어지고 있고, 축척에 관한 과제는 전혀 나타나지 않고 있다.

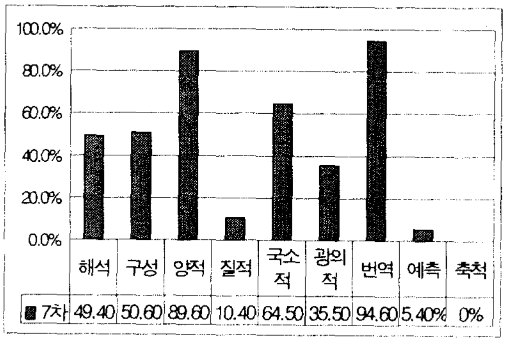
이상 분석 결과, 6차 교육 과정에서 초기에 그래프는 적은 양만 다루어지고 있고, 그 접근 방법도 해석보다는 구성에, 그리고 광의적인 측면보다는 국소적인 측면에, 그리고 질적 측면보다는 양적인 측면에 초점을 맞추고 있다는 것을 알 수 있었다. 상위 학년으로 갈수록 그래프가 다루어지는 비율은 높아지고 있고, 그 활동도 해석과 광의적인 측면의 비율이 높아지고 있었다. 하지만 질적 접근은 여전히 강조되지 않는 것으로 나타났다. 상위학년에 가서 몇 개의 질적 접근 문제가 보이기는 하나, 상황과 연결된 질적 접근이라기보다는 단지 대수적인 관점에서 일반화된 식에서 그래프를 묻거나 특성들을 묻는 질적 접근이 대부분이었다. 또한 중학교 고등학교 모두에서 예측과 축척에 관한 과제는 거의 나타나지 않고 있으며, 번역에 한정되어 있는 것으로 나타났다. 그래프 과제는 주로 방정식과 연결되어 한 점에 초점을 두고 수치값을 읽거나 이러한 것들이 그래프 위에 자세하게 어디에 위치하는지를 강조하여 도입하고 있고, 산술적인 알고리즘을 적용하여 푸는 그래프 과제가 대부분을 차지하고 있었다.

Friel 등(2001)의 그래프 인식단계 관점에서 그래프 과제를 분석해 보았을 때도 교과서에 제시된 대부분 그래프 과제는 시각적으로 그래프 요소를 인식하는 단계와 그래프의 구문론적 특성을 조작하는 단계에 치우쳐 있을 뿐, 그래프의 상황론적 내용을 이해하는 과정은 거의 다루어지지 않고 있었다. 또한 그래프 과제 단계 관점에서 보았을 때도 그래프에 표현된 데이터를 그대로 뽑아내는 것에 초점을 두는 기본 단계와, 그래프에서 데이터들의 관계를 탐구하고 발견하는 중간 단계에 치우쳐 있을 뿐, 데이터로부터 외삽을 하여 그래프에서 분명하지 않은 관계들을 분석하는 진보된 단계는 거의 다루어지지 않고 있었다.

이렇듯 우리나라 교과서에 제시된 그래프 과제는 한정적인 내용만을 다루고 있고, 현실 세계와 연관되어 그 변화성을 보여주거나 또는 물리적인 상황과 연결되어 그래프 자체에 초점을 두는 과제는 거의 나타나지 않았다. 최근 NCTM에서 제안한 것처럼, 그래프의 전체적인 모양을 파악하여 해석하고 분석하는 문제, 그래프에서 기울기나 기울기의 변화량에 관해서 정보를 분석하는 문제, 그래프를 실세계의 상황과 연결하는 문제, 그래프를 보고 물리적 사건을 추측하는 문제, 그래프를 통해 다양한 상황을 모델링하는 문제와 같이 그래프 그 자체 내용에 초점이 맞추어지기보다는, 주로 대수식을 확인하고 대수적인 특성들을 다루기 위한 부수적인 도구로 다루어진 것을 확인할 수 있었다. 또한 그래프 과제임에도 불구하고 그래프는 제시되지 않은 채 대수적인 조작만으로 문제를 해결하게 한 부분도 많이 보였다.

(2) 7차 교과서 분석

7차 중학교 교과서에서 그래프 비율과 그 내용은 출판사마다 약간의 차이가 있었다. 각 출판사의 교과서를 분석하여 평균을 내어 본 결과, 그래프 비율은 전체에서 10.8%를 차지하였고, 그 내용은 6차와 거의 비슷했으며, 분석 내용은 [그림4]와 같다.



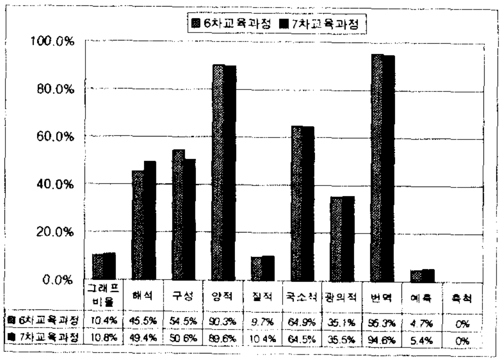
[그림4] 중학교 1학년 교과서에서 그래프 내용

위의 표를 보면, 그래프 내용에서는 해석과 구성이 거의 같은 비율로 나타나고 있고, 양적 측면과 국소적인 측면의 비율이 높은 것으로 나타났다. 또한 과제 내용이 주로 번역에 치우친 것을 볼 수 있다.

(3) 6차와 7차 교과서 분석 비교

중학교에서 7차 교과서는 6차와는 달리, 그래프 활동에서는 구성의 비율이 줄어 해석과 구성이 거의 같은 비율로 나타나고 있다. 또한 여전히 양적 측면과 국소적인 측면의 비율이 높기는 하나, 6차와 비교해 볼 때 질적인 측면과 광의적인 측면이 약간이나마 증가하고 있음을 볼 수 있다.

해석 활동을 보면 6차 교육과정의 1학년에서는 주로 국소적인 해석이 대부분이었으나, 7차 교육과정을 보면 광의적인 해석이 증가하고 있다. 특히 양 교육과정의 교과서에서는 두 개의 그래프가 한 개의 축 위에 동시에 주어져 있는 문제 상황이 나오고 있는데, 6차에서는 이런 경우 각 그래프에서 한 점에 초점을 맞추어 그 점을 읽어내는 데에서 그쳤으나, 7차의 대부분 교과서에서는 두 개의 그래프를 비교하여 어떤 구간이나 또는 전체적인 경향을 해석하도록 하고 있다. 또한 그래프를 그리는 과제는 6차에 비해 전반적으로 줄어들고 있고, 데이터들이 주어지기보다는 학생들이 그들의 일상생활과 관련된 데이터를 직접 조사하고 탐구·정리하여 그래프를 그리고 해석하도록 하고있다.



