

# 등각사상에 의한 대칭 스트립 전송선의 고차모드 차단주파수의 변분적 계산

## Variational Calculations for Higher Order Mode Cut-off Frequencies of Symmetrical Striplines by the Conformal Mapping

양 현 규 · 이 상 설

Hyun-Kieu Yang · Sang-Seol Lee

### 요 약

등각사상이 결합된 변분적 유한요소법을 이용하여 대칭 스트립 전송선의 고차모드 차단주파수를 계산한다. 등각사상은 스트립 전송선의 무한영역을 적절한 유한영역으로 변환하는데 사용된다. 변환된 유한영역에 대한 변분 방정식을 유도하고 유한요소법으로 그 해를 구하여 차단주파수를 계산한다. 다른 해석법에 의한 결과와 비교하여 이 해석법이 무한영역이 포함된 전송선의 고차모드 차단주파수 계산에 적합함을 확인한다.

### Abstract

The cut-off frequencies of higher order modes in a symmetrical stripline are calculated using the variational finite element method combined with the conformal mapping. The conformal mapping is used to improve the modeling of the infinite transverse extents of a stripline. And then the finite element method is employed to solve the variational equation in the transformed finite region. Comparisons with numerical results found in the literature validate the presented method.

### I. 서 론

1940년대 이래로 삼도체(triplate) 스트립 전송선을 해석하기 위해 해석적 방법과 수치적 방법이 사용되어왔다. 등각사상법(conformal mapping technique)은 스트립 전송선의 TEM 모드 특성들을 해석하는데 널리 사용되었다<sup>[1]-[5]</sup>. 이 방법을 이용하면 스트립 전송선의 무한영역은 적절한 유한영역으로 변환되어 TEM 모드 특성을 정확히 해석할 수 있다. 고차모드 차단특성 해석에는 주로 유한요소법이 사용되었다. 이 방법에서는 스트립 전송선의 무한 횡단면 영역의 전자계를 고려하기 위한 추가적인 가정들이 발견된다. 가장 널리 쓰이는 방법은 스트립으로

부터 상당한 거리에 금속벽(metallic wall)들을 가정하는 것이다. 이와 달리 Tsitsos 등<sup>[6]</sup>은 개방벽 경계(open-wall boundary)를 도입하고 이를 다루기 위해 무한요소(infinite element)를 사용하였다. 이를 통해 더욱 정확한 해를 얻었으나 무한요소의 감쇠 퍼라미터(decay parameter) 계산을 위해 어떤 가정을 해야 했다. 최근에 등각사상을 도입한 변분적 유한요소법이 이심 동축선(eccentric coaxial line)의 고차모드 차단 특성 해석에 성공적으로 적용되었다<sup>[7]</sup>. 이 방법을 이용하면 무한영역을 갖는 스트립 전송선의 고유값(eigenvalue) 문제를 간단한 유한영역을 갖는 문제로 변환시킬 수 있다. 따라서 어떤 가정을 추가하지 않고 무한 횡단면 영역의 전자계 마들링이 가능하다.

한양대학교 전자전기컴퓨터공학부(Division of Electronic & Computer Engineering, Hanyang University)

· 논문 번호 : 20011005-140

· 수정완료일자 : 2001년 11월 9일

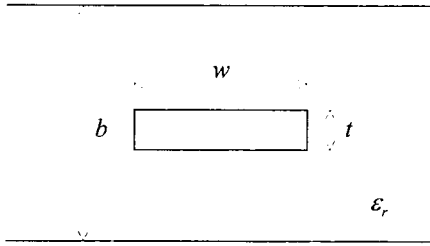


그림 1. 대칭 스트립 전송선의 횡단면  
Fig. 1. The geometry of a symmetrical stripline.

