

Lyapunov 변환을 이용한 SDINS 등가 오차모델

SDINS Equivalent Error Models Using the Lyapunov Transformation

유 명 중, 이 장 규, 박 찬 국
(Myeong-Jong Yu, Jang Gyu Lee, and Chan Gook Park)

Abstract : In Strapdown Inertial Navigation System(SDINS), error models based on previously proposed conversion equations between the attitude errors, are only valid in case the attitude errors are small. The SDINS error models have been independently studied according to the definition of the reference frame and of the attitude error. The conversion equations between the attitude errors applicable to SDINS with large attitude errors are newly derived. Lyapunov transformation matrices are also derived from the obtained results. Furthermore the general method, which is independent of the attitude error and the reference frame to derive SDINS error model, is proposed using the Lyapunov transformation.

Keywords : strapdown inertial navigation system, error model, quaternion, Lyapunov transformation

I. 서론

보정형 관성항법시스템에서 오차모델은 필터 구성에 중요한 역할을 하기 때문에 많은 연구가 있어 왔다[1]-[3]. 오차모델을 유도할 때 사용되는 기준 좌표계의 정의 및 자세오차의 정의에 따라서 여러 가지 오차모델이 유도될 수 있다. 관성항법시스템에서 많이 알려진 오차모델은 섭동(perturbation) 방법에 의해 유도된 모델[1] 및 A. Weinred와 I. Y. Bar-Itzhack[4]에 의해 유도된 Psi-각 오차모델이 있다. 그러나 이러한 모델들은 항체의 자세를 계산하기 위하여 쿼터니언을 사용하기 전의 모델들이다. 일반적으로 항체의 자세계산은 자세계산에서 발생할 수 있는 코닝(coning)오차 및 비교환 오차를 줄이기 위해서 오일러 각이나 방향코사인보다 쿼터니언을 매개변수로 많이 사용한다. 쿼터니언을 매개변수로 사용하면서부터 쿼터니언과 관련된 여러 가지 오차모델이 연구되어 왔다. Friedland는 관성 좌표계(inertial frame) 시스템에서 오차모델을 유도하였다[5]. 항법 좌표계(local-level frame) 시스템에서 오차모델은 오차모델을 유도할 때 사용하는 기준 좌표계에 따라서 Shibata는 동체 좌표계 기준 오차모델을 그리고 Chung은 항법 좌표계 기준 오차모델을 각각 유도하였으며 Lee는 컴퓨터 좌표계를 기준으로 항법 및 동체 좌표계에 대한 오차모델을 유도하였다[6]-[8]. 이러한 오차모델들은 자세오차가 충분히 작다는 조건 하에 선형 합형 쿼터니언(additive quaternion) 오차모델이 비틀림 각(Equivalent Tilt) 오차모델과 등가임을 제시하였다. 그러나 이러한 가정이 성립되지 않으면 등가관계는 성립되지 않는다. 따라서 기존의 오차모델은 자세오차가 큰 시스템에 적용할 경우 큰 모델링 오차를 유발할 수 있으며, 이러한 모델링 오

차는 필터 구성에서 불확실성으로 작용하여 필터의 성능을 저하시킬 수 있다[3][9][10]. 따라서 자세오차가 큰 시스템에 적합한 오차모델의 연구가 요구되어 왔다. 참고문헌[3][9][10]에서는 기존의 자세 변환행렬을 직접 미분하여 자세 오차모델의 등가 관계식을 유도하는 방법과 달리 쿼터니언 곱의 식으로부터 쿼터니언 오차를 정의하고 큰 자세오차를 가진 시스템에 적합한 오차모델을 제시하였으며, 오차모델 사이의 정확한 등가 관계를 유도하였다.

지금까지 항법시스템에서는 가관측성과 같은 필터의 특성들을 간략하게 분석할 수 있다는 장점 때문에 항법좌표계 기준 오차모델들이 많이 사용되어 왔으며, 항공기나 위성의 자세추정에서는 동체 좌표계 기준 오차모델이 일반적으로 사용되고 있다[11]. 따라서 유도된 오차모델들은 시스템의 적용 환경에 따라서 적절하게 선택하여 사용되고 있다. 그러나 이들 오차모델들 사이의 정확한 변환들에 대한 연구는 부족하였다. 그러므로 적용되는 오차모델에 따라 가관측성과 같은 특성을 매번 연구해야하는 문제점을 가지고 있으며, 시스템의 성능을 개선하기 위하여 오차모델을 변환하면서 사용할 경우 변환된 오차모델에 따라 필터의 공분산을 어떻게 변환하여야 할 것인가의 문제에 직면하기도 한다. 따라서 오차모델을 통합하여 일반화할 수 있는 연구들이 요구되어 왔다.

본 논문에서는 오차모델의 변환 관계를 유도하기 위하여 상태 변수(state variable)를 변환하는데 유용한 리아프노프 변환(Lyapunov transformation)을 사용한다. 이전에 리아프노프 변환을 이용하여 관성항법시스템의 가관측성을 간단하게 판단할 수 있는 연구들이 수행되어 왔다[12][13]. 이러한 연구들은 항법 좌표계를 기준으로 유도된 미소자세오차 모델에 적용되어 왔다. 본 논문에서는 이러한 개념을 확장하여 자세오차에 따른 관성항법시스템의 등가 오차모델을 유도하는데 리아프노프 변환방법을 사용함으로써 오차모델의 일반화된 유도 방법을 제시한다. 먼저 동체 좌표계를 기준으로 자세오차가 큰 시스템에 적합한 오차모델을 참고

접수일자 : 2001. 7. 27., 수정완료 : 2001. 10. 27.

유명중, 이장규 : 서울대학교 전기 컴퓨터공학부(mjyu@asrignc3.snu.ac.kr/jgl@asri.snu.ac.kr)

박찬국 : 광운대학교 정보제어공학부(cgpark@daisy.kwangwoon.ac.kr)

※본 논문은 국방과학연구소 및 서울대학교 자동제어특화연구센터의 연구비 지원에 의한 연구 결과입니다.