[그림5] 6차와 7차 교육과정의 중학교 1학년 교과서에서 그래프 각 영역에 대한 비교

또한 6차와 비교했을 때 질적인 측면이 증가하였는데, 특히 주목할만한 점은 상황이 주어진 상태에서 다양하게 질적 접근을 한다는 점이다. 실제 학생들의 생활과 관련 있는 소재로 그래프를 질적으로 해석하게 하고 있는데, 특히 c 출판사와 a 출판사의 교과서에서는 그래프를 보고 학생들이 직접 신문기자가 되어 그 그래프에 적절한 상황을 기사로 작성하도록 하고 있고, c 출판사의 교과서에서는 컴퓨터로 문서를 작성하는데 타자를 치는 시간과 타자 친 글자 수의 관계를 함수의 그래프를 그리지 않고 어떤 모양인지를 대략적으로 말하도록 하고 있다. b 출판사 교과서 경우에는 누적도수의 그래프와 히스토그램을 연결하여 그래프에서 변화량과 기울기의 관계를 질적으로 탐구할 수 있도록 하고 있다.

그래프 과제에 있어서는 6차와 마찬가지로 주로 번역이 위주이기는 하지만 예측 문제의 비율이 6차에 비해 약간 증가한 것을 볼 수 있다. 그래프 내에서 내삽법에 의한 예측 과제뿐만 아니라, 그래프에서 제시되지 않은 앞으로

의 경향을 추측하는 문제도 소개되고 있다. 또한 번역에서 단지 그래프에서 대수식과 표로, 또는 대수식과 표에서 그래프로 번역하는 과제뿐만 아니라, 주어진 그래프를 보고 말이나 글로 그 그래프에 맞는 대략적인 상황을 번역하도록 하는 문제도 보였다. 축척에 관한 문제는 여전히 제시되지 않았지만, 특히 주목할만한 점은 통계 그래프에서 계급의 크기의 중요성을 대부분 교과서에서 강조하고 있다는 점이다. 6차에서는 이런 계급의 크기에 대해서는 거의 언급이 없었지만, 7차에서는 대부분 교과서들이 계급의 크기가 너무 크거나 작으면 자료의 분포 상태를 잘 볼 수 없다는 점을 언급하고 있다. 특히 K 출판사의 '읽을거리'에서는 축척에 따라 그래프 모양이 달라질 수 있음을 보여주고 있고, C 출판사의 '생활 속의 수학'에서는 그림그래프에서 오해하기 쉬운 축척에 대해 보여주고 있다.

6차와 7차 교육과정의 교과서를 비교했을 때 또 한 가지 차이는 그래프를 그리는 테크놀러지의 소개에 있다. 7차 교육과정의 대부분 교과서는 그래프를 그릴 수 있는 그래픽 계산기나 여러 소프트웨어, 엑셀과 같은 테크놀러지를 보여주고 나서 이를 이용할 것을 권장하고 있다. 이런 테크놀러지를 이용하여 여러 그래프들을 직접 그려보고, 매개변수에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변화되는지를 직접 탐구하게 하여 그래프를 전체적으로 인식하도록 한 문제도 보였다.

이상에서 본 것과 같이, 7차 교육과정에서 그래프에 대한 접근은 6차와 약간의 차이를 보이고 있다. 6차에 비해 낮은 비율이기는 하지만 해석과 광의적인 측면, 그리고 질적인 측면이 증가하고 있는 점을 알 수 있다. 또한 생활 속에서 볼 수 있는 친밀한 소재로 그래프로 접근하고 있으며, 몇몇 출판사에서는 함수 개념 도입시 그래프로 도입하여 함수의 종속성과 역동적인 특성들을 잘 설명하고 있다. 이러한 변화는 그래프 교육에 있어서 바람직한 결과라 생각되기는 하지만, 그래프 도입시 해석이나 구성에 있어서 질적인 접근은 여전히 이루어지지 않고 있으며, 그래프 표현을 일상 경험과 관련시켜 물리적 모델을 조작해서 나온 결과를 보게 하거나, 그래프에서 나온 사건들에 대해 이야기해보거나, 자신이 만든 이야기를 그래프로 대응시키는 등의 활동은 거의 없는 상태이다. 그 접근 방법도 처음에는 점별로, 그 다음에는 국소적으로, 그리고나서 전체적인 경향으로 이루어지고 있음을 볼 수 있다.

V. 그래프 지도 방향에 대한 고찰

이 장에서는 앞에서의 교과서 분석을 바탕으로 다음과 같이 그래프 지도 방안에 대해 논의해보도록 할 것이다.

(1) 초기 그래프 도입시 지도 방안

앞에서도 논의했듯이, 그래프는 수치적 체계와 기하체계를 사용한 다이어그램으로서 모델에 대한 직관적인 표상이 아니므로 그것을 이해하기 위해서는 그 내면에 숨어있는 그래프 규약과 개념적 중재구조를 익혀야만 한다. 또한 그래프를 이해하기 위해서는 복잡한 인지구조가 요구되기도 한다. 따라서 처음에 이것을 학생들에게 어떻게 도입 하냐에 따라 개념형성에 지대한 영향을 미치기도 하며, 때로는 치명적인 오개념을 심어줄 수도 있다. 이 연구에서는 초등학교에서의 그래프에 관한 내용은 다루지 않았지만 그래프 교육이 효과적으로 이루어지기 위해서는 초기 그래프 도입시 지도 방안이 무엇보다도 중요하므로 이에 대해 언급

하고자 한다.

그래프를 이해하기 위해서는 두 개 이상의 변수 사이에서 그 관계들을 파악하고 두 개의 다른 정신적 대상들을 고려해야 하며, 그 표현이 추상적이기 때문에, 학생들이 많은 어려움을 겪고 있다. 이러한 어려움을 해결하기 위해서는 구체적인 사물을 가지고 실제적으로 학생들을 그래프 만드는 과정에 참여시켜 그 과정을 경험하면서 그 필요성을 느끼고 점진적으로 형식화할 수 있도록 해야 할 것이다. 여기에서 그래프를 만들기 위한 자료는 학생들의 발달수준에 맞고, 실생활적이며, 흥미진진하고, 유의미한 자료들이어야만 한다. 가장 좋아하는 색깔이나 가장 좋아하는 애완동물, 가장 좋아하는 장난감과 같이 그들의 일상생활과 관련된 것들을 주제로 하여 자료를 모으고, 조직해서 그래프로 만들게 한다. 즉, 그래프를 처음 도입할 때에는 실제 현상에서 최대한 실제와 유사한 대상에서 시작하여 점진적으로 형식화하는 것이 중요하다. 따라서 처음 그래프를 도입할 때에는 그림 한 개가 한 개의 대상을 나타내는 그림그래프로 도입하는 것이 인지적인 어려움을 줄일 수 있다. 그림그래프에서 쓰이는 그림은 구체적인 표현으로서 이것을 나타내는 대상과 유사하여 표현상으로 어려움 없이 친근하게 도입할 수 있고, 그림과 그것이 나타내는 항목이 일대일대응을 이루기 때문에 학생들이 이해하기 쉽다. 단, 그 그림은 그 모양과 크기가 같도록 해야 학생들에게 혼동을 주지 않는다. 또한 그림의 크기에 따라 대상의 수량이 틀려지거나, 그림 하나가 대상 여러 개를 나타내거나, 그림의 $\frac{1}{2}$이나 $\frac{1}{3}$과 같이 분수로 나타내는 것은 처음 도입시 적당하지 않다. 이런 경우는 그래프를 해석할 때 대상들의 수에 대한 각 그림의 비율을 고려해야 하기 때문에 학생들이 이해하는데 많은 어려움을 야기하기도 한다.

