

초정밀 비구면 가공용 CAM 소프트웨어 개발에 대한 연구

양민양*, 이택민**

The Development of CAM Software for Ultra-precision Aspheric Surface

Min Yang Yang*, Taik Min Lee**

ABSTRACT

As consumer electronics, information, and aero-space industry grow, the demand for aspheric lens increases higher. To enhance the precision and productivity of aspheric surface, a CAM system for ultra-precision aspheric surface needs to be realized. In this study, the developed CAM system can generate NC code for various aspheric surfaces fast and precisely by a new bi-arc interpolation method that the location of maximum error is fixed at an efficient point. The newly developed bi-arc meets the given tolerance more precisely, performs faster calculation. The cutting condition input module and the NC code verification module are adequate to ultra-precision machining, so that a operator can obtain products fast and easily.

Key Words : aspheric(비구면), CAM(캠), ultra-precision(초정밀), bi-arc interpolation(바이아크 보간)

기호설명

- l_1 : 두 knot 사이의 거리
- O_i : i 번째 원호의 중심($i=1,2,3$)
- P_1 : 시작점(start knot)
- P_2 : 끝점(terminal knot)
- P_3 : 첫번째 원호와 두번째 원호 사이의 연결점
- P_4 : 두번째 원호와 세번째 원호 사이의 연결점
- P_v : 현 $P_1 P_2$ 에 평행한 접선을 갖는 곡선 위의 점
- P_c : 현 $P_1 P_2$ 와 P_v 에서의 법선과의 교점
- r_i : i 번째 원호의 반경($i=1,2,3$)
- t_i : 데이터 점 P_i 에서의 접선벡터
- θ_i : i 번째 원호의 중심각($i=1,2,3$)

1. 서론

오늘날 영상 정보 산업, 항공 우주 산업 등의 발전과 더불어 멀티미디어 플레이어, 캠코더용 비구면 렌즈, 그리고 계측장비용 광학 렌즈 등의 수요가 급증하고 있는 추세이다. 과거의 렌즈 시스템은 다수의 구면 렌즈들로 구성되어 있던 반면 오늘날의 렌즈들은 그 기능에 따라 다양한 형상을 이루고 있다. 구면의 광학 소자에서는 구면 수차가 존재하여 빛을 한 점으로 모으는 것이 불가능하였으므로 여러 개의 구면 광학 소자를 조합하여 구면 수차를 제거하였으나, 오늘날에는 장비의 소형화가 필요로 되어 구면 수차가 제거된 비구면 식을 이용한 면이 사용되고 있다. CD 플레이어, 캠코더에 사용되는 렌즈들이 비구면 식을 이용한 형상이며, 광학 렌즈들도 비구면의 일종인 포물면, 타원면, 또는 쌍곡선면 형상이다⁽¹⁾.

2001년 5월 21일 접수
* 한국과학기술원 기계공학과
** 한국과학기술원 기계공학과 대학원

고정도의 렌즈 또는 렌즈의 금형들은 형상 정밀도가 수십 나노미터에 이르는 초정밀 제품으로써 초정밀 선반에서 가공된다. 초정밀 가공에서는 공구의 가공물에 대한 상대 운동이 그대로 가공물에 전사되므로 생성되는 NC Code 의 정확도가 중요하다⁽²⁾. 따라서 NC Code 생성시 주어진 허용 공차를 벗어나지 않는 보간 방법의 적용이 필요하다.

일반적으로 공작 기계는 직선 가공, 원호 가공, NURBS 가공을 할 수 있다. 따라서 비구면 형상의 가공을 위해서는 허용 공차를 만족하는 직선, 원호, NURBS 곡선으로 보간을 하여야 한다.

직선보간의 경우 계산 시간이 적게 걸린다는 장점이 있는 반면, 매우 작은 허용 공차를 만족하는 범위에서 직선으로만 형상을 이루기 때문에 많은 불력의 NC Code 가 생성된다. 그리고 실제 가공 시에 한 직선마다 공구의 가감속이 발생하여 가공 시간이 길어지며, 스텝 마크도 생길 수 있다⁽³⁾.

금형가공 등의 심미적인 곡선의 가공에 많이 쓰이는 NURBS 보간의 경우는 NC code 의 블록 수를 최소화할 수 있으며, 각 NURBS 곡선간의 연결점들을 1 차, 2 차 미분값까지도 연속으로 할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, NURBS 곡선은 고차식이므로, 오차를 계산할 때, 직선과 원호와는 달리 해석적으로 계산할 수 없고, 수치해석을 통한 반복시행으로 계산하여야 한다. 따라서, 초정밀 비구면과 같은 초정밀 가공의 보간을 위해서는 상당히 촘촘하며 반복적인 오차 수치 해석을 해야하므로 계산 시간이 상당히 오래 걸리게 된다.

