

# 감속단 백래시 기여율 변화에 따른 2 단 기어 감속 서보 시스템의 주파수 응답 특성

백주현\*, 홍성민\*, 양태석\*\*, 김수현\*\*\*, 곽윤근\*\*\*

## Frequency Response Characteristics of Two-Stage Gear Reduction Servo System According to the Backlash Contribution Ratio Variation of Each Gear Reduction Stage

Joo Hyun Baik\*, Sung Min Hong\*, Tae Suk Yang\*\*, Soo Hyun Kim\*\*\* and Yoon Keun Kwak\*\*\*

### ABSTRACT

The paper investigates the change of frequency response characteristics on two-stage gear reduction servo system according to the variation of backlash amount of each gear reduction stage, under the condition that the backlash of total system is constant. It is shown that the frequency response characteristics of the system heavily depend on the contribution ratio which is defined as a ratio of the first backlash amount to the total backlash. It is also found that there is an optimal backlash combination to maximize the bandwidth of two-stage gear reduction servo system when the allowable total backlash is determined.

**Key Words** : Backlash(백래시), Two-Stage Gear Reduction(2 단 기어 감속), Frequency Response Characteristics (주파수응답특성), Contribution Ratio(기여율), Bandwidth(대역폭), Anti-resonance(반공진)

### 1. 서론

생산설비 및 장비의 자동화는 서보 모터를 이용한 제어시스템의 사용을 더욱 증가시키고 있으며, 최근 모터 개발 기술의 발전으로 기어 감속기를 필요로 하지 않는 다양한 직접구동방식의 모터들이 개발되고 있다. 그러나, 직접구동방식의 모터들은 기어 감속 형태를 취한 기어 감속 서보 시스템과 비교하여 부피 및 무게가 크고 발휘되는 토크가 상대적으로 작아, 설치 공간 및 무게의 제한

이 따르는 곳에는 기어 감속기를 이용한 서보 시스템이 널리 사용되고 있다.

서보 시스템의 속도제어 대역폭 및 성능은 시스템의 기계적인 반공진 및 공진에 의해 제한 받게 되며, 특히, 반공진주파수는 시스템의 대역폭을 결정한다<sup>[1,2]</sup>. 기어 감속 서보 시스템이 빠른 추종성과 응답성을 갖도록 하기 위해서는 높은 반공진 및 공진점을 갖도록 시스템을 설계하는 것이 중요하다<sup>[1,2]</sup>. 따라서, 설계 단계에서 제작될 기어 감속 서보 시스템의 반공진 및 공진점을 보다 정확히

1) 2001년 12월 10일 접수  
\* LG Innotek 연구소 연구 7 그룹  
\*\* 국방과학연구소 기술본부 2부 3팀  
\*\*\* 한국과학기술원 기계공학과

예측 할 수 있는 방법에 관한 연구가 필요하다. 이와 관련 된 연구로 서, Dhaouadi, Kubo 와 Tobise 는 1 단 감속의 서보 시스템의 경우, 백래시의 크기가 반공진 및 공진점을 포함한 주파수응답특성에 미치는 영향을 알아보았고<sup>[3]</sup>, Sato 와 Shimojima 는 다단 기어 감속단을 갖는 서보 시스템에 대한 운동방정식을 유도하고, 각 매개변수 변화에 따른 동적특성의 변화를 관찰하였다<sup>[4]</sup>. 또한, Bigley, 장석원 등은 다단 및 2 단 기어 감속의 경우, 백래시 크기에 따른 주파수응답특성 변화를 다루었으나, 최종 부하단에서 측정되는 전체 백래시 크기에 따른 영향만을 살펴보았다<sup>[1,5]</sup>. 지금까지의 연구결과는 다단 기어감속시, 각 단에서 발생하는 백래시 크기 변화에 대한 주파수응답특성 및 시스템 대역폭의 변화를 다루지 않았다. 이에 본 연구에서는 다단 감속단을 갖는 서보 시스템에 대한 선행 과제로서, 2 단 기어감속의 경우 각 단의 백래시 변화가 주파수응답특성과 시스템 대역폭에 미치는 영향을 알아 보았으며, 각 단의 백래시 크기가 전체 백래시 크기에 차지하는 비율을 기여율 (Contribution Ratio)이라 정의하고, 이 기여율 변화에 따른 주파수응답특성과 시스템 대역폭 변화를 알아 보았다. 이를 위하여 최종 부하단에서 측정되는 시스템의 전체 백래시는 일정하다고 가정하였다.