문헌[9]의 방법을 이용하여 다시 유도하고, [3]의 결과를 같이 사용하여 오차모델 사이의 리아프노프 변환행렬을 제시한다. 그리고 리아프노프 변환을 이용하여 등가 자세 오차 모델 및 등가 SDINS 오차모델을 유도한다.

II. 동체 좌표계 기준 SDINS 오차모델

자세오차가 큰 시스템에 적합한 오차모델 및 오차 사이의 등가 관계식을 동체 좌표계를 기준으로 유도한다. 그리고 자세오차의 정의에 따라서 합형 쿼터니언 오차모델, 곱형 쿼터니언 오차모델, 회전벡터 오차모델 및 비틀림 각 모델을 각각 유도한다. 먼저 간단하게 기존의 위치 오차모델을 알아보고 자세 오차모델 및 속도 오차모델을 구한다.

1. 위치 오차모델

항체의 위치는 위도(L), 경도(l), 고도(h)에 의하여 구성되며, 미분방정식은 (1)과 같다.

$$\dot{L} = \frac{v_N}{R_m + h} \tag{1a}$$

$$\dot{l} = \frac{v_E}{(R_l + h) \cos L} \tag{1b}$$

$$\dot{h} = -v_D \tag{1c}$$

여기서, $V^n = [v_N, v_E, v_D]^T$, V^n 는 항체의 속도, R_m 은 지구의 단반경(Meridian Radius), R_l 는 지구의 장반경(Tangential Radius)이다. 위치 미분방정식에 대하여 섭동(perturbation) 방법을 적용하면 위치 오차모델은 (2)와 같이 유도된다.

$$\delta \dot{L} = \frac{R_{mm} \rho_E}{R_m + h} \delta L + \frac{\rho_E}{R_m + h} \delta h + \frac{\delta v_N}{R_m + h} \tag{2a}$$

$$\delta \dot{l} = \frac{\rho_N}{\cos L} \left(\tan L - \frac{R_{\#}}{R_l + h} \right) \delta L - \frac{\rho_N \sec L}{R_l + h} \delta h + \frac{\sec L}{R_l + h} \delta v_E \tag{2b}$$

$$\delta \dot{h} = -\delta v_D \tag{2c}$$

여기서, R_{mm} 과 $R_{\#}$ 는 지구반경 모델의 위도에 대한 변화율이며 (3)과 같다. 그리고 $[\rho_N, \rho_E, \rho_D]^T \equiv \omega_{en}^n = [\dot{L} \cos L, -\dot{L}, -\dot{l} \sin L]^T$ 이다.

$$R_{mm} \equiv \frac{3R_0(1-e^2)e^2 \sin L \cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{5/2}}, \tag{3}$$

$$R_{\#} \equiv \frac{R_0 e^2 \sin L \cos L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{3/2}}$$

2. 자세 오차모델

본 절에서는 회전벡터 오차를 도입하여 자세오차가 큰 시스템에 적합한 오차모델 사이의 단계식을 유도한다.

2.1 회전벡터 오차와 쿼터니언 오차

항체의 자세를 계산하기 위하여 쿼터니언을 이용할 경우 자세오차는 회전벡터 오차 혹은 쿼터니언 오차로 표현할 수 있다. 지금까지 자세오차는 자세변환 행렬로부터 구

해진 비틀림 각과 쿼터니언 오차를 이용하여 표현되어 왔기 때문에 자세오차가 큰 시스템의 경우 자세오차 사이의 정확한 관계를 표현할 수 없었다.

본 절에서는 회전벡터 오차가 포함된 쿼터니언 곱으로부터 자세오차가 큰 시스템에도 적용이 가능한 자세오차들 사이의 관계식을 구한다.

항법 좌표계에서 참 동체(true body) 좌표계에 대한 오차가 포함된 동체(indicated body) 좌표계 사이의 회전벡터 오차를 $\Delta\phi^b (\equiv [\Delta\phi_x, \Delta\phi_y, \Delta\phi_z]^T)$ 라고 정의한다. 여기서 $\Delta\phi_x, \Delta\phi_y$ 및 $\Delta\phi_z$ 는 각각 X축, Y축 및 Z축 성분의 회전벡터를 의미한다. $\Delta Q (\equiv \tilde{Q}^n - Q^n)$ 는 합형 쿼터니언 오차(additive quaternion error)를 정의한다. 여기서 $\tilde{Q}^n (\equiv [\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3]^T)$ 는 오차를 포함한 쿼터니언(indicated quaternion)이고, $Q^n (\equiv [q_0, q_1, q_2, q_3]^T)$ 는 참 쿼터니언(true quaternion)이다. 또한 $Q^b (\equiv [q_{0b}, q_{1b}, q_{2b}, q_{3b}]^T)$ 는 회전벡터 오차에 의하여 주어지는 곱형 쿼터니언 오차(multiplicative quaternion error)로 정의한다. 여기서 b 는 오차가 있는 동체 좌표계를 표현한다. 네 성분의 곱형 쿼터니언 오차는 (4)와 같이 정의된다.

$$Q_b^b = [q_{0b}, q^b]^T = [q_{0b}, q_{1b}, q_{2b}, q_{3b}]^T = [1 + c_b, s_b \Delta\phi_x, s_b \Delta\phi_y, s_b \Delta\phi_z]^T \tag{4}$$

여기서, $c_b = \cos\left(\frac{\phi_{0b}}{2}\right) - 1, s_b = \frac{1}{\phi_{0b}} \sin\left(\frac{\phi_{0b}}{2}\right),$

$$\phi_{0b} = \sqrt{(\Delta\phi_x)^2 + (\Delta\phi_y)^2 + (\Delta\phi_z)^2}. \tag{5}$$

회전벡터 오차와 합형 쿼터니언 오차사이의 관계식은 아래와 같이 유도할 수 있다. 오차를 포함하는 쿼터니언을 (6)과 같이 정의할 때 (6)은 (7)과 같이 변환 가능하다.