이 논문에서는 등각사상이 결합된 변분적 유한요소법을 이용하여 그림 1과 같은 대칭 스트립 전송선의 고차모드 차단주파수를 계산한다. 순차적 등각사상에 의해 스트립 전송선의 단면의 상반(upper half) 영역을 평행판 단면으로 변환하고 변환된 새로운 영역에 대한 변분 방정식을 유도하여 유한요소법으로 해를 구한다. 공기로 채워진 스트립 전송선에 대해 계산된 차단주파수를 참고문헌 [6]의 결과와 비교하여, 이 방법이 무한영역을 갖는 전송선의 고차모드 차단특성을 간단히 해석할 수 있는 효과적인 방법임을 보인다. 또한 스트립 두께에 대한 고차모드 차단주파수의 변화도 알아본다.

## II. 해석방법

### 2-1 스트립 전송선의 등각사상

그림 2의  $\omega$ -평면에 있는 스트립 전송선의 상반 영역은 다음과 같은 등각 변환식에 의해  $p$ -평면의 상반 영역으로 사상된다<sup>[2]</sup>.

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1-k^2p^2(1-k^2p^2sn^2(a,k))}} \quad (1)$$

여기서  $sn(a,k)$ 는 계수  $k$ 를 갖는 제1종 Jacobian 타원 함수들 중 하나이고  $a$ 와  $k$ 는 스트립 전송선의 치수와 관련된 상수이다.  $p$ -평면의 상반 영역은 다음과 같은 변환식에 의해  $s$ -평면 전체 영역으로 사상된다.

$$s = k^2 p^2 \quad (2)$$

식 (2)에  $p = 1/ksn(a,k)$ 를 대입하면,  $s$ -평면의  $\lambda$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda = sn(a, k) \quad (3)$$

전체  $s$ -평면은 다음 변환식에 의해  $z$ -평면의 직사각형 영역으로 사상된다<sup>[8]</sup>.

$$s = sn^2(z, \lambda) \quad (4)$$

$z$ -평면의  $K(\lambda)$ 와  $K(\lambda')$ 는 각각 계수  $\lambda$ 와  $\lambda'$ 를 갖는 완전 타원 적분이고  $\lambda$ 와  $\lambda'$ 의 관계는 다음과 같다.

$$\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2} = cn(a, k) \quad (5)$$

여기서  $cn(a, k)$ 는 계수  $k$ 를 갖는 제1종 Jacobian 타원 함수들 중 하나이다.

$z$ -평면에서 특성임피던스를 구하면 다음과 같다.

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(\lambda')}{K(\lambda)} \quad (6)$$

여기서  $\eta_0$ 는 자유공간의 고유 임피던스이다. 이 식은 Bates<sup>[2]</sup>에 의해 얻어진 것과 같다.

변환식 (1)에 의해 스트립 전송선의 치수는 다음 식을 만족한다<sup>[2]</sup>.

$$\frac{w}{b} = \frac{2K(k)}{\pi} \left[ \frac{k^2 sn(a, k) cn(a, k)}{dn(a, k)} - Z(a, k) \right] \quad (7)$$

$$\frac{t}{b} = \frac{a}{K(k)} - \frac{2K(k')}{\pi} \left[ \frac{k^2 sn(a, k) cn(a, k)}{dn(a, k)} - Z(a, k) \right] \quad (8)$$

$$b = \frac{\pi dn(a, k)}{k^2 sn(a, k) cn(a, k)} \quad (9)$$

여기서  $Z(a, k)$ 는 Jacobian Zeta 함수이고  $dn(a, k)$ 는 계수  $k$ 를 갖는 제 1종 Jacobian 타원 함수들 중 하나로  $sn(a, k)$ 과 다음과 같은 관계가 있다.

$$dn(a, k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(a, k)} \quad (10)$$

식 (9)의  $b$ 는 차단주파수 계산에 사용된다.