## 2. 모델링

Fig. 1 은 본 연구에서 고려한 2 단 감속 서보 시스템의 개략도이다. 고정축에 고정된 세그먼트 기어 2는 회전하지 않고, 피니언 2, 회전축, 기어 1, 피니언 1, 모터 및 베어링을 포함한 Fig. 1 에서 사선 친 부분이  $\overline{OO'}$  축을 중심으로 모터 회전에 동기되어 회전하는 구조이다. 각 회전축에 존재하는 베어링은 예압에 의해 간극 없이 각 축을 지지한다고 가정하였으며, 점성마찰 및 감쇠효과는 무시하였다. 이와 같은 가정 하에 얻어진 Fig. 1 에 대한 상세 모델은 Fig. 2 와 같다.

여기서 피니언 1 과 기어 1 은 각각의 관성모멘트와 하나의 비틀림스프링으로 모델링하였다. 피니언 1 의 관성모멘트는 모터 관성모멘트에 포함되며, 기어 1 축에 표현된 비틀림스프링은 피니언 1 과 기어 1 의 이 강성에 의해 생기는 비틀림강

성을 표현하였다<sup>[6]</sup>.

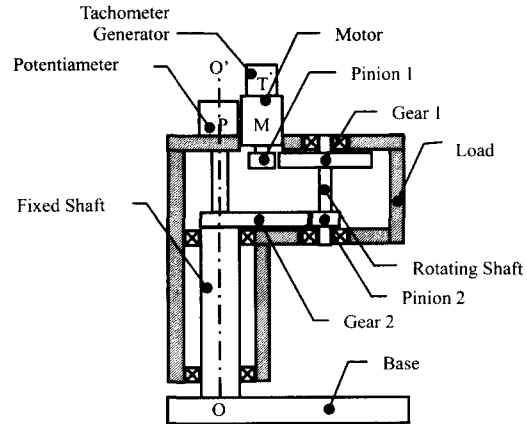


Fig. 1 Two-staged gear reduction servo system

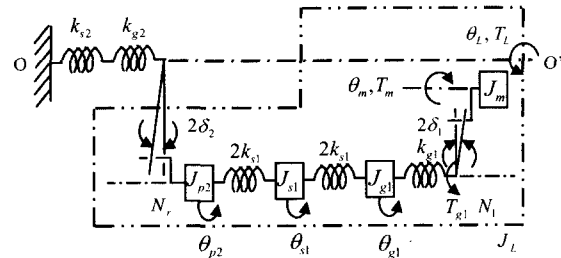


Fig. 2 Model of two-staged gear reduction servo system

회전축의 경우 관성모멘트는 기어 1 과 피니언 2 사이의 회전축 길이 1/2 되는 지점에 집중되어 있다고 가정하였으며, 비틀림스프링은 회전축 비틀림 강성 값의 2 배 인 비틀림스프링이 기어 1 과 피니언 2 에 각각 연결된 것으로 모델링 하였다. 그리고, 기어 2 와 고정축은 회전하지 않으므로, 비틀림스프링만이 존재한다고 가정하였고, 이 물림에서 발생하는 백래시는 피니언 고정 시 회전하는 기어의 회전각으로 각각 표현하였다. 이점쇄선으로 묶은 부분은 Fig. 1 의 전체 회전부로 부하를 의미한다.

본 연구에서 사용된 모터는 태코제너레이터가 부착된 영구자석 필드형 DC 모터로 모터에 대한 전기적 방정식은 다음과 같다<sup>[7]</sup>.