그래프를 처음 도입할 때 제일 좋아하는 색깔을 조사해서 도입한다고 하면, 바닥에 한 칸에 한 사람이 들어갈 수 있도록 바둑판 무늬를 그리고 나서, 제일 아래 칸에 몇몇 색깔이 칠해진 종이를 붙인다. 그리고 나서 학생들에게 그들이 좋아하는 색깔이 붙어있는 줄에 한 칸씩 서도록 시킨다. 그리고 나서 각 줄에 있는 학생 수를 세고 기록하도록 하여 자료들에 대한 양감을 기르게 할 수 있다. 여러 색깔의 블록을 마련한 뒤 학생들에게 각자 좋아하는 색깔의 블록을 선택하게 하여 같은 색깔을 선택한 학생들의 블록을 일렬로 쌓도록 하여 실제적인 그래프를 만드는 방법도 있다. 또한 가장 좋아하는 과일을 조사한다고 할 때에는, 칠판에 과일 이름을 적은 표를 그려놓고, 여러 과일 사진을 준비하여 학생들에게 좋아하는 과일 사진을 선택하게 한 뒤, 각자 고른 사진을 칠판에 붙이게 해서 그래프를 만들 수 있다. 이러한 직접적인 활동들을 바탕으로 점차적으로 그림그래프로 접근해 갈 수 있는데, 처음에는 실제 대상의 그림이나 사진과 같이 구체적인 것으로 그 수량을 나타내고, 그리고 나서 좀 더 추상적인 삼각형이나 원 또는 ×표와 같은 것으로 자료의 수량을 나타내도록 한다. 여기에서 자료들 사이에서 관찰된 관계와 패턴을 "~보다 큰", "~보다 작은", "~의 두 배가 되는", "계속적으로 증가하는", "가장 많은", "가장 적은" 등과 같은 말로 표현할 수 있도록 지도해야 한다. 이렇게 실세계에 수학을 적용하는 것은 학생들의 개념 발달을 강화시키고, 그래프에 표현된 함축적인 수학 관계를 이해하는데 요구되는 수학적 능력을 구축하고 확장하도록 한다.

그림그래프가 어느 정도 완성되면 이것을 바탕으로 자연스럽게 막대그래프를 도입할 수도

있다. 그림그래프에서 각 열에 있는 그림들을 외곽선으로 묶고 나서, 학생들에게 축의 명칭과 수치가 필요함을 인식시킨 후에, 각 축에 맞는 이름을 짓고 눈금을 표시하도록 한다. 그리고 나서, 외곽선 안의 그림들을 지우고 막대 모양으로 만든다. 이는 반구체적인 표현에서 좀 더 추상적인 형태의 자료를 다루도록 하는 자연스런 방법이다. 좀 더 나아가 여러 그래프들을 학습한 후에는 모아진 자료들의 속성들을 토의하고, 자료를 나타내는데 적절한 그래프 유형을 결정해서, 변수, 축의 이름, 그래프 이름을 결정하고 그래프를 그리도록 해야 한다.

(2) 질적 · 광의적 지도

교과서 분석 결과, 초기에는 국소적인 접근에서 시작하여 고학년에 이르러서야 비로소 광의적 접근이 이루어지고 있고, 질적 지도는 거의 이루어지지 않고 있었다. 지금까지 학교에서 가르쳐지는 그래프를 보면, 여러 x값에 대한 y의 값을 구하여 표를 만들고, 표에서 제시된 점을 정해진 축에 찍고, 그 점을 연결하여 그래프를 그리는 것과, 주로 그래프의 한두 개의 점에 초점을 맞추어 그 값을 읽어내는 문제가 대부분이었다. 하지만 이런 점별 해석을 과도하게 강조하는 것은 그래프의 개념화를 대상이나 또는 개념적인 실재보다는 고립된 점들의 모임으로 이끌 수 있다(Leinhardt 등, 1990). 실제로 외국의 여러 연구들을 보면, 현재 점별 접근에 치우친 그래프 지도 결과 학생들이 그래프를 읽을 때 점별로 그래프를 읽고 해석하려하며(Bell, Brekke, & Swan, 1987a, 1987b; Dufour-Janvier 등, 1987; Kerslake, 1981; Leinhardt 등, 1990), 이로 인해 기울기/높이, 구간/점을 혼동하는 오류를 많이 범하기도 한다 (Bell 등, 1987a, 1987b; Leinhardt 등, 1990).

그래프 이해의 향상을 위해서는 단지 한 두 개의 점을 찍고 읽는 것을 넘어서서 그래프가 기초한 상황에서의 관계와 그래프의 전체적인 경향을 해석하여 이야기하는 것이 중요하다. 즉 과도한 점별 접근에서 벗어나, 그래프로부터 변화 상황을 추측해보거나, 개략적인 형태로 변화하는 양들 사이의 관계를 그려보는 것이 우선되어야만 한다. Janvier는 그래프를 학습할 때 학생들이 축척이 이미 정해진 카테시안 좌표 체계를 읽고 각각의 점을 그리도록 요구하는 과제로 시작한다기보다는, 우선 구체적인 상황의 질적 그래프에서 시작하여 점별 대신에 전체적으로 그래프들이 보여져야만 한다고 주장하였다. 다시 말해, 학생들은 동시에 변화하는 두 개의 변수 사이에서 관계를 나타낸 것으로서 전체적인 그래프에서 시작하도록 장려되어야 하고, 수라기보다는 말로 그 관계를 표현하도록 장려되어야만 한다는 것이다(Leinhardt 등, 1990). Pillips도 그래프를 보는데 있어서 수치값을 읽거나 이러한 것들이 그래프 위에 자세하게 어디에 위치하고 있는지를 강조하는 것은 중요하지 않다고 강조하면서 진정한 그래프 해석이란 그래프에 해당하는 이야기를 만들어 보는 것이라고 주장하였다(Dugdale, 1993). 프로이덴탈 연구소에서도 Remesa[1]라는 프로젝트에서 광의적인 그래프 과제에 대해 연구하기도 하였다. 여기에서는 여러 가지 물병 모양에서 시간에 따른 물의 높이, 기온변화, 운동경기, 전기요금, 욕조에서 물의 높이 등을 주제로 그래프를 대수식과 연결하지 않은 채 질적이고 광의적인 접근법으로 지도하고 있다.