이에 반해 원호보간의 경우는, 직선보간과 NURBS 보간의 절충으로써, 각 원호들의 연결 점들이 1 차 미분값까지 연속이므로 각 원호마다 가감속이 발생하여도 직선가공에 비해 형상 오차가 적게 생성된다. 초정밀 비구면 가공은 상당히 이송속도가 느린 가공으로써 형상이 2 차 미분까지 연속인 것이 큰 영향을 주지 못한다. 또한, 비구면의 형상자체가 원호의 형상에 가깝기 때문에, 직선보간에 비해 생성되는 NC Code 블록 수도 상당히 적어서 공구의 가감속에 의한 가공시간도 줄어든다⁽⁴⁻⁵⁾. 하지만 초정밀 가공을 위해, 허용공차를 정확히 만족하는 원호 보간을 할 경우, 기존의 방법은 여전히 많은 계산을 필요로 하여 NC Code 생성시간이 길어진다는 단점이 있다.

기존의 원호보간으로는 Fig.4(a)와 같이 주어진

두 점 사이의 구간을 두개의 원호로 보간하는 바이아크 보간법이 널리 사용되고 있다. 하나의 원호 당 3 개의 구속 조건이 필요하므로 바이아크에서는 총 6 개의 구속 조건이 필요하다. 이중 1 차 미분값까지 연속이기 위해 다음의 5 가지 구속 조건은 필요조건이다.

- ① 구간의 시작점의 위치(P_1).
- ② 구간의 시작점에서의 접선(t_1).
- ③ 구간의 끝점의 위치(P_2).
- ④ 구간의 끝점에서의 접선(t_2).
- ⑤ 첫번째 원호 끝점에서의 접선과 두번째 원호 시작점에서의 접선의 일치.

6 번째 구속 조건으로 여러 가지 조건이 제시되었다. 두 원호의 반경 차이를 최소화함에 의해 2 차 미분값의 불연속을 최소화하는 방법⁽⁶⁾, 두 원호의 연결점에서 접선의 방향이 보간하려는 구간의 양단(이하 구간의 양단)을 잇는 직선의 방향과 같게 하는 방법⁽⁵⁾ 등 그 외에 여러 방법⁽⁷⁻⁹⁾이 있다.

그러나, 이러한 방법들은 두가지 문제점을 가지고 있다.

첫째, Fig. 1(a)를 보면 최대 오차의 위치가 어느 곳인지 알 수가 없다. 따라서 최대 오차의 위치를 구해 내기 위해 수치 해석적인 방법으로 많은 양의 계산을 해야 한다. 그런데, 만약 최대 오차 위치를 Fig. 1(b)와 같이 특정 위치에 고정시키면 최대오차 위치를 구하기 위한 계산량을 줄일 수 있을 것이다.

둘째, 효율적인 원호의 생성이 고려되지 않았다. 기존의 바이아크 보간에서는 보간할 구간과 양단의 접선 방향이 결정되면 Fig. 1(a)와 같이 실제 곡선이 달라도 똑같은 바이아크를 생성한다. 따라서 보간 오차가 매우 크게 생성이 된다. 이와 달리, 실제곡선이, 곡률 반경이 크다가 작아지면 그에 맞춰 첫번째 원호는 반경이 크고 두번째 원호는 반경이 작은 원호가 생성되고, 곡률 반경이 작다가 커지면 이에 맞는 원호들이 생성된다면, Fig. 1(b)와 같이 보간 오차가 줄어들어 적은 원호 수로 효율적인 보간을 수행할 수 있을 것이다.

위의 문제를 해결하기 위한 방안으로, 허용공차를 정확하고 빠르게 만족시킬 수 있도록, 최대 보간오차의 위치를 효율적인 곳에 고정시키는, 원

호 3 개가 한개의 스텝길이(Step Length) 를 이루는 트라이아크 보간법이 제시되었다⁽³⁾. 하지만, 트라이아크 보간법은 구간의 양단을 원호 3 개로 보간하기 때문에 생성되는 원호의 수가 많다는 단점을 갖고 있다.