$$\tilde{Q}_b^n \equiv Q_b^n = Q_b^n Q_b^b \tag{6}$$

$$Q_b^n = \tilde{Q}_b^n Q_b^b \tag{7}$$

쿼터니언 곱셈(quaternion multiplication)의 연산을 이용하면 (7)은 (8)이 된다.

$$Q_b^n = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_0 & -\tilde{q}_1 & -\tilde{q}_2 & -\tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_1 & \tilde{q}_0 & -\tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_3 & \tilde{q}_0 & -\tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_3 & -\tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & \tilde{q}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{0b} \\ q_{1b} \\ q_{2b} \\ q_{3b} \end{bmatrix} \tag{8}$$

(8)을 이용하면 합형 쿼터니언 오차와 회전벡터 오차 사이의 관계는 (9)와 같다.

$$\Delta Q = -c_b \tilde{Q}_b^n - s_b U(\tilde{Q}_b^n) \Delta\phi^b \tag{9}$$

여기서,

$$U(\tilde{Q}_b^n) \equiv U = \begin{bmatrix} -\tilde{q}_1 & -\tilde{q}_2 & -\tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_0 & -\tilde{q}_3 & \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 & \tilde{q}_0 & -\tilde{q}_1 \\ -\tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 & \tilde{q}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

U 의 전치행렬(transpose matrix)을 (9)의 양변에 곱하면 (10)은 구해진다.

$$\Delta\phi^b = -\frac{1}{s_b} U^T \Delta Q \quad (10)$$

다시 U 를 (10)의 양변에 곱하면 다른 식으로 표현되는 합형 쿼터니언 오차를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta Q = -s_b U \Delta\phi^b + \tilde{Q}_b^n \tilde{Q}_b^{nT} \Delta Q \quad (11)$$

자세오차가 충분히 작다고 가정하면 회전벡터 오차는 비틀림 각(ET)이 된다. 그리고 (10) 및 (11)은 (12) 및 (13)과 같이 각각 단순화된다.

$$\Delta\phi^b = -2U^T \Delta Q \quad (12)$$

$$\Delta Q = -\frac{1}{2} U \Delta\phi^b + \tilde{Q}_b^n \tilde{Q}_b^{nT} \Delta Q \quad (13)$$

(12)와 (13)은 기존까지 제시 되어온 비틀림 각과 합형 쿼터니언 오차 모델 사이의 관계식과 동일하다[6]. 이전의 결과들과 비교하면 본 절에서 유도된 (9), (10) 및 (11)은 자세오차 사이의 정확한 관계식을 표현한다.

동일한 방법으로 합형 쿼터니언 오차와 곱형 쿼터니언 오차 사이의 관계식들은 다음과 같이 유도 할 수 있다.

$$\Delta Q = (1 - q_b) \tilde{Q}_b^n - U q^b \quad (14)$$

$$q^b = -U^T \Delta Q \quad (15)$$

$$\Delta Q = -U q^b + \tilde{Q}_b^n \tilde{Q}_b^{nT} \Delta Q \quad (16)$$

여기서, $q^b = [q_{1b}, q_{2b}, q_{3b}]^T$. 앞의 관계식들로부터 c_b 를 (17)과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_b &= \cos\left(\frac{\phi_{0b}}{2}\right) - 1 = q_{0b} - 1 = -\tilde{Q}_b^{nT} \Delta Q \\ &= -(\tilde{q}_0 \Delta q_0 + \tilde{q}_1 \Delta q_1 + \tilde{q}_2 \Delta q_2 + \tilde{q}_3 \Delta q_3) \end{aligned} \quad (17)$$

참고문헌[5]-[8]에 따르면 쿼터니언 표준화(normalization)에 의하여 c_b 는 무시할 수 있다고 알려져 있다. 그러나 자세오차가 큰 시스템의 경우 앞에서 구한 식들에 의하면 표준화에도 불구하고 c_b 는 무시할 수 없다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 항은 오차모델을 유도할 때 혹은 해석할 때 중요한 요소로 고려되어야 한다.

2.3 등가 자세 오차모델

SDINS의 등가 자세 오차모델을 회전벡터 오차, 합형 쿼터니언 오차 및 곱형 쿼터니언 오차에 대하여 각각 유도한다.

쿼터니언 미분 방정식은 (18)과 같이 주어진다.

$$\dot{\tilde{Q}}_b^n = \frac{1}{2} [\tilde{Q}_b^n] \omega_{ib}^b \quad (18)$$

(18)로부터 합형 쿼터니언 오차 모델은 (19)와 같다.

$$\Delta \dot{Q} = M_1 \Delta Q + \frac{1}{2} (U \delta \omega_{ib}^b - Y \delta \omega_{in}^n) \quad (19)$$

여기서, $\delta \omega_{ib}^b$ 는 자이로 오차 모델을 표현한다. 그리고

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\omega_X & -\omega_Y & -\omega_Z \\ \omega_X & 0 & \omega_Z & -\omega_Y \\ \omega_Y & -\omega_Z & 0 & \omega_X \\ \omega_Z & \omega_Y & -\omega_X & 0 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_N & -\omega_E & -\omega_D \\ \omega_N & 0 & -\omega_D & \omega_E \\ \omega_E & \omega_D & 0 & -\omega_N \\ \omega_D & -\omega_E & \omega_N & 0 \end{bmatrix} \right\}, \\ Y &= \begin{bmatrix} -\tilde{q}_1 & -\tilde{q}_2 & -\tilde{q}_3 \\ \tilde{q}_0 & \tilde{q}_3 & -\tilde{q}_2 \\ -\tilde{q}_3 & \tilde{q}_0 & \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 & -\tilde{q}_1 & \tilde{q}_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