이렇듯 처음부터 그래프를 대수식에 연결시

1) Realistic Mathematics Education in South Africa의 줄임말로 네덜란드의 University of Utrecht에서 프로이덴탈 연구소와 남아프리카의 University of the Western Cape와 공동으로 한 프로젝트이다.

켜 엄밀하게 형식적 방법으로 접근하기보다는, 학생들의 일상생활과 관련된 친숙한 상황을 그래프로 개략적으로 그려보게 하거나, 이야기를 만들어 보거나 해석하게 하는 활동이 필요하다. 이러한 활동으로 그래프 이해에서 가장 중요하고 학생들이 가장 이해하기 힘든 부분인 기울기의 변화와 전체 그래프에서 변화상황을 이해하게 하고, 두 개의 변수를 동시에 인식하게 한 후에, 대수식과 연결된 형식적인 접근이 이루어져야 하며, 국소적인 접근이 이루어져야만 할 것이다. 즉 그래프를 그리거나 해석하는 방법에 있어서 처음에는 질적·광의적으로, 그 다음에는 국소적으로 지도해나가는 것이 바람직 할 것이다.

(3) 테크놀러지를 활용한 그래프 지도

앞에서 언급한 광의적인 접근과 질적인 지도 방법을 향상시키기 위해서는 그래프에서 이야기를 만들어보고, 시뮬레이션된 그래프를 해석해보거나 직접 조작해보며, 프롭(probe)을 이용한 실험을 통해 학생들이 직접 그래프를 접해보도록 하는 것이 중요하다. 테크놀러지 없이 초반에 그래프를 광의적·질적인 접근으로 지도하는 것은 그리 효과적이지 않을 수도 있다. 테크놀러지를 통해 다양한 상황의 그래프를 직접 경험하고, 여러 조건들을 다양하게 바꾸어 보면서 조작하고, 즉각적으로 그 모양을 확인해 보는 과정을 통해 변화현상을 이해할 수 있으며, 그래프를 전체적으로 파악할 수도 있다. 또한 테크놀러지를 이용하여 현상학적 세계와 표현 세계, 즉 구체적인 상황과 추상적인 상황을 좀 더 유연하게 연결할 수 있고, 학생들이 친숙한 문맥에서 그래프를 학습할 수도 있다. 학생들이 그들 주변 상황에서 응용하는 것을 직접 경험하는 것은 매우 중요하며, 이런 응용이 가능하기 위해서는 응용이 될 상황에서 수학이 발생되어야만 하기 때문에(정영옥, 1997), 그래프 지도에서 테크놀러지의 활용은 그 의의가 크다고 할 수 있다.

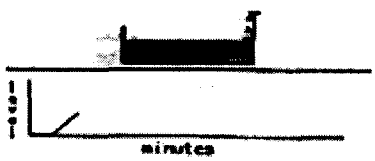
실제로 우리나라에서도 현재 실행되고 있는 7차 교육과정에서 테크놀러지의 활용은 더욱 강조되고 있다. 각 교과서마다 그래픽 테크놀러지를 사용한 예들을 소개하고 있고, 이러한 것들을 사용하여 수업이 이루어지기를 강조하고 있다. 하지만 그 수준이 아직은 초보단계이며, 그 내용도 질적 접근을 위한 것이기보다는 주로 그래프를 그리고 확인하는 수준일 뿐이다. 하지만 외국에서 테크놀러지를 활용한 그래프 교육을 보면, 형식적인 그래프 지도 이전에 테크놀러지를 활용하여 학생들과 친숙한 환경에서 직접 상호작용 하면서 그 변화상태를 살피게 하고, 이로써 질적 접근을 시도하고 있다.

이런 예로 몇 가지를 들면, 우선 Eureka라는 프로그램이 있다. 이는 그래프에 대한 학생들의 지각을 탐구하고 그래프의 질적 이해를 발달시키기 위해 Nottingham 대학의 Shell Centre 연구자들이 만든 프로그램이다. 이는 친숙한 물리적인 상황을 직접 조작하고, 그와 관련된 그래프에서 변하는 결과를 직접 보고, 그래프를 나오게 한 다양한 사건들을 설명해보고, 자신의 시나리오를 짜서 그래프에 대응시키고, 그리고 나서 동료 학생들의 시나리오와 비교해 보는 활동을 통해 그래프에 대한 이해를 강화시키도록 하고 있다. 이 프로그램은 [그림6]과 같이 사용자가 4개의 키 중 하나의 키를 누를 때마다 그에 해당하는 그림과 함께 시간에 따른 물의 높이를 그래프로 그려주기도 하고, 또한 [그림7]과 같이 그래프 예만을 제공하여 학생들에게 무엇이 주어진 그래프를 나오게 할지 설명하도록 한 후, 이를 확인하도록 하고 있다.

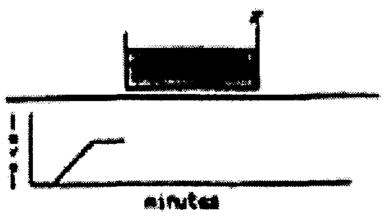
이때 연구진들은 상황에 대한 단순한 진술보다는 특별한 사건이 왜 일어나게 되었는지 말하도록 장려하고 있다.

P : 욕조의 마개를 열고 닫는 키
T : 수도꼭지를 틀거나 잠그는 키
M : 사람이 욕조에 들어가거나 나오게 하는 키
S : 사람이 노래를 하거나 멈추게 하는 키

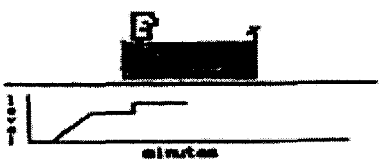
1. 수도꼭지를 튼 상태



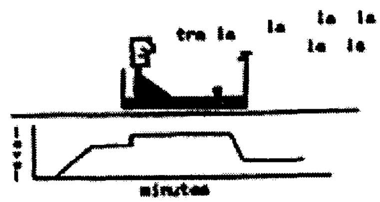
2. 물을 채우고 수도꼭지를 잠근 상태



3. 욕조 안에서 목욕을 하는 상태



4. 물을 조금 버리고 욕조 안에서 노래를 부르는 상태

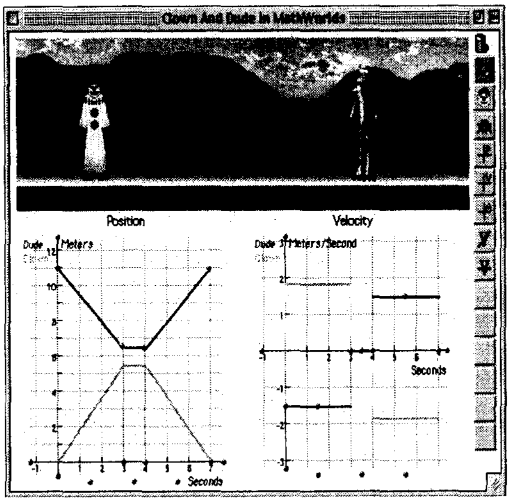


[그림6] Eureka 프로그램 (Dugdale, 1993)