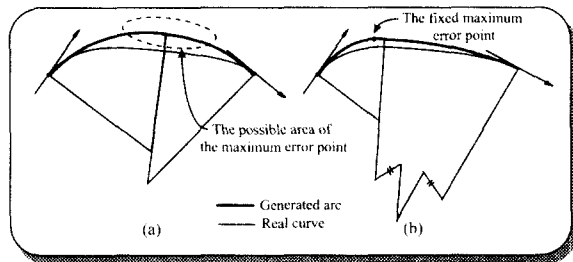


Fig. 1 (a) Inefficient biarc. (b) Efficient biarc.

이에 본 논문에서는 트라이아크 보간법의 장점을 갖고, 구간의 양단을 원호 2 개로 보간하는 새로운 바이아크 보간법을 개발하여 초정밀 비구면 가공에 적용하였다.

초정밀 가공의 또 다른 특징 중의 하나는 일반적인 선삭 가공에 비해 윤곽 가공을 여러 번 해야 한다는 것이다. 가공변질층으로 인해 가공 표면이 나빠지는 것⁽¹⁰⁾을 피하기 위해 절삭 깊이를 점점 줄이면서 여러 차례의 윤곽 가공을 실시하고 고정도의 가공면을 얻을 수 있다. 따라서 초정밀 가공용 CAM 소프트웨어에는 윤곽 가공을 여러 번 할 수 있도록 지원하는 기능이 필요하다.

초정밀 가공에서는 표면 거칠기를 좋게 하기 위해 작은 이송 속도로 가공을 하므로 가공 시간이 길어진다. 그리고, 초정밀 선삭 가공기와 다이아몬드 공구는 고가이므로 잘못된 생성된 공구 경로는 시간적인 손실 뿐만 아니라 고가의 장비를 망가뜨릴 수도 있다. 따라서 공구 경로를 검증할 수 있도록 생성된 NC Code 를 시뮬레이션하는 기능이 필요하다.

본 연구의 목적은 위에서 설명한 초정밀 가공의 특성에 맞도록 허용 공차를 벗어나지 않는 보간 방법, 여러 번의 윤곽 가공을 지원하는 기능, 그리고 NC Code 검증 기능의 개발을 통해 다양한 비구면 형상들을 가공할 수 있는 CAM 소프트웨어를 구현하는 것이다.

2. CAM 소프트웨어의 구조

전체 구조는 Fig. 2 와 같이 입력부, 처리부, 그리고 출력부로 이루어져 있다. 입력부에서는 가공할 형상, 공구, 원소재, 그리고 가공 조건을 입력 받고, 처리부에서는 공구 경로를 계산한 후, NC 코드를 생성 및 검증을 수행한다. 출력부에서는 입력된 데이터와 NC 코드의 수정, 편집이 가능하며 파일로 관리할 수 있도록 구현하였다. Fig. 2 에서 설명된 전체 시스템을 구현하기 위한 CAM 의 전체 메뉴는 Fig. 3 과 같다.

Figure 메뉴에서는 가공할 형상을 계수의 입력을 통해 정의하고, Tool & Stock 메뉴에서는 공구와 원소재에 대한 입력을 한다. 다음으로 보간 방법을 선택한 후 Basic Condition 과 Advanced Condition 을 선택해서 가공 조건들을 입력한다. 이처럼 모든 가공에 필요한 정보를 입력한 후 NC Code Generation 을 선택하면 NC Code 가 생성된다. View 메뉴의 Report 를 통해 입력된 정보를 볼 수 있으며, NC code 를 통해 생성된 NC Code 를 볼 수 있고 편집할 수 있다. 이와 같이 생성된 NC Code 를 Wireframe 과 Dynamic Simulation 을 통하여 검증하고, 허용공차를 정확히 만족하는지 해석적으로 검증한다. File 메뉴를 통해서 입력된 정보와 NC 코드를 저장하고, 초정밀 비구면 가공기에 전송하여 초정밀 가공을 수행한다.

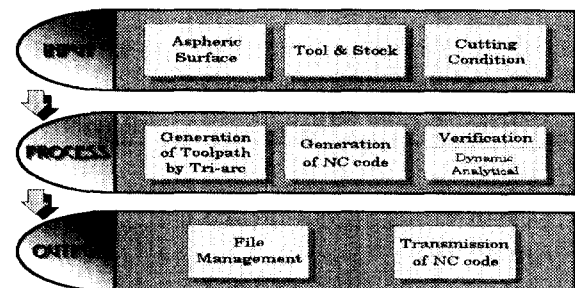


Fig. 2 The structure of CAM software for ultra-precision aspheric surface.