합형 쿼터니언 오차모델, (19)와 등가인 회전벡터 오차모델은 (9), (10), (18) 및 (19)를 이용하여 구할 수 있다. (10)의 양변을 미분하면 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\phi}^b &= -\frac{1}{s_b} U^T \Delta \dot{Q} - \frac{1}{s_b} \dot{U}^T \Delta Q - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{s_b} \right) U^T \Delta Q \\ &= \left[U^T M_1 U + \dot{U}^T U + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{s_b} \right) s_b U^T U \right] \Delta \phi^b \\ &\quad + \frac{c_b}{s_b} \left[U^T M_1 \tilde{Q}_b^n + \dot{U}^T \tilde{Q}_b^n + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{s_b} \right) s_b U^T \tilde{Q}_b^n \right] \\ &\quad - \frac{1}{2s_b} U^T [U \delta \omega_{ib}^b - Y \delta \omega_{in}^n] \end{aligned} \quad (20)$$

여기서, $U^T U = I$, $U^T Y = \tilde{C}_b^n$, $U^T \tilde{Q}_b^n = 0$,

$$U^T M_1 U + \dot{U}^T U = -\omega_{ib}^b \times, \quad U^T M_1 \tilde{Q}_b^n + \dot{U}^T \tilde{Q}_b^n = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{s_b} \right) s_b \Delta \phi^b = d \Delta \phi^b (\Delta \phi^b)^T \Delta \phi^b. \quad (21)$$

(21)을 (20)에 대입하여 정리하면 회전벡터 오차모델은 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta \dot{\phi}^b = [I - d \Delta \phi^b (\Delta \phi^b)^T]^{-1} \cdot \left\{ -\omega_{ib}^b \times \Delta \phi^b - \frac{1}{2s_b} [\tilde{C}_b^n \delta \omega_{ib}^b - \delta \omega_{in}^n] \right\} \quad (22)$$

여기서, $d = \frac{1}{\phi_{0b}^2} \left\{ 1 - \frac{\phi_{0b}}{2} \cot \left(\frac{\phi_{0b}}{2} \right) \right\}$. 또한 자세오차가 충분히

작다고 가정하면 (22)에서 오차들 곱의 고차 항은 생략되

며 (23)과 같이 단순화된다.

$$\Delta \dot{\phi}^b = -\omega_{ib}^b \times \Delta \phi^b - [\delta \omega_{ib}^b - \tilde{C}_n^b \delta \omega_{in}^n] \quad (23)$$

(23)은 [6]의 결과와 동일하며, 구동 항(forcing term)의 부호는 [9][10]의 결과와 다르다. 이것은 합형 쿼터니언의 정의에 따라서 결정되기 때문이다. 또한 (22) 및 (23)의 결과는 자세오차가 작은 시스템의 경우 회전벡터 오차모델은 비틀림 각 오차모델로 변환이 가능함을 보여준다. 그러나 자세오차가 큰 시스템에서는 이러한 관계는 성립하지 않는다. 즉 자세오차가 큰 시스템에서 비틀림 각 모델을 사용 할 경우에 모델링 오차가 많이 발생 할 수 있음을 보여준다. 또한 (19) 및 (22)로부터 자세오차가 큰 시스템에서는 (22)와 등가인 합형 쿼터니언 오차모델이 모델링 오차를 줄일 수 있고 모델 자체가 선형이기 때문에 필터구성에서 불확실성 오차를 줄일 수 있는 모델로써 적합함을 알 수 있다.

동일한 방법으로 곱형 쿼터니언 오차모델을 합형 쿼터니언 오차모델로부터 구해보면 아래와 같다. (15)를 미분하고 (19) 및 (21)을 사용하여 정리하면 곱형 쿼터니언 오차모델은 (24)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{q}^b &= -U^T \Delta \dot{Q} - \dot{U}^T \Delta Q \\ &= -[U^T M_1 + \dot{U}^T] \Delta Q - \frac{1}{2} U^T [U \delta \omega_{ib}^b - Y \delta \omega_{in}^n] \\ &= (q_{0b} - 1) [U^T M_1 + \dot{U}^T] \tilde{Q}_b^n + [U^T M_1 U \\ &+ \dot{U}^T U] q^b - \frac{1}{2} U^T [U \delta \omega_{ib}^b - Y \delta \omega_{in}^n] \\ &= -\omega_{ib}^b \times q^b - \frac{1}{2} [\delta \omega_{ib}^b - \tilde{C}_n^b \delta \omega_{in}^n] \end{aligned} \quad (24)$$

또한 (17)을 미분하면 (25)와 같으며, 근사화된 \dot{c}_b 은 (26)과 같다.

$$\dot{q}_{0b} = \frac{-1}{2q_{0b}} q^{b^T} [\delta \omega_{ib}^b - \tilde{C}_n^b \delta \omega_{in}^n] \quad (25)$$

$$\dot{c}_b = -\frac{1}{4} \Delta \phi^{b^T} [\delta \omega_{ib}^b - \tilde{C}_n^b \delta \omega_{in}^n] \quad (26)$$

곱형 쿼터니언 오차모델은 (25) 혹은 (26) 때문에 비선형 오차모델이다. 그러나 3.3절에서 리아프노프 변환(Lyapunov transformation)을 사용하면 선형오차모델로 변환이 가능하다. 이 결과를 3.3절에서 제시한다.

2.4 속도 오차모델

속도 미분방정식인 (27)에 섭동 방법을 적용하여 속도 오차모델을 구하면 (28)과 같다.