[그림7] 프로그램에 저장된 그래프 시간에 따른 수면의 높이의 관계 그래프 (Dugdale, 1993)

또 다른 예로는 Kaput을 주축으로 메사추세츄 주립대학의 연구진에 의해 개발된 SimCalc Project의 Matheworld 소프트웨어가 있다. 이 소프트웨어는 [그림8]과 같이 위치 대 시간, 속도 대 시간, 가속도 대 시간 등 세 가지 그래프를 결합하여 캐릭터의 운동과 연결시켜 물리적 운동을 탐구하도록 하고 있다. 대부분 그래핑 테크놀러지는 같은 운동에 대해 다양하게 연결된 함수의 표현을 포함하는데 비해, SimCalc의 소프트웨어는 같은 운동을 다양한 관점에서 탐구하는데 초점을 두고 있다. 예를 들면, 학생들이 그래픽 계산기를 사용하였을 때에는 같은 데이터 집합을 바탕으로 표와 대수식을 연결한 그래프를 볼 수 있지만, SimCalc의 Matheworld를 사용한 학생들은 시간에 따른 캐릭터의 속도 관점에서, 시간에 따른 캐릭터의 위치의 관점에서 다양한 관점으로 동시에 같은 운동에 초점을 맞출 수 있게 하고 있다(Nickson, Nydam, & Browers, 2000). 또한 이 소프트웨어는 학생들이 직접 조작하여 시뮬레이션 하도록 되어있는데, 학생들이 직접 화면에서 움직이는 캐릭터에 마우스를 대고 캐릭터를 움직여 봄으로써 위치 그래프나 속도 그래프의 변화를, 또는 위치 그래프를 변화시켰을 때 속도 그래프의 변화를, 반대로 속도 그래프를 변화시켰을 때 위치 그래프의 변화를 탐구하도록 하고 있다. 이로써 변화의 측면을 스스로 인식하여 후에 배울 미적분의 개념과 같은 어려운 개념에 대한 토대를 마련할 수 있게 하고 있다. 또한 수학적 관계를 드러내는 역동적인 연결을 보여줄 수 있을 뿐 아니라, 학생들에게 실제 생활을 해석하고 시뮬레이션을 해석하도록 강력한 의

미를 제공하며, 그래프의 변화와 캐릭터의 변화, 즉 물리적 세계의 변화와 수학적 세계의 변화를 직접 연결하여 이해향상에 도움을 줄 수도 있다(신은주 & 송정화, 2001).



[그림8] 캐릭터의 움직임에 따른 시간과 위치, 시간과 속도의 관계 그래프

그래프 이해 향상을 위한 다른 지도 방법으로는 Microcomputer-Based Laboratory(MBL), Calculator-Based Laboratory(CBL), Caculator-Based Ranger(CBR)을 이용한 방법이 있다. 이러한 것들은 다양한 프룹을 가지고 데이터를 수집해서 컴퓨터나 계산기에 데이터를 저장하는 장치들로, 다양한 형태로 데이터를 분석하여 곧바로 그래프로 피드백을 제시한다. 이러한 장치들로 실시간 데이터를 수집할 때 그래프와 실세계 경험들이 서로 연결되어 학생들은 실세계 관계를 알게 되고, 즉각적인 피드백이 주어져서 추상적인 표현으로서의 그래프와 경험을 통해 지각된 실제 현상 사이를 강력하게 연결시킴으로써 그래프에 대한 심층 이해를 촉진할 수 있게 된다. 이는 그 동안 많은 학생들이 범했던 그래프를 물리적 상황의 그림과 동일시하는 오류를 줄이는데 도움이 되기도 한다.

이런 종류의 소프트웨어와 도구들은 학생들에게 강력한 동기를 부여할 뿐 아니라, 학생들이 수학을 흥미롭게 사용할만한 충분한 능력과, 그것에서 가치 있는 목적을 성취하는 창의적인 방법에 초점을 맞추도록 한다. 이렇듯 테크놀러지를 이용하여 그래프 표현을 일상 경험과 관련시켜 물리적 모델을 조작해 그래프에서 나온 결과를 보게 하거나, 그래프에서 나온 사건들에 대해 이야기해보거나, 자신이 만든 이야기를 그래프로 대응시키는 활동들을 통해 그래프에 대한 이해를 향상시킬 필요가 있다.

(4) 선형 그래프 외 여러 형태의 그래프 제시

보통 학교 수학에서 초기에 다루어지는 그래프는 증가나 감소를 나타내는 선형 그래프가 대부분을 차지한다. 대수식으로 쉽게 표현될 수 있는 선형 그래프를 제시한 후 이것을 나타내는 식을 구하던지, 또는 반대로 어떤 식을 주고 그것에 해당하는 그래프를 그리게 하는 것이 대부분이다. 하지만 이러한 경향으로 인해서 학생들은 후에 함수를 배울 때 선형 그래프만이 함수의 그래프라는 잘못된 개념 이미지를 가지기도 한다(Bell, 1987a; Dreyfus & Vinner, 1989; Leinhardt 등, 1990; 조한숙, 1991). 즉 선형이 아닌 것은 함수의 그래프가 아닌 것으로 보고, 두 개의 다른 규칙이 함수를 정의하는데 필요할 수도 있다는 것, 즉 그래프가 두 개 이상으로 나누어져있는 것은 함수의 그래프로 받아들이지 못하며(Dreyfus & Vinner, 1987; Sfard, 1992), 함수는 변량으로 구성되어야 한다고 생각하여 상수 함수 그래프를 함수의 그래프로 보지 않는다(Leinhardt 등, 1990).

Leinhardt 등(1990)은 이러한 원인을 학생들에게 함수를 도입할 때 주로 선형함수로 도입한 결과라고 설명하였다. 후에 다른 함수 유형을 배운다 할지라도, 학생들은 그들이 배웠던 성질들을 선형함수와 연결하여 지나치게 일반화하는 경향으로 인해 이런 오개념이 생긴다는 것이다.

또한 선형 그래프만 강조한 결과, 그래프 교육은 일상생활의 친숙한 문맥과는 동떨어진 채 너무나도 형식적으로 이루어지게 되었다. 교과서 분석 결과, 대부분 문제 상황은 현실적인 문맥을 거의 담지 못하고 있으며, 형식적으로 대수식과 연결시킨 문제가 대부분이었다. 하지만 실제로 우리 주변 생활에서 쓰이고 있는 대부분 그래프는 선형 그래프보다는 오히려 좀 더 복잡하고 다양한 형태의 그래프가 더 많고, 이러한 그래프 대부분은 식과 연결되지 않은 경우이다. 학생들에게 의미 있는 학습이 되기 위해서는 학생들의 현실상황과 관련된 실제 소재를 다루어야 한다는 점을 상기해 볼 때, 현실의 역동적인 변화상황을 다룬 다양한 그래프를 제시할 필요가 있다. 단순히 규칙적이고 연속적인 그래프뿐 아니라, 불규칙하고 이산적인 것 등 식과 잘 연결되지 않는 복잡한 모양의 그래프를 제시할 필요가 있다. 이러한 그래프를 그려보고 읽고 해석하는 것은 다양한 함수 관계 이해와 변하는 변수들 사이 관계에 대한 이해에 도움이 되고, 이것은 그래프를 읽고 해석하는데 있어서도 크게 도움이 될 것이다.