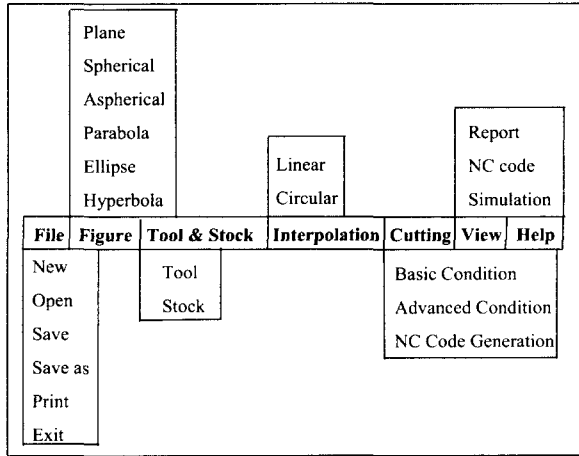


Fig. 3 The entire menu structure of CAM software for ultra-precision aspheric surface.

3. 비구면 형상의 종류

비구면 형상은 크게 축대칭 비구면과 비축대칭 비구면 형상으로 나눌 수 있다. 이중 초정밀 비구면 선삭 가공기에서 가공될 수 있는 형상은 축대칭 비구면 형상으로써 비구면 계수들로 표현이 되어지는 비구면 식을 이용한 면, 광학계에 사용되는 렌즈나 집광 장치들의 형상인 포물면, 타원면, 그리고 쌍곡선면이 있다. 이러한 형상들에 대한 방정식과 입력되어야 할 계수들을 Table. 1에 나타내었다. 그 외에 평면과 구면에 대해서도 CAM 소프트웨어가 지원하도록 정의를 해놓았다.

Table 1 Figure input module of the CAM software for ultra-precision aspheric surface.

Surface	Equation	Parameter
Plane	.	.
Spheric	$Z^2 + X^2 = R^2$	R
Aspheric	$Z = \frac{cX^2}{1 + \sqrt{1 - (1+K)c^2X^2}} + AX^4 + BX^6 + CX^8 + DX^{10}$	c, K, A, B, C, D
Parabola	$Z = a \times X^2$	a
Ellipse	$\frac{Z^2}{A^2} + \frac{X^2}{B^2} = 1$	A, B
Hyperbola	$\frac{Z^2}{A^2} - \frac{X^2}{B^2} = 1$	A, B

4. 비구면 형상의 원호보간

비구면 형상의 가공을 위하여 허용공차를 정확하고 빠르게 만족시킬 수 있도록, 최대 보간오차의 위치를 효율적인 곳에 고정시키는, 원호 2 개가 한개의 스텝길이(Step Length) 를 이루는 새로운 바이아크 보간법을 개발하였다.

이 보간법은 최종적으로는 2 개의 원호로 구성 되어 있지만, 일시적으로 3 개의 원호로 분리한 후에 다시 2 개의 원호로 합쳐진다.

먼저, 첫번째(S_1) 원호는 구간의 시작점(P_1)에서부터 최대 보간오차점(P_3) 사이에 존재하도록 한다. 이때 최대 보간오차점(P_3)은 다음과 같은 조건을 만족하면 최대 보간오차가 발생하는 점이 된다. (Fig. 4 참조)

- ① 최대 보간오차점(P_3)이 구간의 시작점(P_1)과 끝점(P_2)을 연결한 선분(l_1)에서 가장 먼 곡선 위의 점(P_v)의 법선 위에 존재하도록 한다.
- ② 최대 보간오차점(P_3)에서의 접선(t_3)이 구간의 시작점(P_1)과 끝점(P_2)을 연결한 선분 (l_1)에 평행 ($t_3 // l_1$) 하도록 한다.