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n \quad (27)$$

여기서, $V^n = [v_N, v_E, v_D]^T$, C_b^n 는 동체좌표계 b 에 대한 항법좌표계 n 의 변환 행렬, f^b 는 가속도계 측정값, g^n 는 항법좌표계에서의 지구 중력, $\omega_{ie}^n = [\Omega \cos L, 0, -\Omega \sin L]^T$.

$$\begin{aligned} \delta v^n &= \Delta C_b^n f^b - [2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n] \times \delta v^n \\ &+ C_b^n \delta f^b + v^n \times (2\delta \omega_{ie}^n + \delta \omega_{en}^n) + \delta g^n \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, δv^n 은 항법 좌표계에서의 속도 오차이고, δf^b 는 가속도계의 오차를 나타내며 $\delta \omega_{ie}^n$ 및 $\delta \omega_{en}^n$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \omega_{ie}^n = [\Omega \cos L \delta L \quad 0 \quad -\Omega \sin L \delta L]^T \quad (29)$$

$$\delta \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{R_H \rho_N}{R_t + h} \delta L - \frac{\rho_N}{R_t + h} \delta h + \frac{1}{R_t + h} \delta v_E \\ -\frac{R_{mm} \rho_E}{R_m + h} \delta L - \frac{\rho_E}{R_m + h} \delta h - \frac{1}{R_m + h} \delta v_N \\ \left[\left(\rho_N \sec^2 L + \frac{R_H \rho_N \tan L}{R_t + h} \right) \delta L \right. \\ \left. - \frac{\rho_D}{R_t + h} \delta h + \frac{\rho_D}{v_E} \delta v_E \right] \end{bmatrix} \quad (30)$$

속도오차 모델에서 $\Delta C_b^n f^b$ 은 자세오차와 관계되는 항이다. 여기서 ΔC_b^n 는 변환행렬(transformation matrix)의 오차이며 $\Delta C_b^n = \tilde{C}_b^n - C_b^n$ 와 같이 정의된다. 속도 오차모델을 구할 때 ΔC_b^n 을 표현하는 자세오차에 따라서 속도 오차모델은 결정된다. 그리고 선형화된 속도 오차모델을 구하기 위하여 ΔC_b^n 항을 선형화 하여야하며, 이 항을 어떻게 선형화 하느냐에 따라서 오차모델의 정확도는 결정된다.

합형 쿼터니언 오차, 회전벡터 오차 및 곱형 쿼터니언 오차를 이용하여 변환행렬의 오차를 각각 구해보면 다음과 같다. 먼저 합형 쿼터니언 오차를 이용하여 구해보면 (31)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta C_{11} &= 2(\tilde{q}_0 \Delta q_0 + \tilde{q}_1 \Delta q_1 - \tilde{q}_2 \Delta q_2 - \tilde{q}_3 \Delta q_3) \\ &- \Delta q_0^2 - \Delta q_1^2 + \Delta q_2^2 + \Delta q_3^2 \\ \Delta C_{12} &= 2(\tilde{q}_1 \Delta q_2 + \tilde{q}_2 \Delta q_1 - \tilde{q}_0 \Delta q_3 - \tilde{q}_3 \Delta q_0 \\ &- \Delta q_1 \Delta q_2 + \Delta q_0 \Delta q_3) \\ \Delta C_{13} &= 2(\tilde{q}_1 \Delta q_3 + \tilde{q}_3 \Delta q_1 + \tilde{q}_0 \Delta q_2 + \tilde{q}_2 \Delta q_0 \\ &- \Delta q_1 \Delta q_3 - \Delta q_0 \Delta q_2) \\ \Delta C_{21} &= 2(\tilde{q}_1 \Delta q_2 + \tilde{q}_2 \Delta q_1 + \tilde{q}_0 \Delta q_3 + \tilde{q}_3 \Delta q_0 \\ &- \Delta q_1 \Delta q_2 - \Delta q_0 \Delta q_3) \\ \Delta C_{22} &= 2(\tilde{q}_0 \Delta q_0 - \tilde{q}_1 \Delta q_1 + \tilde{q}_2 \Delta q_2 - \tilde{q}_3 \Delta q_3) \\ &- \Delta q_0^2 + \Delta q_1^2 - \Delta q_2^2 + \Delta q_3^2 \\ \Delta C_{23} &= 2(\tilde{q}_2 \Delta q_3 + \tilde{q}_3 \Delta q_2 - \tilde{q}_0 \Delta q_1 - \tilde{q}_1 \Delta q_0 \\ &- \Delta q_2 \Delta q_3 + \Delta q_0 \Delta q_1) \\ \Delta C_{31} &= 2(\tilde{q}_1 \Delta q_3 + \tilde{q}_3 \Delta q_1 - \tilde{q}_0 \Delta q_2 - \tilde{q}_2 \Delta q_0 \\ &- \Delta q_1 \Delta q_3 + \Delta q_0 \Delta q_2) \\ \Delta C_{32} &= 2(\tilde{q}_0 \Delta q_1 + \tilde{q}_1 \Delta q_0 + \tilde{q}_2 \Delta q_3 + \tilde{q}_3 \Delta q_2 \\ &- \Delta q_0 \Delta q_1 - \Delta q_2 \Delta q_3) \\ \Delta C_{33} &= 2(\tilde{q}_0 \Delta q_0 - \tilde{q}_1 \Delta q_1 - \tilde{q}_2 \Delta q_2 + \tilde{q}_3 \Delta q_3) \\ &- \Delta q_0^2 + \Delta q_1^2 + \Delta q_2^2 - \Delta q_3^2 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 ΔC_b^n 는 ΔC_b^n 의 성분을 표현한다. 회전벡터 오차 항으로 유도된 ΔC_b^n 의 성분은 (9)를 (31)에 대입함으로써 아래와 같이 구해진다.

$$\Delta C_b^n = -2 \tilde{C}_b^n [c_b R_R + R_R + R_R^2] \quad (32)$$

여기서 R_R 은 (33)과 같이 정의된다.

$$R_R = \begin{bmatrix} 0 & -s_b \Delta \phi_Z & s_b \Delta \phi_Y \\ s_b \Delta \phi_Z & 0 & -s_b \Delta \phi_X \\ -s_b \Delta \phi_Y & s_b \Delta \phi_X & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

마지막으로 곱형 쿼터니언 오차 항으로 주어지는 변환행렬 오차는 (32)로부터 직접 구해진다.

$$\Delta C_b^n = -2 \tilde{C}_b^n [q_{0b} I + R_Q] R_Q \quad (34)$$

여기서, I 는 단위 행렬이며, R_Q 는 (35)와 같이 정의된다.

$$R_Q = \begin{bmatrix} 0 & -q_{3b} & q_{2b} \\ q_{3b} & 0 & -q_{1b} \\ -q_{2b} & q_{1b} & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