(5) 축척과 예측을 포함한 그래프 지도

교과서에서 그래프와 관련된 과제 대부분은 번역이 거의 모든 부분을 차지하고 있다. 그래프를 이해하는데 있어서 번역이 중요한 요소이긴 하지만, 좀 더 심층적인 이해를 위해서는 그 외 축척이나 예측과 같은 다양한 과제가 함께 제시될 필요가 있다.

예측 과제는 그래프에서 나타난 변화상황을 통해 앞으로의 경향을 추론하는 과제이다. 그래프 학습시 학생들은 그래프를 많이 접하여 자료들의 관계를 분석하고 고찰하며, 그래프 모양으로 그 관계들의 특성을 결정한 후 앞으로의 경향을 예측하도록 장려하는 것이 무엇보다도 중요하다. 특히 통계에서 이러한 예측 과제는 필수적이며, 자료를 분석하는 최종 목적이 되기도 한다. 하지만 대부분 교과서에서는 이러한 예측 문제는 거의 보이지 않고 있으며, 있다 하더라도 주로 눈금과 눈금 사이에서 나타난 값을 예상하여 얻어내는 내삽법이 대부분일 뿐이다. 문맥을 통합하여 그래프에서 분명하지 않는 관계들을 분석하고 추론하여 앞으로의 경향을 예측하는 과제는 거의 없는 있는 실정이다. 정보화 사회에서 자신에게 필요한 정보를 정리하여 그것을 토대로 문제를 해결하고, 새로운 상황을 예측해보고, 미래에 대비하는 것은 21세기를 살아가는 현대인에게 있어서 없어서는 안 되는 기본 소양이다. 경제나 사회, 정치, 과학이나 의학 등 우리 일상생활에서 그래프가 이용되지 않는 곳은 거의 없으며, 또한 그래프를 통해 그 경향을 추론하여 문제를 해결하고 가까운 미래를 예측하는 것도 곳곳에서 일어나고 있다. 따라서 예측 과제는 중요하며 강조될 필요가 있다.

또한 그래프 이해에서 축척은 중요한 역할을 하는데, 축, 축의 크기, 축에서 눈금의 단위와 같은 것들은 그래프에서 표현된 수학적 관계들을 이해하는데 결정적인 역할을 하며, 이는 그래프를 그릴 때 뿐 아니라, 읽고 해석하는데 있어서도 필수적인 선험지식이다(Currio, 1987). 이런 축척에 관한 과제는 함수의 특성을 이해하는데 도움이 된다. 다양한 축척에서 함수의

그래프를 관찰하게 함으로써 각 함수의 특징을 파악할 수 있고, 이로써 함수족의 특성들을 발견해갈 수도 있다. 또한 통계 그래프에서도 축척은 자료를 이해하는데 있어서 결정적으로 중요한 역할을 한다. 축척이 어떻게 설정되는지에 따라 자료의 특성들이 다르게 보여질 수도 있으며, 어떤 경우에는 그 그래프가 의도한 바와 다르게 나타날 수도 있다. 그리고 최근 그래프를 빠르고 쉽게 그릴 수 있는 여러 테크놀러지가 발달하면서 그래프를 다루는 일은 예전에 비해 많아졌으며, 이렇게 만들어진 그래프를 알맞게 해석하는 능력이 갈수록 중요해짐에 따라 축척에 관한 내용은 더욱 중요하게 되었다. 이와 같이 그래프 이해에서 축척이 매우 중요함에도 불구하고, 대부분 교과서에서는 이러한 것들을 간과하고 있다. 따라서 많은 학생들은 오류를 범하기도 한다. Kerslake(1981)의 연구에 따르면, 15세의 38.5%가 (20, 15), (-14, 3), (5, -12)와 같은 점을 찍기 위한 적절한 축척을 정하지 못하고 (0, 0)에 원점을 놓지 못한다는 것을 알았다. 또한 많은 학생들은 실제 배경으로부터 자료를 측정하는 것은 고려하지 않은 채, 상대적인 양의 순서에 대해서만 단순하게 직선에 표시하는 경향이 있는데, 예를 들면, 16.3, 19.6, 28.8을 축에 표시할 때 점과 점 사이의 거리가 각각 다름에도 불구하고 점 사이 거리를 설정하지 않은 채 오직 순서만 나열한다는 것을 알았다(Demana 등, 1993).

앞의 교과서 분석에서도 볼 수 있듯이 이는 학교 수업에서 이러한 것들이 간과되었기 때문이라고 할 수 있다. 그래프의 이해 향상을 위해서는 주어진 자료에 따라 적절한 축척을 정하고 이에 따라 알맞은 그래프를 그리고 해석하는 과제가 그래프 교육에 포함될 필요가 있다. 또한 그래프가 앞으로의 경향을 예측하는데 있어서 결정적인 표현 수단이라는 점을 볼 때, 이러한 특성을 살릴 수 있는 예측 과제도 강조될 필요가 있다.

VI. 결론 및 제언

이 글은 학교 수학에서 다루어지는 그래프에 대한 교수학적 분석을 통해 각 수준에서 그래프가 다루어지는 과정을 살펴보고, 그래프 활동과 과제를 분류하여, 현재 학교 수학에서 주로 그래프의 어떤 측면이 강조되어 학습되고 있고 어떤 측면이 덜 강조되고 있는지 분석을 통해, 그래프 교육을 조명하여 보고 바람직한 그래프 교육을 위한 시사점을 얻을 목적에서 행해졌다.

교과서를 분석한 결과 학교수학에서 다루어지는 그래프는 전체적으로 질적 접근이 부족한 것으로 나타났다. 그래프 학습에서 상위 학년뿐 아니라 초기 학년에서도 이런 질적 접근이 중요함에도 불구하고, 대부분 그래프 활동과 과제는 양적 측면에 치우쳐 있음을 알 수 있었다. 전체 그래프 과제에서 질적 접근은 약 10% 내외로만 다루어지고 있었고, 그나마 대부분이 대수적인 관점에서 일반화된 식에서 그래프를 묻거나 특성들을 묻는 것들뿐이었다. 어떤 상황 내에서 그래프에 초점을 맞추어 질적 접근을 한 과제는 거의 없었다. 7차 교육과정에 들어와서 상황과 연결된 질적 접근이 몇몇개 보이기는 하지만, 이것이 초기에 다루어지기보다는 이미 그래프를 대수식과 연결시켜 자유롭게 번역할 수 있도록 한 후 뒤에 나오는 연습문제와 종합문제, 또는 수행평가에서 다루고 있었다. 또한 그래프 학습 초기에는 대부분이 국소적인 측면에서 그래프 활동과 과제가 이루어지고 있었고, 고등학교에 들어와서는 급격하게 광의적 측면이 증가되는 것을 볼 수 있었다. 오히려 초기에 광의적 접근으로 그래프를 도입