이를 증명하기 위해 실제곡선과 생성된 원호 (S_1) 사이의 임의의 위치(P_a)에서 오차를 다음과 같이 해석하였다.

$$|error| = |O_1P_a - O_1P_1| \quad (1)$$

$$|error| = |r_1 - \sqrt{x^2 + f^2(x)}| \quad (2)$$

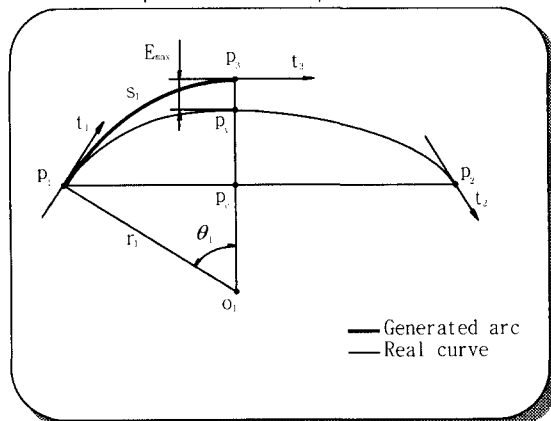


Fig. 4 Generation of the first arc in Triarc interpolation.

$$|error|' = \left| -\frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + f^2(x)}} \right| \quad (3)$$

따라서,

$$x + f(x)f'(x) = 0 \quad (4)$$

을 만족하는 x 에서 극값을 가진다.
이 식은,

$$\frac{f(x)}{x} f'(x) = -1 \quad (5)$$

으로 정리되며, $\frac{f(x)}{x}$ 는 $\overline{O_1P_n}$ 의 기울기와 같다.

그러므로 곡선 상의 임의의 위치에서의 접선과 이에 대응하는 원호의 중심 방향이 직교하는 경우, 즉, 곡선에서의 법선이 원호의 중심을 지날 때만 극값을 갖는다. 이에 따라 P_3 에서 오차의 극대값, P_1 에서 오차의 극소값을 가지므로 P_3 에서 최대 오차가 발생한다. 이러한 결과는 P_3 의 우측 부분인 원호 S_2 영역에서도 마찬가지이다.

두번째(S_2)와 세번째(S_3) 원호를 생성하기 위해 6 가지 조건이 필요하다. 이 중 5 가지 조건은 바이아크 보간에서 필요조건이고, 나머지 하나의 조건으로는 현재 3 개로 분리된 원호를 두개로 합치기 위한 조건을 사용하였다. (Fig. 5 참조)

- ① 두번째 원호의 시작점의 위치(P_3)
- ② 첫번째 원호의 끝점에서의 접선과 두번째 원호의 시작점에서의 접선의 일치(t_3)
- ③ 두번째 원호의 끝점에서의 접선과 세번째 원호의 시작점에서의 접선의 일치(t_4)
- ④ 구간의 끝점의 위치(P_2).
- ⑤ 구간의 끝점에서의 접선(t_2)
- ⑥ 첫번째 원호의 반경(r_1)과 두번째 원호의 반경(r_2) 일치

위와 같은 구속조건으로 생성된 3 개의 원호가 Fig. 5 에 있으며 첫번째 원호와 두번째 원호의 반경이 같으므로 최종적으로 두 원호를 하나의 원호로 합치면 Fig. 6 과 같이 새로운 바이아크 보간법이 완성된다.

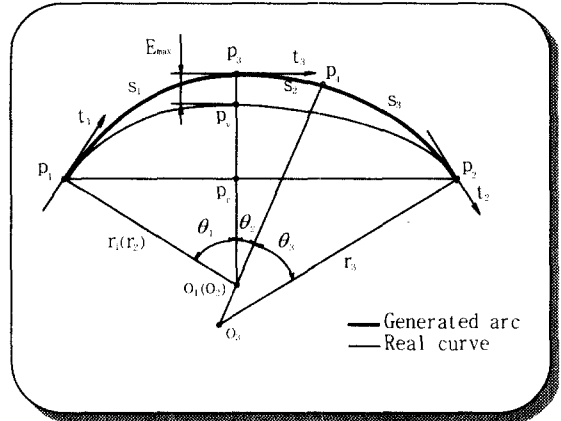


Fig. 5 Geometric configuration of the new biarc divided into three arcs.

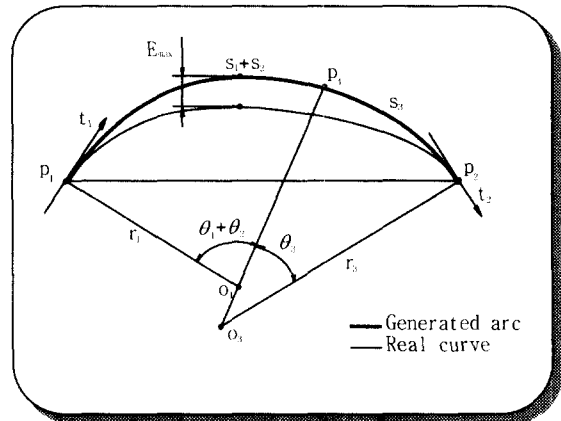


Fig. 6 New biarc combined into two arcs.