$$V_m = L_a \frac{di_a}{dt} + R_m i_a + k_b \dot{\theta}_m \quad (1-a)$$

$$T_m = k_t i_a \quad (1-b)$$

$$V_{tach} = k_{tach} \dot{\theta}_m \quad (1-c)$$

여기서,  $V_m$ : 모터 입력 전압 ( $V$ )  
 $L_u$ : 모터 전기자 인덕턴스 ( $H$ )  
 $i_u$ : 모터 전기자에 흐르는 전류 ( $A$ )  
 $R_m$ : 모터 전기자 저항 ( $\Omega$ )  
 $k_b$ : 역기전력 상수 ( $V \cdot s/rad$ )  
 $\theta_m$ : 모터 피니언 회전각 ( $rad$ )  
 $T_m$ : 모터 토크 ( $N \cdot m$ )  
 $k_t$ : 모터 토크 상수 ( $N \cdot m/A$ )  
 $V_{tach}$ : 태코미터 출력 전압 ( $V$ )  
 $k_{tach}$ : 태코미터 상수 ( $V \cdot s/rad$ ) 이다.

모터에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - \frac{T_{g1}}{N_1} - T_{f,m} \text{sign}(\dot{\theta}_m) \quad (2)$$

여기서,  $J_m$ : 모터회전자 관성모멘트 ( $kg \cdot m^2$ )  
 $T_{g1}$ : 기어 1에 전달된 토크 ( $N \cdot m$ )  
 $N_1$ : 피니언 1과 기어 1 사이의 감속비  
 $T_{f,m}$ : 모터 정마찰 토크 ( $N \cdot m$ )  
 $\text{sign}(\cdot)$ : ( ) 안 값의 부호 이다.

기어 1에 전달된 토크  $T_{g1}$ 는 피니언 1과 기어 1 사이의 백래시에 의해 다음과 같은 비선형 식으로 표현된다. 이때, 사용한 백래시 모델은 테드준 모델<sup>[8]</sup>을 사용하였다.

$$T_{g1} = \begin{cases} k_{g1}(\theta_{d1} - \delta_1) & , \theta_{d1} > \delta_1 \\ 0 & , |\theta_{d1}| < \delta_1 \\ k_{g1}(\theta_{d1} + \delta_1) & , \theta_{d1} < -\delta_1 \end{cases} \quad (3)$$

여기서,  $\theta_{d1}$ : 각 전달오차 ( $\theta_{d1} = \theta_m/N_1 - \theta_{g1}$ ) ( $rad$ )  
 $\theta_{g1}$ : 기어 1의 회전 각 ( $rad$ )  
 $\delta_1$ : 피니언 1과 기어 1의 사이에 존재하는 백래시를 피니언 1 고정 시, 기어 1 축에서 측정 되는 각도로 표시한 각도 백래시 양의 1/2 ( $rad$ )  
 $k_{g1}$ : 피니언 1과 기어 1의 이 강성에 의한 비틀림강성 ( $N \cdot m/rad$ ) 이다.

이때, 비틀림강성은 다음과 같다<sup>[6]</sup>.

$$k_{g1} = \frac{d_{g1}^2 E_{p1} Z_{p1} E_{g1} Z_{g1}}{4(E_{p1} Z_{p1} + E_{g1} Z_{g1})} t_{g1} \quad (4)$$

여기서,  $d_{g1}$ : 기어 1의 피치원경 ( $m$ )  
 $E_{p1}, E_{g1}$ : 피니언 1과 기어 1의 탄성계수 ( $N/m^2$ )  
 $Z_{p1}, Z_{g1}$ : 피니언 1과 기어 1의 탄성변형계수  
 $t_{g1}$ : 기어 1의 치폭 ( $m$ ) 이다.

그리고, 탄성변형계수는 다음과 같다<sup>[6]</sup>.

$$Z_i = \frac{y_i}{0.242 + 7.25 y_i} \quad (5)$$

여기서,  $y_i$ : 기어 i의 루이스형상계수이다.

기어 1에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_{g1} \ddot{\theta}_{g1} = T_{g1} - 2k_{s1}(\theta_{g1} - \theta_{s1}) \quad (6)$$

여기서,  $J_{g1}$ : 기어 1의 관성모멘트 ( $kg \cdot m^2$ )  
 $\theta_{s1}$ : 회전축 질량중심에서의 회전각 ( $rad$ )  
 $k_{s1}$ : 회전축의 비틀림강성 ( $N \cdot m/rad$ ) 이다.