(31), (32) 및 (34)는 등가모델이다. 그리고 비선형 임을 알 수 있다. 이러한 비선형 모델을 어떻게 선형화 하느냐에 따라서 모델링 오차는 결정된다. 각각의 자세오차에 따른 선형화된 오차모델을 구해보면 다음과 같다. 먼저 곱형 쿼터니언 오차를 이용한 변환행렬 오차와 관계된 속도오차는 (36)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta C_b^n \dot{\gamma}^b &= \Delta C_b^n (\Delta Q) \dot{\gamma}^b \\ &= 2 \begin{bmatrix} u_2 \dot{\gamma}^b - u_2 \dot{\gamma}^b & u_4 \dot{\gamma}^b - u_3 \dot{\gamma}^b \\ u_3 \dot{\gamma}^b - u_4 \dot{\gamma}^b & -u_1 \dot{\gamma}^b & u_2 \dot{\gamma}^b \\ u_4 \dot{\gamma}^b & u_3 \dot{\gamma}^b & -u_2 \dot{\gamma}^b & -u_1 \dot{\gamma}^b \end{bmatrix} \Delta Q \end{aligned} \quad (36)$$

(36)에 (9)을 이용하여 회전벡터 오차로 주어지는 등가 오차 모델은 (37)과 같다.

$$\Delta C_b^n \dot{\gamma}^b = -2 C_b^n \begin{bmatrix} c_b & -s_b \Delta \phi_Z & s_b \Delta \phi_Y \\ s_b \Delta \phi_Z & c_b & -s_b \Delta \phi_X \\ -s_b \Delta \phi_Y & s_b \Delta \phi_X & c_b \end{bmatrix} \dot{\gamma}^b \quad (37)$$

등가 모델인 (36)과 (37)을 비교하면 (36)은 선형 오차모델이며 (37)은 비선형 오차모델이다. 따라서 속도오차 모델의 경우에도 곱형 쿼터니언 오차를 이용하면 모델링 오차를 감소시킬 수 있음을 보여준다. 곱형 쿼터니언 오차를 이용한 변환행렬 오차와 관계된 속도 오차는 다음과 같다. (37)의 등가 모델은 (38)과 같다. 또한 c_b 를 무시한 오차모델은 (39)와 같으며, (39)는 (40)과 등가이다.

$$\Delta C_b^n \dot{\gamma}^b = 2 [-C_b^n \dot{\gamma}^b, \tilde{C}_b^n [\dot{\gamma}^b] \times] \begin{bmatrix} c_b \\ q^b \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\Delta C_b^n \dot{\gamma}^b = 2 \tilde{C}_b^n [\dot{\gamma}^b] \times q^b \quad (39)$$

$$\Delta C_b^n \dot{\gamma}^b = -2 \tilde{C}_b^n [\dot{\gamma}^b] \times U^T \Delta Q \quad (40)$$

그리고 (32)에서 고차 항을 무시하고 근사화함으로써 비틀림 각 모델은 (41)과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta C_b^n \dot{\gamma}^b = \tilde{C}_b^n [\dot{\gamma}^b] \times \Delta \theta^b \quad (41)$$

자세오차 모델에 따른 선형 속도 오차모델은 앞에서 구한 (36)-(41)을 (28)의 우측의 첫 번째 항과 치환함으로써 구할 수 있다. 앞에서 설명한 것과 같이 동체 좌표계를 기준으로 유도된 오차모델에서도 곱형 쿼터니언 오차모델은 큰 자세오차를 가진 시스템에서 모델링 오차를 줄이는데 효과적인 임을 알 수 있었다.

III. 리아프노프 변환을 이용한 SDINS 오차모델의 일반화 유도방법

선형 시불변 시스템에서 상태변수를 변환하기 위하여 사용하는 방법인 유사 변환(similarity transformation)과 유사하게 선형 시변 시스템에서는 리아프노프 변환을 사용하여 상태변수를 변환한다. 리아프노프 변환으로 변환된 시스템의 경우 변환행렬의 어떤 성질만 만족하면 변환된 시스템의 특성은 변환 하기전의 시스템 특성을 그대로 유지한다. 따라서 리아프노프 변환은 시스템의 관측성, 제어성 및 안정성 등과 같은 특성을 해석하는데 매우 유용하다.

본 절에서는 2절에서 유도된 큰 자세오차를 가진 시스템에도 사용이 가능한 오차모델 및 리아프노프 변환 방법을 이용하여 SDINS의 등가 오차모델을 유도하는 일반화된 오차모델 유도 방법을 제시한다. 참고문헌[3]의 결과와 2절에서 제시한 자세오차들의 관계식을 이용하여 자세오차에 따른 리아프노프 변환행렬을 유도하고, 유도된 변환행렬을 이용하여 등가 오차모델을 유도한다.

1. 리아프노프 변환 및 특성

선형 시변 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + v(t) \end{aligned} \quad (42)$$

$M(t)$ 을 변환행렬이라고 정의하면 상태변수의 선형변환은 (43)과 같이 주어진다.

$$\bar{x}(t) = M(t)x(t) \quad (43)$$

변환행렬은 다음의 두 가지 특성을 가진다.

A1) $M(t)$ 와 $\dot{M}(t)$ 는 연속적이며 $[t_0, \infty)$ 구간에서 한정되어 있다.