보간을 위한 전체 알고리즘은 Fig.7 과 같다. 최대 오차의 위치를 첫번째 원호의 끝(P_3)으로 고정하였기 때문에 첫번째 원호의 반경(r_1)만 계산하면 최대 오차(E_{max})를 바로 계산할 수 있다. 계산한 최대 오차(E_{max})가 허용공차보다 크면 구간의 끝점(P_2)을 다시 예측해서 최대 오차를 구해야 한다. 이와 같이 최대 오차가 허용공차의 100% 이내의 값으로 근접할 때까지 P_2 를 옮기는 반복수행을 한 후 원호를 이루기 위한 다른 값들을 계산한다.

허용공차를 정확히 만족하도록 고안된 바이아크 보간법을 이용하여 반경 20mm 타원과 쌍곡선 형상에 대하여 1nm, 10nm, 1000nm 의 허용공차 내로의 보간을 Fig. 8 과 같이 수행하였다.

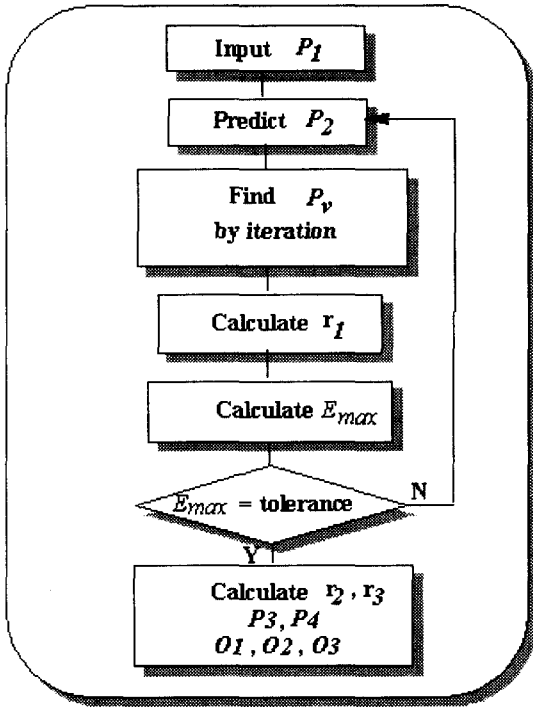


Fig. 7 Flow chart for the new biarc.

Fig. 8 에서 산모양 하나가 바이아크 보간의 한 구간이 된다. 예를 들어 Fig. 8(a)의 경우는 바이아크 구간 9 개 즉 원호 18 개로 보간된 것으로서 최대오차가 허용공차를 넘지않으면서 허용공차에 근접한 값을 알 수 있다. 그 외의 다른 경우도 최대오차가 허용공차내에 근접한 값을 확인할 수 있다.

5. CAM 이 지원하는 가공 방식

CAM 이 지원해야 할 가공 방식은 원통형 소재가 입력되었을 경우와 이미 황삭을 다른 선반으로 한 비구면 형태의 소재가 입력되었을 경우에 따라 크게 두가지로 구분될 수 있다.

원통형 소재가 입력될 경우 황삭에서부터 마지막 정삭까지 한번에 깎을 수 있는 NC Code 가 생성되어야 한다. 이 때 황삭 다음에 여러 번의 증삭을 거친 후 정삭을 하여야 하는 데 이들을 윤곽 가공이라 명하였다. 본 CAM 시스템에서는 황삭 가공과 3 번의 윤곽 가공을 지원할 수 있도록 하였다.