이때, 회전축의 비틀림강성  $k_{s1}$ 은 다음과 같다.

$$k_{s1} = \frac{\pi G_{s1} d_{s1}^4}{32 L_{s1}} \quad (7)$$

여기서,  $G_{s1}$ : 회전축의 전단탄성계수 ( $N/m^2$ )  
 $d_{s1}$ : 회전축의 직경 ( $m$ )  
 $L_{s1}$ : 기어 1과 피니언 2 사이의 회전축 길이 ( $m$ ) 이다.

회전축의 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_{s1} \ddot{\theta}_{s1} = 2k_{s1}(\theta_{g1} + \theta_{p2}) - 4k_{s1} \theta_{s1} \quad (8)$$

여기서,  $J_{s1}$ : 회전축의 관성모멘트 ( $kg \cdot m^2$ )

$\theta_{p2}$ : 피니언 2의 회전 각(rad)이다.

또한, 피니언 2의 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_{p2} \ddot{\theta}_{p2} = 2k_{s1}(\theta_{s1} - \theta_{p2}) - \frac{1}{N_r} T_L \quad (9)$$

여기서,  $J_{p2}$ : 피니언 2의 관성모멘트( $kg \cdot m^2$ )

$N_r$ : 피니언 2와 기어 2의 공전 감속비  
( $N_r = N_2 + 1$ )

$N_2$ : 피니언 2와 기어 2의 피치원경 비  
( $N_2 = d_{g2}/d_{p2}$ )

$T_L$ : 부하 토크( $N \cdot m$ )이다.

부하 토크는 피니언 2와 기어 2 사이의 백래시에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$T_L = \begin{cases} k_2(\theta_{d2} - \delta_2) & , \theta_{d2} > \delta_2 \\ 0 & , |\theta_{d2}| < \delta_2 \\ k_2(\theta_{d2} + \delta_2) & , \theta_{d2} < -\delta_2 \end{cases} \quad (10)$$

여기서,  $\theta_{d2}$ : 각 전달오차( $\theta_{d2} = \theta_{p2}/N_r - \theta_L$ ) (rad)

$\theta_L$ : 부하 회전 각 (rad)

$\delta_2$ : 피니언 2와 기어 2의 사이에 존재하는 백래시를, 피니언 2 고정 시 부하 회전축에서 측정되는 각도로 표시한 각도 백래시 양의 1/2 (rad)

$k_2$ : 기어 2와 고정축의 등가비틀림강성 ( $N \cdot m / rad$ )이다.

이때, 등가비틀림강성은 다음과 같다.

$$k_2 = \frac{k_{g2} k_{s2}}{k_{g2} + k_{s2}} \quad (11)$$

여기서,  $k_{g2}$ : 피니언 2와 기어 2의 이 강성에 의한 비틀림강성

$k_{s2}$ : 고정축의 비틀림강성이다.

부하에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_L \ddot{\theta}_L = T_L - T_{f,L} \text{sign}(\dot{\theta}_L) \quad (12)$$

여기서,  $J_L$ : 부하 관성모멘트( $kg \cdot m^2$ )

$T_{f,L}$ : 부하 단의 정마찰 토크( $N \cdot m$ )이다.

시스템 최종 부하 단에서 측정되는 2 단 감속 서보 시스템의 전체 백래시 양  $b_{total}$  과 각 감속단에 존재하는 백래시 양  $b_1, b_2$ 의 관계는 다음과 같다.

$$b_{total} = b_2 + \frac{1}{N_r} b_1 \quad (13)$$

여기서,  $b_{total}$ : 시스템 최종 부하 단에 나타나는 전체 백래시 (Degree)

$b_1$ : 피니언 1과 기어 1의 사이에 존재하는 백래시를 기어 1 축에서 측정되는 각도로 표시한 각도 백래시 양  
( $b_1 = 360^\circ \delta_1 / \pi$ ) (Degree)

$b_2$ : 피니언 2와 기어 2의 사이에 존재하는 백래시를 부하 회전축에서 측정되는 각도로 표시한 각도 백래시 양  
( $b_2 = 360^\circ \delta_2 / \pi$ ) (Degree)이다.