한 후 차차 국소적인 접근으로 나가야 함에도 불구하고, 현재 그래프 교육은 처음부터 오직 한 점에 초점을 맞추는 접근법을 강조해왔다. 따라서 학생들이 그래프를 전체적으로 해석하는 과제와 대략적인 그래프 모양을 그리는 과제에 어려워하고, 문제해결의 도구로서 그래프를 인식하지 못하며, 물리적인 상황을 나타내는 그래프를 영상적인 그림과 혼동하여 잘 해석하지 못하는 것이 어쩌면 당연할런지도 모른다. 그래프 과제는 거의 대부분이 그래프를 그리는 번역 과제에 치우친 것을 볼 수 있었다. 그래프의 목적이 자료를 이해하기 쉽게 보여주고, 요약하며, 제시된 자료를 바탕으로 추론하여 앞으로의 경향을 예측하는 것이라는 것을 상기해 볼 때 현 그래프 교육은 이러한 그래프의 이점을 잘 살리지 못해왔다.

이러한 연구 결과를 토대로 그래프 교육의 방향을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 그래프 교육은 좀 더 다양하게 강조될 필요가 있고, 그래프 활동에서 양적 측면과 국소적 측면의 지나친 강조에서 벗어나, 모든 측면이 골고루 다루어질 수 있도록 해야만 한다. 바람직한 그래프 교육은 그래프를 그리는 활동과 그래프를 해석하는 활동, 그리고 양적인 것에 초점을 맞추는 측면과 질적 측면, 국소적인 측면과 광의적인 측면이 적절하게 조화를 이루어졌을 때일 것이다. 현 그래프 교육에서는 전 수준을 통틀어 질적인 접근 방법이 매우 부족한 상태로서, 그래프로부터 변화 상황을 추측해보거나 개략적인 형태로 변화하는 양들 사이의 관계를 그려보는 질적 접근이 좀 더 강조되어야 하며, 특히 초기에 이런 질적 접근과 광의적 접근이 강조될 필요가 있다.

둘째, 대수식과 표로부터 그래프를 그리거나, 또는 그래프로부터 대수식이나 표를 작성하는 번역 과제에 집중적으로 치우친 것에서 벗어나, 대수식의 의미를 그래프를 통해 분석하고 추론하게 하며, 그래프에 기반하여 변화의 측면에 초점을 맞추어 앞으로의 경향을 예측하게 하는 예측 과제와, 다양한 축척에서 그래프를 관찰하게 하여 그래프에 대한 이해를 강화시키는 축척과제를 다양하게 제시해야만 한다.

셋째, 그래프를 활용하여 좀 더 역동적인 학습이 이루어질 필요가 있다. 앞에서 고찰한 바와 같이 그래프가 다양한 상황에서 문제해결의 도구로 쓰이지 못하고 한정적인 용도로 제시되는 것은 어쩌면 지금까지 우리에게 그래프를 그릴만한 마땅한 도구가 없었기 때문일런지도 모른다. 단순히 종이와 연필로 그래프를 그리는 것은 시간이나 정확도의 차원에 있어서 떨어지는 경향이 있으며, 복잡한 식의 그래프는 사실 손으로 그리기에는 매우 어렵다. 하지만 최근에는 테크놀러지의 발달로 다양한 식의 그래프와 다양한 모양의 그래프를 빠르고 정확하고 손쉽게 그릴 수 있는 여러 도구가 존재한다. 이제는 그래프를 그리는 과제에 보다는, 그래프를 분석하여 문제를 해결해나가는 과제를 좀 더 강조할 필요가 있다. 그렇다고 그래프를 그리는 과제를 간과해서는 안 된다. 이것은 테크놀러지를 이용하기 위해선 필수적인 선험지식이기 때문이다. 바람직한 그래프 교육을 위해서는 그래프에 초점을 맞추어 그 특성들을 고찰하게 하고, 여러 영역의 수학과 타학문, 그리고 실제 현실과 연결하여 그래프 교육이 다양하게 이루어질 수 있도록 촉진해야만 한다.

참 고 문 헌

강옥기, 정순영, 이환철(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 두산.

________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 두산.

강행고, 이화영, 박성기, 박진석, 이용완, 한경연, 이준홍, 이혜련, 송미현, 박정숙(2001). 중학교 수학 7-가, 서 울 : 중앙교육진흥연구소.

________.중학교 수학 7-나, 서울 : 중앙교육진흥연구소.

고성은, 박복현, 김준회, 최수일, 강운중, 소순영(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 블랙박스.

_________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 블랙박스.

구광조, 황선욱(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 지학사.

구광조, 황선욱(1997). 중학교 수학 2, 서울 : 지학사.

구광조, 황선욱(1997). 중학교 수학 3, 서울 : 지학사.

금종해, 이만근, 이미라, 김영주(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 고려출판.

_________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 고려출판.

금종해, 정순영, 박평순(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 한샘출판.

_________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 한샘출판.

_________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 한샘출판.

교육부(1997). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 1997-15호 <별책8>

김연식, 김흥기(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 두산동아.

_________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 두산동아.

_________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 두산동아.

_____(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 두산동아.

_________. 중학교 수학 2, 서울 : 두산동아.

_________. 중학교 수학 3, 서울 : 두산동아.

김응태, 박승안, 오연장, 신현용(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 한샘출판.

_________. 중학교 수학 2, 서울 : 한샘출판.

_________. 중학교 수학 3, 서울 : 한샘출판.

김태선(1998). 고등학생들의 과학 관련 그래프 해석 능력. 한국교원대학교 대학원 석사학위 청구논문.

김호우, 박교식, 신준국, 정은실(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 지학사.

_________. 중학교 수학 2, 서울 : 지학사.

_________. 중학교 수학 3, 서울 : 지학사.

박규홍, 한옥동, 김성국, 임창우, 고성군, 김유태, 육상국, 박재용(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 두레교육.

_________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 두레교육.

박두일, 신동선, 강영환(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 교학사.

_________. 중학교 수학 2, 서울 : 교학사.

_________. 중학교 수학 3, 서울 : 교학사.

박두일, 신동선, 김기현, 박복현(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 교학사.

_________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 교학사.

_________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 교학사.

박배훈, 정창현, 박상호, 류성림, 권기석, 류익승(1995). 고등학교 공통수학, 서울 : 교학사.

_________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 교학사.

_________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 교학사.

박배훈, 정창현(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 교학사.

_________. 중학교 수학 2, 서울 : 교학사.

_________. 중학교 수학 3, 서울 : 교학사.

박윤범, 박혜숙, 권혁천, 육인선(2001). 중학교 수학7-가, 서울 : 대한교과서.

_________. 중학교 수학7-나, 서울 : 대한교과서.

배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환, 민기열, 박동익, 우현철(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 한성교육연구소.