다른 선반에서 황삭을 한 후 초정밀 선반에서는 윤곽 가공만을 하려 할 때에는 1 차, 2 차, 3 차

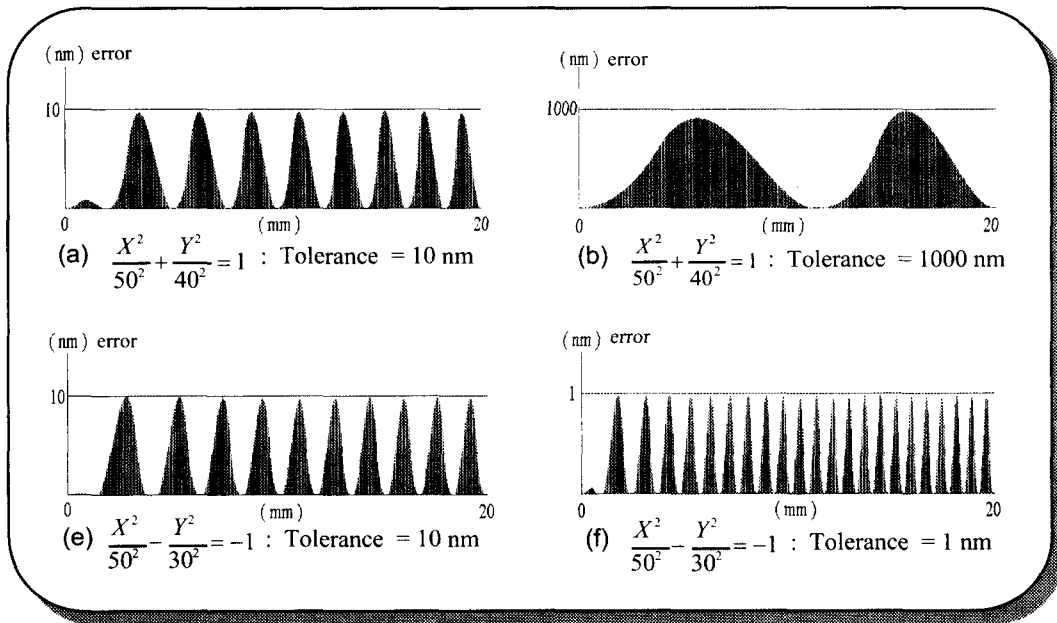


Fig. 8 Error map between the new biarc and various aspheric profiles.

윤곽가공에 대한 NC Code 를 생성할 수 있도록 하였다.

6. 가공 시뮬레이션

가공 시뮬레이션은 시각적인 검증과 해석적인 검증 기능을 갖도록 하였다.

공구 경로가 제대로 생성되었는지를 시각적으로 확인할 수 있도록 Fig. 9 와 같이 동적인 시뮬레이션 기능을 구현하였다. 입력된 원소재의 형상을 그려 놓고, 다이아몬드 공구의 형상을 공구 반경을 고려하여 그린 후, 이 공구를 NC Code 에 따라 움직이도록 하여 원소재와 겹치는 부분은 지워나가는 방식의 기능을 통해 사용자는 공구 경로가 제대로 생성되었는지와 절삭 깊이, 이송 속도 등의 가공 조건이 제대로 주어졌는지를 확인해 볼 수 있다.

시각적인 검증으로도 공구 반경의 간섭에 의한 미세한 과절삭은 식별해 낼 수 없다. 공구 날끝 반경(R)보다 비구면 형상의 곡률 반경이 작아서 간섭이 발생한 Fig. 10(a)의 경우, 비구면식의 곡률 반경과 공구 날끝 반경의 비교를 통해 간섭을 검사할 수 있다. 비구면 형상 끝단의 접선 각도(θ_w)보다 공구 옆면 각도(θ_l)가 더 커서 간섭이 생긴 Fig. 10(b)의 경우, 비구면 형상 끝단의 접선 각도(θ_w)보다 공구 아랫면 각도(θ_b)가 더 커서 간섭이 생긴 Fig. 10(c)의 경우도 각각 각도들의 비교를 통해 간섭을 검사한다.

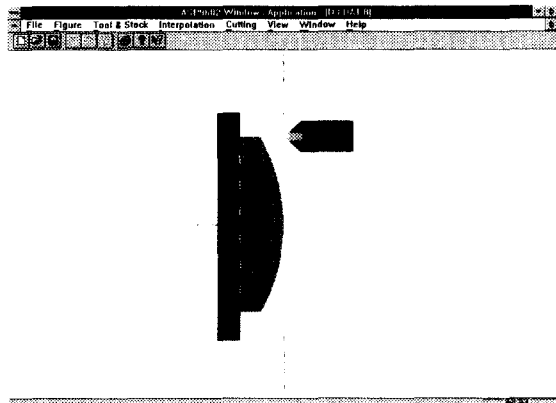


Fig. 9 Dynamic simulation for the verification of tool path.

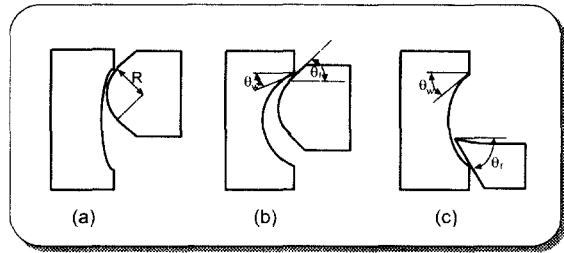


Fig. 10 Interference between tool and workpiece.