### 2-2 변분식에 적용된 등각사상

대칭 스트립 전송선에 대해서는 스트립 전송선 횡

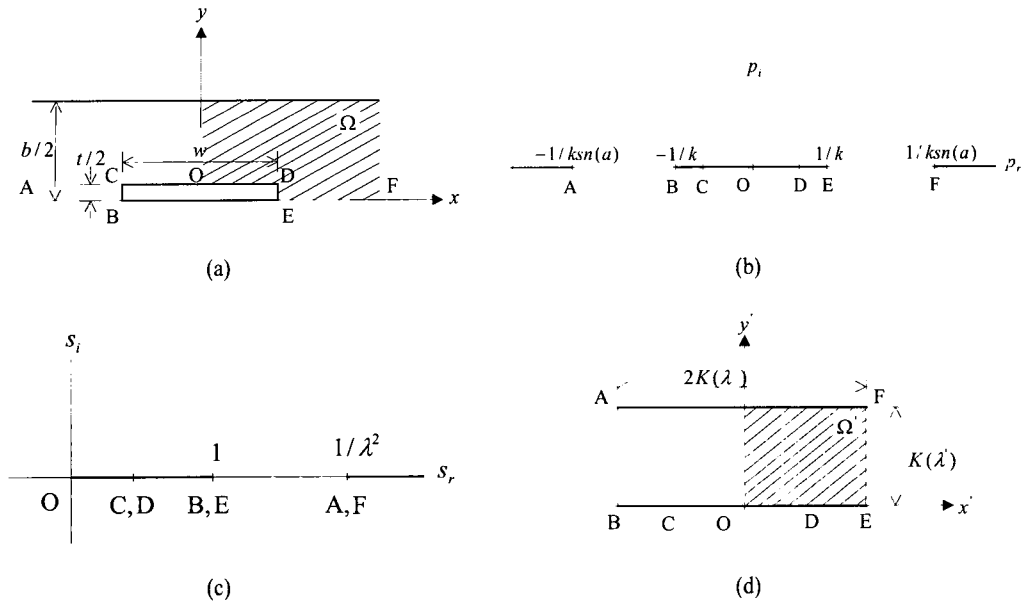


그림 2. 스트립 전송선의 상반 영역을 평행판 단면으로 변환하는 등각사상

(a)  $\omega$ -평면, (b)  $p$ -평면, (c)  $s$ -평면, (d)  $z$ -평면

Fig. 2. Conformal mappings to transform the upper half of the stripline into the parallel plates.

(a) The  $\omega$ -plane, (b) The  $p$ -plane, (c) The  $s$ -plane, (d) The  $z$ -plane.

단면(그림 1)의 사분면만 해석하면 된다. 균일 매체를 갖는 스트립 전송선의 고차모드 차단파수는 다음 변분 방정식의 고유값  $k$ 를 구함으로써 얻어진다.

$$\delta F = 0$$

$$F = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - k^2 \phi^2 \right] dx dy \quad (11)$$

여기서  $\Omega$ 는  $\omega$ -평면의 빗금친 영역이고  $\phi$ 는 구하고자 하는 모드에 대한 적절한 전위 함수의 축성분을 나타낸다. 또한  $k = 2\pi/\lambda_c$ 이고,  $\lambda_c$ 는 차단 파장이다.

식 (1), (2) 및 (4)의 등각사상을 순차적으로 적용하면 원좌표  $\omega(x, y)$ 는 새로운 좌표  $z(x, y)$ 로 변환되고 새로운 좌표에 대한 변분 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\delta F = 0$$

$$F = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y'} \right)^2 - k^2 |J| \phi^2 \right] dx' dy' \quad (12)$$

여기서  $\Omega$ 는  $z$ -평면의 빗금친 영역이고 Jacobian

$|J|$ 는 다음 식으로부터 구해진다.

$$|J| = \left| \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=x'+jy'}^2 \quad (13)$$

식 (13)의  $|d\omega/dz|$ 는  $z$ -평면에서 다음과 같다.

$$\left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \left| \frac{d\omega}{dp} \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dz} \right| \quad (14)$$