_________. 중학교 수학 7-나. 서울 : 한성교육연구소.

신은주, 송정화(2001). 활동연관중심의 함수교육. Math festival 프로시딩, 3(2), 261-281.
신항균(2001). 중학교 수학 7-가. 서울 : 형설출판사.
__________. 중학교 수학 7-나. 서울 : 형설출판사.
오병승(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 바른교육사.
__________. 중학교 수학 2 서울 : 바른교육사.
__________. 중학교 수학 2 서울 : 바른교육사.
우정호(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 지학사.
__________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 지학사.
__________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 지학사.
_____(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.
윤옥경, 윤재한, 허원, 손문구, 송병희(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 중앙교육 진흥연구소.
__________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 중앙교육 진흥연구소.
__________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 중앙교육 진흥연구소.
이영하, 허민, 박영훈, 여태경(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 교문사.
__________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 교문사.
이준열, 장훈, 최부림, 남호영, 이상은(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 디딤돌.
__________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 디딤돌.
이현구, 지동표, 김우철, 고성은, 박병욱, 장훈, 최용준(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 천재교육.
__________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 천재교육.
__________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 천재교육.
장태환, 서태영, 유복동, 김광한, 박재명(1996). 고등학교 공통수학, 서울 : 동아출판사.
__________. 고등학교 수학Ⅰ, 서울 : 동아출판사.
__________. 고등학교 수학Ⅱ, 서울 : 동아출판사.
정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문.
조태근, 임성모, 정상권, 이재학, 이성재(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 금성출판사.
__________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 금성출판사.
조한숙(1991). 함수 개념 형성에 관한 연구. 서울대학교 대학원 교육학 석사학위논문.
최용준, 이현구(1997). 중학교 수학 1, 서울 : 천재교육.
__________. 중학교 수학 2, 서울 : 천재교육.
__________. 중학교 수학 3, 서울 : 천재교육.
최선준(2000). Calculator-Based Ranger(CBR)을 활용한 그래프 능력의 변화 과정에 관한 연구 : 세 학생의 사례 연구. 이화여자대학교 대학원 석사학위청구논문.
황석근, 이재돈(2001). 중학교 수학 7-가, 서울 : 한서출판사.
__________. 중학교 수학 7-나, 서울 : 한서출판사.
Bell, A., Brekke, G., & Swan, M. (1987a). Diagnostic teaching : 4 graphical interpretations. *Mathematics Teaching,* 119, 56-60.
Bell, A., Brekke, G., & Swan, M. (1987b). Diagnostic teaching : 5 graphical interpretations teaching styles and their effects. *Mathematics*

Teaching, 120, 50-57.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18(5),* 382-393.

Demana, F., Schoen, H. L., & Waits, B. (1993). Impact of the graphing calculator, K-12. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function,* 11-40.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics, In Zimmermann, W., & Cunningham, S.(Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 25-37.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In Janvier, C.(Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dugdale, S.(1993). Functions and graphs : Perspective on student thinking. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function,* 101-130.

Fishbein. E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* D. Reidel Publishing Company.

Fisher. (1992). Categorization or schema selection in graph comprehension. *Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Associations,* San Francisco.(ERIC Documented Reproduction Service No, ED 347176).

Freudenthal(1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* Dordrecht ; D. Reidel Publishing Company.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W.(2001). Making sense of graphs : critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(2),* 124-158.

Fry, E.(1984). A theory of graphs for reading comprehension and writing communication. New Brunswick, NJ: Rutgers University.(ERIC Documented Reproduction Service No. ED 240528).

Janvier, C. (1987). Representation and understanding : The notion of function as an example. In Janvier, C.(Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 67-71.

Kerslake, D.(1981). Graph. In Hart, K. M. (Ed.), *Children's understanding of Mathematics.* London: John Murray. 120-136.

Kieran, C. (1993). Functions, graphing, and technology; Integrating research on learning and instruction. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function,* 41-68.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K.(1990). Functions, graphs, and graphing : Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research,* 60(1), 1-64.

Mevarech, Z. R., & Kramarsky, B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations : Stability and change in students' alterative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32(3),* 229-263.

Monk, S., & Nemirovsky, R.(1994). The case of Dan : Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education, 4,* 139-168.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding : On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function,* 69-100.

NCTM.(2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

Nickerson, S. D., Cherienydam, & Bowers, J. S.(2000). Linking algebraic concepts and contexts. *Mathematics Teaching in the Middle School.* 6(2).

Poppe, P. E.(1993). *Representation of Function and the Role of the Variable.* UMI. AAC 9409911, Georgia State University.

Sfard, A.(1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function, In Harel, G., Dubinsky(Eds.), The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy Mathematical Association of America, MAA. 25, 25-58.

Skemp R.(1983). 수학학습심리학. 황우형 역. 서울: 민음사.

Tall, D.(1991), *Advanced Mathematical Thinking.* In Dubinsky, E., & Tall, D.(Eds.), Kluwer Academic Publisher.

Vinner, S., & Dreyfus, T.(1989). Image and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20(4),* 356-366.

Williams, S., R.(1993). Some common themes and uncommon directions. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function,* 313-337.

Yerushalmy, M., & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the opportunity to make algebra mathematically and pedagogically Interesting. In Romberg, T. A., Fennema, E. & Carpenter, T. P.(Eds.), *Integrating Research on The Graphical Representation of Function,* 41-68.

An Analysis of Graphing Domain in the Sixth and the Seventh Curriculum Textbooks

Jung Hwa Song (Kyowon Co., Ltd.)
Oh Nam Kwon (Ewha Womans University)

This paper investigated the teaching and learning of contents-related graphing in Korean secondary textbooks and suggested the improved methods of graph instruction through this analysis.

Textbooks are analyzed from the viewpoint of the proportion of graphing contents, their sequencing, the proportion of each domain in graphing activities (interpretation vs. construction, quantitative vs. qualitative aspect, local vs. global aspect) and tasks (prediction, translation, scaling), and the difference in the graphing contents

between the sixth and the seventh curriculum. This analysis demonstrates that graphing contents are increasing in textbooks, therefore the high school textbooks appear in almost every content area. The graphing activities concentrate on the construction, the quantitative aspects, and the local aspects, and are gradually focusing on the interpretation and global aspects of high school textbooks. Furthermore, most of graphing tasks favor translation. In contrast, the current seventh curriculum includes a balance of interpretation and construction activities and has more global aspects than the sixth curriculum based textbooks; however, the qualitative approach still rarely appears. For the graphing tasks, translation is still prevalent, but the importances of prediction tasks based on graph have increased in comparison with the sixth curriculum textbooks. Further, the seventh curriculum based textbooks are designed to stimulate more dynamic graphing instruction by introducing new tools such as graphing calculators and computer software. We suggest that the qualitative and global aspects should be emphasized in early graph instruction, a variety of graph activities in realistic contexts should be performed, and educational technology such as graphing calculator and computer can be efficient to implement these ideas.