7. 비구면 가공 실험

본 CAM 소프트웨어를 이용해서 Fig. 11 과 같이 불룩한 비구면과 오목한 형상의 비구면을 가공하였다. 가공실험은 FANUC 15T 콘트롤러를 탑재한 대우중공업의 비구면가공기 AG06 에서 수행하였다.

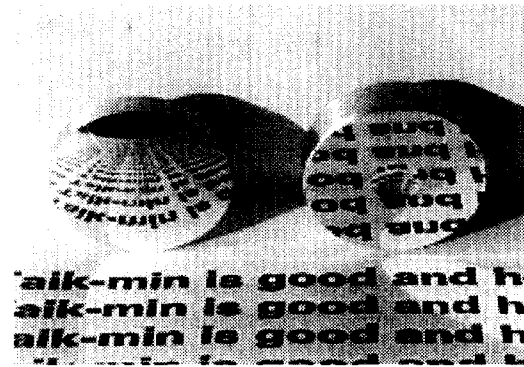


Fig. 11 Examples of machined aspheric surface.

8. 결론

본 연구를 통해서 다음의 특징을 갖는 초정밀 비구면 가공용 CAM 소프트웨어를 개발하였다.

(1) 평면, 구면, 비구면 식을 이용한 면, 포물면 타원면, 그리고 쌍곡선면을 가공할 수 있도록 입력 기능을 구현하였고, 초정밀 가공에 적합하도록 황삭과 총 3 회의 윤곽 가공이 가능한 가공 조건 입력 기능을 구현하였다.

(2) 정밀하고 효율적인 공구 경로 생성을 위해 최대 보간 오차의 위치를 고정시키는 새로운 바이

아크 보간을 고안하였다. 이 보간을 통해 허용공차를 정확히 만족하는 공구 경로를 기존의 원호 보간에 비해 빠르게 생성할 수 있었고, 효율적인 원호의 생성으로 인해 NC code 블록 수를 줄일 수 있었다.

(3) 생성된 공구 경로를 바탕으로 NC code 를 생성하는 기능을 구현하였고, 검증하는 기능을 구현하였다. 공구 경로를 실선으로 그리는 Wire-frame 방식과 공구의 움직임을 확인할 수 있는 시뮬레이션 방식을 통해 전체적인 공구 경로를 검증하였으며, 미세한 공구 간섭은 공구의 형상 정보와 비구면 식의 비교를 통해 검증하였다.

제안된 초정밀 비구면 선삭가공용 CAM 소프트웨어는 비구면 형상의 초정밀 가공에 있어 정밀도와 생산성을 향상시키는데 기여할 것으로 기대한다.

참고 문헌

1. N. Taniguchi, "Current status in, and future trends of, ultraprecision machining and ultrafine material processing," *Annals of the CIRP*, Vol. 32, pp. 573 - 582, 1983.
2. A. I. Minaev, "Methods of increasing the finishing accuracy of specular surfaces of optical elements by diamond turning," *The Optical Society of America*, pp. 501-504, 1991.
3. M. Y. Yang, T. Y. Shon and T. M. Lee, "Cam Profile Machining by Tri-arc Curve Fitting," *Int. J. Prod. Res.*, pp. 1767-1778, 1998.
4. G. W. Vickers, and C. Bradley, "Curved surface machining through circular arc interpolation," *The winter annual meeting of the ASME, PED*, Vol. 45, pp. 191-198, 1990.
5. 최병규, "CAM 시스템과 CNC 절삭가공," *첨문각*, pp. 195-197, 243-247, 1993.
6. D. B. Parkinson, and D. N. Moreton, "Optimal biarc-curve fitting," *Computer-aided design*, Vol. 23, No. 6, pp. 411-419, 1991.
7. K. M. Bolton, "Biarc curves," *Computer-aided design*, Vol. 7, No. 2, pp. 89-92, 1975.
8. D. S. Meek and D. J. Walton, "Approximating discrete data by G1 arc splines," *Computer-aided design*, Vol. 24, No. 6, pp. 301-306, 1992.
9. J. Schonherr, "Smooth biarc curves," *Computer-aided design*, Vol. 25, No. 6, pp. 365-370, 1993.
10. N. Ikawa, S. Shimada, and H. Tanaka, "Minimum thickness of cut in micromachining," *Nanotechnology* 3, pp. 6-9, 1992.