Table 1. Specifications for two-staged gear reduction servo system

Parameter	Value
Motor Inductance, $L_m$ (H)	8.50E-4
Motor Resistance, $R_m$ ( $\Omega$ )	4.10
Back-emf Const., $k_b$ ( $V \cdot s / rad$ )	0.034
Torque Sensitivity, $k_t$ ( $N \cdot m / A$ )	0.035
Moment of Inertia of Motor, $J_m$ ( $kg \cdot m^2$ )	8.60E-6
Reduction Ratio 1, $N_1$	5.94
Static Friction Torque of Motor, $T_{f,m}$ ( $N \cdot m$ )	0.014
Torsional Stiffness, $k_{g1}$ ( $N \cdot m / rad$ )	3.40E4
Moment of Inertia of Gear 1, $J_{g1}$ ( $kg \cdot m^2$ )	2.30E-5
Torsional Stiffness of Shaft, $k_{s1}$ ( $N \cdot m / rad$ )	366.0
Moment of Inertia of Shaft, $J_{s1}$ ( $kg \cdot m^2$ )	8.30E-8
Moment of Inertia of Pinion 2, $J_{p2}$ ( $kg \cdot m^2$ )	2.20E-7
Reduction Ratio, $N_r$	10.5
Equivalent Torsional Stiffness, $k_s$ ( $N \cdot m / rad$ )	7.74E4
Moment of Inertia of Load, $J_L$ ( $kg \cdot m^2$ )	0.029
Static Friction Torque of Load, $T_{f,L}$ ( $N \cdot m$ )	0.007
Tachometer Sensitivity, $k_{tacho}$ ( $V \cdot s / rad$ )	0.086
Total Backlash, $b_{total}$ (Degree)	0.066

### 3. 모의실험 결과 및 고찰

#### 3.1 모의실험

2 단 감속 서보 시스템에 있어서 각 단 백래시  $b_1$ ,  $b_2$  의 기여율 변화에 따른 시스템 대역폭 및 주파수응답특성의 변화를 알아보기 위하여 고려한 2 단 감속 서보 시스템의 명세서를 Table 1 에 나타내었다. 그리고, 시스템이 갖는 전체 백래시가  $0.066^\circ$  이고, 이 경우, 본 연구에서 고려한 각 단의 백래시  $b_1$ ,  $b_2$  의 조합을 Table 2 에 나타내었으며, 전체백래시  $b_{total}$  에 대한 백래시  $b_i$  의 기여율을 기준으로 표현한 것이다.

2 단 감속 서보 시스템의 모의실험 수행을 위한 블록선도는 식 (1), (2), (6), (8), (9) 와 (12) 로부터 모터전압 입력에 대한 태코제너레이터 전압 출력을 나타낸 Fig. 3 과 같다. 시스템의 주파수응답 특성을 얻기 위한 모의실험은 Matlab Simulink 를 이용하여 수행하였으며, 사용한 샘플링 시간은  $10\mu\text{sec}$  이며, 모터 공급전압은  $10.0 V_{pk}$  크기를 갖는 정현파 전압을  $10 \text{ Hz} \sim 200 \text{ Hz}$  범위에 걸쳐서 인가하였다. 각 가진주파수 별로 초기 과도응답이 지난 정상상태응답에 대해서 주파수분석하였고, 이 중 가진주파수에 대한 모터 각속도 성분을 추출하여, 각 주파수 별로 이득과 위상을 구하였다.

Table 2. Backlash values of each reduction stage according to the contribution ratio of  $b_i$  for  $b_{total}$

Case	Contribution Ratio of $b_i$	$b_1$	$b_2$
1	0 %	$0^\circ$	$0.066^\circ$
2	25 %	$0.173^\circ$	$0.0500^\circ$
3	50 %	$0.345^\circ$	$0.0330^\circ$
4	75 %	$0.518^\circ$	$0.0165^\circ$
5	100 %	$0.690^\circ$	$0^\circ$

#### 3.2 결과 및 고찰

Fig. 4 는 백래시  $b_i$  의 기여율(0%, 50%, 100%) 변화에 따른 2 단 감속 서보 시스템의 모터입력전압에 대한 모터 각속도의 주파수응답특성이다. 반공진 발생 주파수로 정의되는 대역폭이 백래시  $b_i$  의 기여율에 따라 크게 변화하고 있음을 알 수 있다. Fig. 5 는 Table 2 의 각 경우에 발생하는 반공진 및 공진주파수를 정리하여 비교한 그림이다.