A2) 아래의 식이 만족되는 상수 m 이 존재한다.

$$0 < m \leq |\det M(t)|.$$

(43)을 이용하면 변환된 상태 방정식은 (44)와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}(t)u(t) \\ y(t) &= \bar{C}(t)\bar{x}(t) + v(t), \quad \bar{x}(t_0) = M(t_0)x_0 \end{aligned} \quad (44)$$

여기서, $\bar{A}(t) = \dot{M}(t)M(t)^{-1} + M(t)A(t)M(t)^{-1}$,

$$\bar{B}(t) = M(t)B(t), \quad \bar{C}(t) = C(t)M(t)^{-1}$$

리아프노프 변환에 의하여 변환된 시스템 오차모델의 특성은 리아프노프 변환행렬이 조건 1) 및 2)를 만족하면 변환 전 모델의 특성을 유지한다. 이러한 특성을 이용하면 관성항법시스템에서 중요한 특성인 가관측성 및 필터 식의 변환 관계를 쉽게 구할 수 있다. 선형 시변 시스템의 경우 $[t_0, t_1]$ 구간에서 균일 가관측(uniformly observable)하기 위해서는 가관측성 그라미언(observability grammian), $W_0[t_0, t_1]$ 이 정칙(nonsingular)이어야 한다.

$$W_0[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau A \quad (45)$$

그리고 리아프노프 변환된 시스템의 가관측성 그라미언(observability grammian)은 (46)과 같으며, 변환행렬의 두 가지 조건이 만족되면 변환전의 시스템이 $[t_0, t_1]$ 구간에서 균일 가관측한 것과 리아프노프 변환된 시스템이 균일 가관측한 것은 등가이다.

$$\bar{W}_0[t_0, t_1] = M(t_0)^{-T} W_0[t_0, t_1] M(t_0)^{-1} \quad (46)$$

이러한 관계를 이용하면 가관측성은 오차모델이 변환에 따라서 다시 조사할 필요가 없으며 기존의 결과들[12]-[19]과 변환행렬의 두 가지 조건만 조사함으로써 특성을 간단하게 판단 할 수 있다.

칼만필터 공분산 및 추정식이 (47)-(49)와 같이 주어지면 리아프노프 변환된 시스템의 변환된 공분산 및 추정 식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A(t)^T - P(t)C(t)^T R^{-1} C(t)P(t) + B(t)QB(t)^T \quad (47)$$

$$K(t) = P(t)C(t)^T R^{-1} \quad (48)$$

$$\hat{x}(t) = A(t)\hat{x}(t) + K(t)[y(t) - C(t)\hat{x}(t)] \quad (49)$$

여기서, $\hat{x}(t_0) = x_0$. (44)와 같이 변환된 시스템의 칼만필터의 공분산 및 추정 식은 다음과 같다.

$$\bar{P}(t) = \bar{A}(t)\bar{P}(t) + \bar{P}(t)\bar{A}(t)^T - \bar{P}(t)\bar{C}(t)^T R^{-1} \bar{C}(t)\bar{P}(t) + \bar{B}(t)Q\bar{B}(t)^T \quad (50)$$

$$\bar{K}(t) = \bar{P}(t)\bar{C}^T(t)R^{-1} \quad (51)$$

$$\hat{\bar{x}}(t) = \bar{A}(t)\hat{\bar{x}}(t) + \bar{K}(t)[y(t) - \bar{C}(t)\hat{\bar{x}}(t)] \quad (52)$$

여기서, $\bar{P}(t_0) = M(t_0)P(t_0)M^T(t_0)$, $\hat{\bar{x}}(t_0) = \bar{x}_0$, $\bar{x}_0 = M(t_0)x_0$. 따라서 리아프노프 변환 행렬이 주어지면 변환된 시스템의 필터 식들을 쉽게 구할 수 있다. 이 밖에 리아프노프 변환사

용의 장점은 모델 변화에도 불구하고 시스템의 안정성 및 제어성과 같은 특성들도 보존된다는 것이다.

2. SDINS 리아프노프 변환행렬 유도

리아프노프 변환에서 중요한 오차모델 사이의 리아프노프 변환행렬을 유도한다. 항법 좌표계를 기준으로 유도한 오차모델인 [3]의 결과와 동체 좌표계를 기준으로 한 2.2절의 결과를 종합하여 기준 좌표계와 오차모델에 따른 리아프노프 변환행렬을 구해보면 다음과 같다.

동체 좌표계를 기준으로 한 자세오차 사이의 관계식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta\phi^b = -2U^T \Delta Q \quad (53a)$$

$$\Delta\phi^b = \frac{1}{s_b} q^b \quad (53b)$$

$$q^b = -U^T \Delta Q \quad (53c)$$

$$\Delta Q = -c_b \tilde{Q}_b^n - Uq^b \quad (53d)$$

그리고 [3]의 결과로부터 항법 좌표계를 기준으로 유도된 자세오차 사이의 관계식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\Delta\phi^n = -2Y^T \delta Q \quad (54a)$$

$$\Delta\phi^n = \frac{1}{s_n} q^n \quad (54b)$$

$$q^n = -Y^T \delta Q \quad (54c)$$

$$\delta Q = -c_n \tilde{Q}_b^n - Yq^n \quad (54d)$$

여기서, $\Delta\phi^n (\equiv [\Delta\phi_N, \Delta\phi_E, \Delta\phi_D]^T)$ 는 참 항법(true navigation) 좌표계에 대한 오차가 있는 항법(indicated navigation) 좌표계 사이의 회전벡터 오차라고 정의한다. $\Delta\phi_N, \Delta\phi_E$ 및 $\Delta\phi_D$ 는 각각 N 축, E 축 및 D 축 성분의 회전벡터를 의미한다. $\delta Q (\equiv \tilde{Q}_b^n - Q_b^n)$ 는 합형 쿼터니언 오차이다. 여기서 $\tilde{Q}_b^n (\equiv [\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3]^T)$ 는 오차를 포함한 쿼터니언(indicated quaternion)이고, $Q_b^n (\equiv [q_0, q_1, q_2, q_3]^T)$ 는 참 쿼터니언(true quaternion)이다. 또한 $Q_n^n (\equiv [q_{0n}, q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}]^T)$ 는 회전 벡터 오차에 의하여 주어지는 곱형 쿼터니언 오차(multiplicative quaternion error)로 정의한다. 여기서 n' 는 오차가 있는 항법 좌표계를 표현한다. 네 성분의 곱형 쿼터니언 오차는 (55)와 같이 정의된다.

$$Q_n^n = [q_{0n}, q^n]^T = [1 + c_n, s_n \Delta\phi_N, s_n \Delta\phi_E, s_n \Delta\phi_D]^T \quad (55)$$