식 (1)로부터 식 (14)의  $|d\omega/dp|$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{\sqrt{k^2 - sn^2(z, \lambda)}}{k \cdot cn(z, \lambda) dn^2(z, \lambda)} \quad (15)$$

그리고 식 (2)와 (4)로부터 식 (14)의  $dp/ds$ 와  $ds/dz$ 는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dp}{ds} = \frac{1}{2k^2 p} = \frac{1}{2k \cdot sn(z, \lambda)} \quad (16)$$

$$\frac{ds}{dz} = 2sn(z, \lambda)cn(z, \lambda)dn(z, \lambda) \quad (17)$$

식 (15), (16), (17)을 식 (14)에 대입하고 식 (13)을 이용하면 Jacobian  $|J|$ 는 다음과 같이 된다.

$$|J| = \frac{1}{k^4} \left| \frac{k^2 - sn^2(z, \lambda)}{dn^2(z, \lambda)} \right|_{z=x'+jy'} \quad (18)$$

### 2-3 유한요소법

변분 방정식 (12)의 해는 기존 유한요소법으로 구할 수 있다.  $z$ -평면의  $\Omega'$ 영역을 그림 3과 같이 1차 사변형 요소로 분할하면 요소영역  $\Omega^e$ 에서의 미지 함수  $\phi^e$ 는 다음과 같이 전개된다.

$$\phi^e = \sum_{i=1}^4 N_i^e \phi_i^e \quad (19)$$

여기서  $\phi_i^e$ 는 노드  $(x_i^e, y_i^e)$ 에서의  $\phi$ 값이고  $N_i^e$ 는 선형 보간 함수이다. 각 요소에 대한 적분에는 2차원 가우시안 적분공식<sup>[9]</sup>이 사용된다. 각 요소적분의 결과와 Ritz 절차를 사용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[A][\Phi] - k^2[B][\Phi] = 0 \quad (20)$$

여기서  $[\Phi]$ 는 노드의 미지수들에 해당하는 열벡터이고  $[A]$ 와  $[B]$ 는 알고 있는 행렬이다. 식 (20)로부터  $k$ 는  $([A] - k^2[B])$ 의 행렬식이 0이 되는 조건을 만족하는 값이다<sup>[10]</sup>.

$z$ -평면의  $\Omega'$ 영역은  $y'=0$ 와  $y'=K(\lambda)$ 에 전기벽(electric wall)을 갖고  $x'=K(\lambda)$ 에 자기벽(magnetic wall)을 갖는다. TE 모드에서 전기벽은 Neumann 경

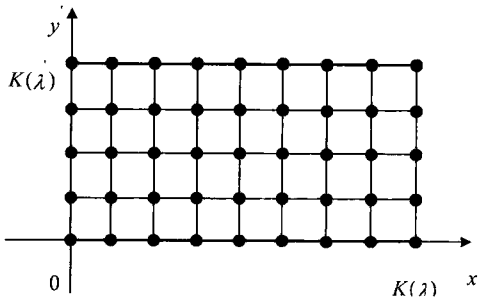


그림 3. 변환된  $z$ -평면의 영역에 대한 요소분할  
Fig. 3. A mesh division for the domain in the transformed  $z$ -plane.

계조건  $\partial \phi / \partial n = 0$ 을 만족하고 자기벽은 Dirichlet 경계조건  $\phi = 0$ 을 만족한다.  $x'=0$ 인 면에는 TE<sub>10</sub> 모드일 때 전기벽이 놓이고 TE<sub>20</sub> 모드일 때 자기벽이 놓인다.

### III. 수치해석 결과

공기로 채워진 대칭 스트립 전송선은 안테나 빔 형성 네트워크(antenna beamforming network)에 가장 널리 쓰이는 구조이다. Tsitsos 등<sup>[6]</sup>은 이 구조에 대해 차단파수를 계산하였다. 앞절에 설명된 방법을 사용하여 이 구조에 대한 차단파수를 계산한다. 그림 4는  $t/b=0.128$ 이고  $b=12.7$  mm인 스트립 전송선의 차단파수의 계산 결과를 보이고 있다. 참고문헌 [6]의 결과와는 최대 0.9%의 오차로서 거의 일치하고 있다.