백래시  $b_i$  의 기여율이 50% 일 때 속도제어 대역폭을 제한하는 반공진주파수가 가장 높음을 보여주고 있고, 공진 주파수는 기여율이 75 % 일 때 가장 높음을 보여주고 있다. Fig. 5 에 대한 정량적인 값은 Table 3 에 나타내었다.

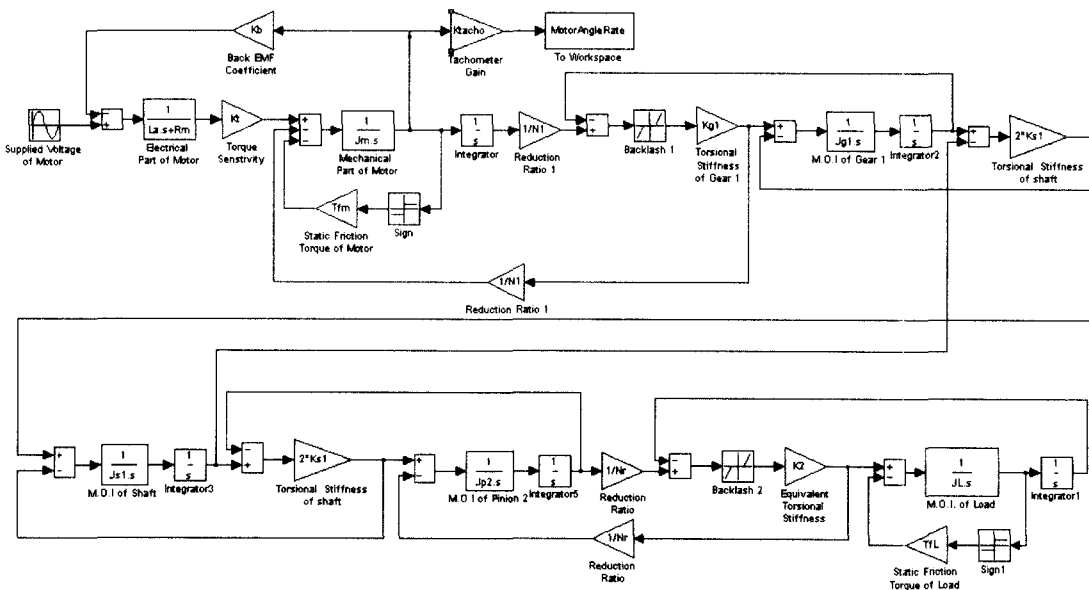
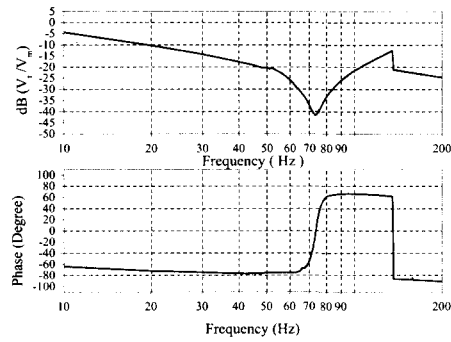
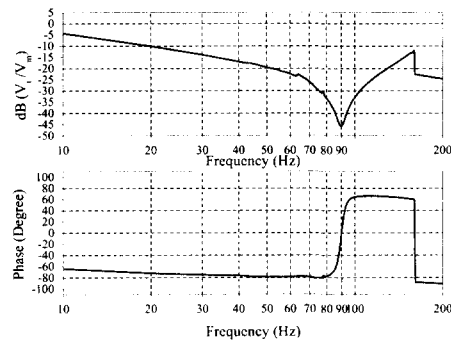


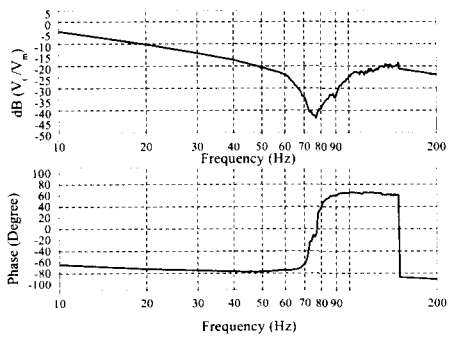
Fig. 3 Block diagram



(a) Case 1



(b) Case 3



(c) Case 5

Fig. 4 Bode diagrams of two-staged gear reduction servo system ( (a): Case 1, (b): Case 3, (c) Case 5 ) ( $V_{tacho} / V_m$ )

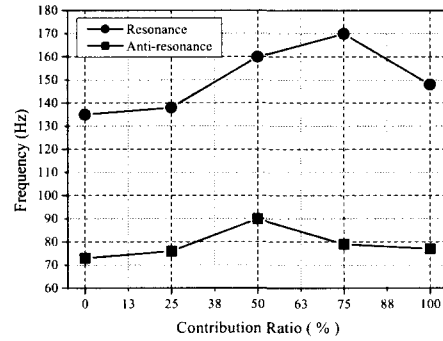


Fig. 5 Anti-resonance and resonance frequency according to the contribution ratio of  $b_1$  for  $b_{total}$

Table 3. Anti-resonance & resonance

Case	Contribution Ratio of $b_1$ (%)	Anti-resonance (dB / Hz)	Resonance (dB / Hz)
1	0	-42 / 73	-12 / 135
2	25	-42 / 76	-13 / 138
3	50	-46 / 90	-12 / 160
4	75	-43 / 79	-9 / 170
5	100	-44 / 77	-19 / 148

최종 부하단에 백래시는 없고, 전체 백래시가 모터 단에만 존재한다고 가정한 Case 5 와 Case 3 의 반공진 발생주파수를 비교하면, Case 3 가 17 % 더 크고, 공진주파수는 8% 더 크다. 참고로, 최대공진 주파수는 Case 4 에서 발생하며, 백래시  $b_1, b_2$  가 서로 같은 크기라고 가정할 경우 백래시  $b_1, b_2$  의 크기는 각각  $0.0602^\circ$  이 되며, 이때 백래시  $b_1$  의 기여율은 8.7 % 가 된다. 이 같은 경우 반공진 및 공진주파수 점은 Table 3 에 나타난 Case 1 과 Case 2 사이의 값을 갖게 된다.

#### 4. 결론

2 단 기어감속 서보시스템에 대하여 각 감속단의 백래시 크기 변화에 따른 시스템의 주파수응답 특성을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

최종 부하 단에서 측정된 전체 백래시 크기가 동일할 지라도, 각 단의 백래시 크기에 따라 시스템의 주파수응답특성 및 대역폭이 크게 변화함을 알았고, 시스템에 허용되는 전체 백래시 양이 정해

진 경우 대역폭을 최대로 하는 최적의 각 단 백래시 조합이 존재함을 알았다. 이 연구결과는 향후 다단 기어감속 서보 시스템의 각 단 허용 백래시 값을 보다 효과적이고, 효율적인 값으로 결정할 수 있으리라 생각 되며, 필요 이상의 백래시 감소로 인한 비용 및 제작 시간 증가를 방지할 수 있으리라 판단된다.

## 후 기

본 연구는 LG Innotek 연구소의 위탁과제로서 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

## 참고문헌

1. Bigley, W. J., "Wideband Base Motion Isolation Control via the State Equalization Technique," *Optical Engineering*, Vol. 32, No. 11, pp. 2805-2811, 1993.
2. Bigley, W. J. and Rizzo, V. J., "Wideband Linear Quadratic Control of a Gyro-Stabilized Electro-Optical Sight System," *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 20-24, 1987.
3. Dhaouadi, R., Kubo, K. and Tobise, M., "Analysis and Compensation of Speed Drive Systems with Torsional Loads," *IEEE International Workshop on Advanced Motion Control*, Yokohama, Japan, pp. 271-277, 1993.
4. Sato, O. and Shimojima, H., "Dynamic Torsional Analysis of Gear Train System," *Bulletin of JSME*, Vol. 28, No. 242, pp. 1756-1760, 1985.
5. 장석원, 오준호, "기어시스템의 backlash 에 대한 동특성 해석," *한국정밀공학회 춘계 학술대회 논문집*, pp. 453-456, 2000.
6. Chubb, B. A., *Modern Analytical Design of Instrument Servomechanisms*, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
7. Clifford, M., *Modern Electronic Motors*, Prentice Hall, 1990.
8. Slotine, J. E. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, pp. 175-177, 1991.