그림 5는 스트립 두께와 스트립 기판 사이 거리의 비( $t/b$ )가 0.001, 0.128, 0.3인 스트립 전송선의 차단파수를 보이고 있다. 스트립 폭이 0으로 근접할 때 TE<sub>10</sub> 모드의 차단파수가 247.38 [rad/m]로 수렴함을 볼 수 있다. 스트립 폭이 0일 때 스트립 두께는 TE<sub>10</sub>에 영향을 주지 않으므로 TE<sub>10</sub> 모드 차단파수는 무한 평행판의 차단파수와 같다. 무한 평행판의 차

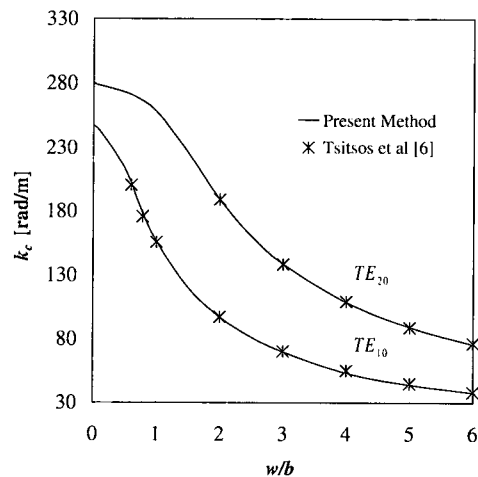


그림 4.  $t/b=0.128$ 이고  $b=12.7$  mm인 스트립 전송선의 스트립 폭에 대한 차단파수  
Fig. 4. Cut-off wavenumbers versus  $w/b$  for the striplines with  $t/b=0.128$  and  $b=12.7$  mm.

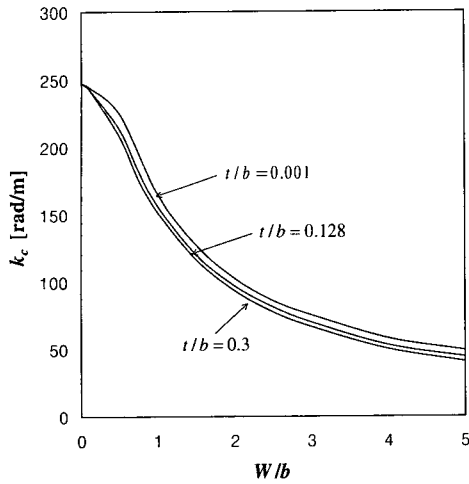


그림 5. 스트립 두께가 다른 스트립 전송선 ( $b = 12.7$  mm)에 대한 최저 고차모드 차단파수  
 Fig. 5. First higher order mode ( $TE_{10}$ ) cut-off wavenumbers for several striplines with  $b = 12.7$  mm.

단파수는 다음 식과 같다.

$$k_c = \frac{n\pi}{b} \quad (21)$$

이 식에서  $TE_{10}$  모드 차단파수는  $247.3695$  [rad/

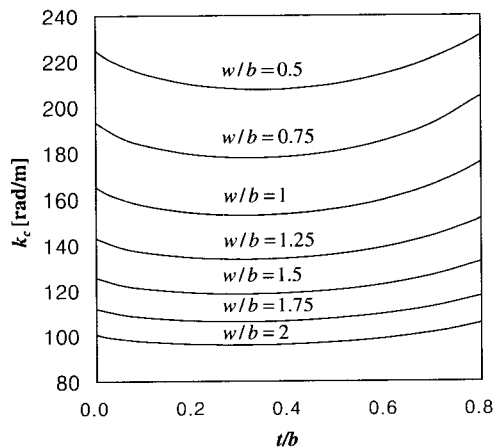


그림 6.  $b = 12.7$  mm인 스트립 전송선의 스트립 두께에 따른 최저 고차모드 차단파수 변화  
 Fig. 6. First higher order mode ( $TE_{10}$ ) cut-off wavenumbers of striplines with  $b = 12.7$  mm, showing the effect of strip thickness.

m]이므로 계산결과가 정확한 값에 근접함을 알 수 있다.

그림 6은 스트립 두께가 스트립 전송선의 차단파수에 미치는 영향을 보이고 있다.  $t/b$ 가 0.3에서 0.34 사이의 값을 가질 때 차단파수가 최소로 된다. 또한 스트립 폭이 좁을수록 스트립 두께가 차단파수에 미치는 영향이 커짐을 알 수 있다.

#### IV. 결 론

등각사상을 도입한 변분적 유한요소법을 사용하여 대칭 스트립 전송선의 고차모드 차단주파수를 계산하였다. 계산 결과는 지금까지 보고된 결과와 잘 일치하고 있다. 이 방법은 어떤 가정을 추가하지 않고 무한 횡단면 영역의 전자계 만들림이 가능함으로써, 적절한 등각사상을 선택하면 무한영역을 갖는 여러가지 형태의 전송선의 차단 특성을 해석할 수 있다. 스트립 두께가 차단주파수에 미치는 영향을 해석한 결과, 스트립 두께와 스트립기판 사이의 거리의 비가 0.3 근처에서 차단주파수가 최저임을 알 수 있다.

#### 참 고 문 헌

- [1] S. B. Cohn, "Characteristic impedance of the shielded strip-transmission lines", *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-2, no. 2, pp. 52-55, 1954.
- [2] R. H. T. Bates, "The characteristic impedance of the shielded slab line", *IRE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-4, pp. 28-33, Jan. 1956.
- [3] J. S. Rao and B. N. Das, "Analysis of asymmetric stripline by conformal mapping", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-27, no. 4, pp. 299-303, April 1979.
- [4] P. Robrish, "An analysis algorithm for unbalanced stripline impedance", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, no. 8, pp. 1011-1016, Aug. 1990.
- [5] S. Rawal and D. R. Jackson, "An exact TEM

calculation of loss in a stripline of arbitrary dimensions", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-39, no. 4, pp. 694-699, April 1991.

- [6] S. Tsitsos, A. A. P. Gibson and H. I. McCormick, "Higher order modes in coupled striplines: prediction and measurement", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-42, no. 11, pp. 2071-2077, Nov. 1994.
- [7] H. Yang and S. Lee, "A variational calculation of TE and TM cutoff wavenumbers in circular

eccentric guides by conformal mapping", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 31, no. 5, pp. 381-384, Dec. 2001.

- [8] F. Bowman, *Introduction to Elliptic Functions with Applications*. New York: Dover Publ. Inc., 1961.
- [9] O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill, 1977.
- [10] K. J. Bathe and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

#### 양 현 규



1974년 5월 9일생  
 1995년 2월: 한양대학교 전자공학과 (공학사)  
 1997년 2월: 한양대학교 대학원 전자공학과 (공학석사)  
 1997년 9월~현재: 한양대학교 대학원 전자통신전파공학과 박사

과정

[주 관심분야] 마이크로파 소자 설계 및 전파 전파

#### 이 상 설



1937년 5월 30일생  
 1961년: 한양대학교 전기공학과 (공학사)  
 1966년: 한양대학교 전자공학과 (공학석사)  
 1974년: 연세대학교 전자공학과 (공학박사)

1977년: 프랑스 그르노블대학교 (공학박사)

1995년~1997년: 한양대학교 공과대학 학장

1996년~1997년: 대한전자공학회 회장

현재: 한양대학교 전자전기컴퓨터공학부 교수

[주 관심분야] 안테나 및 전파 이론