여기서 $q^n = [q_1, q_2, q_3]^T$,

$$c_n = \cos\left(\frac{\phi_{0n}}{2}\right) - 1, \quad s_n = \frac{1}{\phi_{0n}} \sin\left(\frac{\phi_{0n}}{2}\right),$$

$$\phi_{0n} = \sqrt{(\Delta\phi_N)^2 + (\Delta\phi_E)^2 + (\Delta\phi_D)^2}.$$

앞에서 자세오차의 정의에 따라서 자세오차를 합형 쿼터

니언 오차, 곱형 쿼터니언 오차 및 회전벡터 오차로 나누어 정의하였다. 자세오차에서 합형 쿼터니언 오차 및 곱형 쿼터니언 오차는 4변수 자세오차이다. 그러나 q_{0b} 또는 q_{0n} 를 포함하는 곱형 쿼터니언 오차는 (25)와 같이 비선형 자세오차 모델을 가지게 된다. 따라서 본 논문에서는 q_{0b} 및 q_{0n} 대신에 c_b 및 c_n 을 사용하는 곱형 쿼터니언 오차를 4변수 자세오차라고 정의 한다. 또한 (53c) 및 (54c)와 같이 곱형 쿼터니언 오차 중에서 q_{0b} 및 q_{0n} 을 생략한 곱형 쿼터니언 오차인 q^b 및 q^n 그리고 회전벡터 오차를 각각 3변수 자세오차라고 정의한다. 4변수 및 3변수들 사이의 자세오차 관계식들 및 좌표계 사이의 자세오차 관계식들은 다음과 같이 구할 수 있다. (53) 및 (54)를 이용하면 동체 좌표계 및 항법 좌표계 사이의 자세오차 변환 관계식은 (56)과 같다.

$$\Delta\phi^b = \tilde{C}_b^n \Delta\phi^n \quad (56a)$$

$$q^b = \tilde{C}_b^n q^n \quad (56b)$$

$$c_b = c_n \quad (56c)$$

또한 동체 좌표계 기준 합형 쿼터니언 ΔQ 및 항법 좌표계 기준 합형 쿼터니언 δQ 의 관계는 (53c), (54c) 및 (56b)를 사용하면 (57)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} q^b &= \tilde{C}_b^n q^n = -\tilde{C}_b^n Y^T \delta Q = -U^T Y Y^T \delta Q \\ &= -U^T (I - \tilde{Q}_b^n \tilde{Q}_b^{nT}) \delta Q = -U^T \delta Q = -U^T \Delta Q \end{aligned} \quad (57)$$

여기서, $\tilde{C}_b^n = U^T Y$, $Y Y^T = (I - \tilde{Q}_b^n \tilde{Q}_b^{nT})$, $U^T \tilde{Q}_b^n = 0$. 따라서 (58)이 성립한다.

$$\Delta Q = \delta Q \quad (58)$$

(58)의 결과는 기준 좌표계와 관계없이 합형 쿼터니언은 같다는 것을 알 수 있다. 앞에서 구해진 (53)-(58)을 이용하면 자세오차에 따른 리아프노프 변환행렬, $M(t)$ 는 표 1 및 표 2와 같이 나타낼 수 있다.

2. 리아프노프 변환을 이용한 SDINS 오차모델 유도
2절에서 구해진 리아프노프 변환행렬을 이용하여 SDINS 자세 오차모델을 유도하고, 이 방법을 확장하여 리아프노프 변환 SDINS 오차모델을 유도한다.

표 1. 4변수 자세오차에 따른 리아프노프 변환행렬(m_{4T}).
Table 1. Lyapunov transformation matrix(m_{4T}) according to attitude errors of 4 parameters.

	ΔQ	$[c_b, q^b]^T$
δQ	$I_{4 \times 4}$	$[-\tilde{Q}_b^n, -U]$
$[c_n, q^n]^T$	$[-\tilde{Q}_b^n, -Y]^T$	$\begin{bmatrix} I_{1 \times 1} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & \tilde{C}_b^n \end{bmatrix}$

표 2. 3변수 자세오차에 따른 리아프노프 변환행렬(m_{3T}).
Table 2. Lyapunov transformation matrix(m_{3T}) according to attitude errors of 3 parameters.

	q^b	$\Delta\phi^b$
q^n	\tilde{C}_b^n	$\frac{1}{2} \tilde{C}_b^n$
$\Delta\phi^n$	$2\tilde{C}_b^n$	\tilde{C}_b^n

3.1 리아프노프 변환을 이용한 SDINS 등가 자세 오차모델
리아프노프 변환 관계식인 (44) 그리고 표 1 및 표 2의 결과를 이용하여 SDINS의 등가 오차모델을 구해보면 아래와 같다. 동체 좌표계 기준 합형 쿼터니언 오차 및 곱형 쿼터니언 오차 사이의 리아프노프 변환 관계는 표 1로부터 (59)와 같다.

$$\begin{bmatrix} c_b \\ q_b \end{bmatrix} = [-\tilde{Q}_b^n, -U]^T \Delta Q \quad (59)$$

(19)에 의하여 시스템 방정식은 (60)과 같다.

$$\Delta \dot{Q} = M_1 \Delta Q + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U \\ -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_{ib}^b \\ \delta\omega_{in}^n \end{bmatrix} \quad (60)$$

(59) 및 (60)으로부터 (44)의 관계를 구하고 (21)에 주어진 관계식들을 이용하여 정리하면 합형 쿼터니언 오차모델 (60)으로부터 리아프노프 변환된 곱형 쿼터니언 오차모델인 (61)이 구해진다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{c}_b \\ \dot{q}^b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & -w_{ib}^b \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b \\ q^b \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ I & -\tilde{C}_b^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_{ib}^b \\ \delta\omega_{in}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (61)$$

(61)은 (24)-(26)의 결과와 달리 곱형 쿼터니언 자세 오차모델도 c_b 와 q^b 를 상태변수로 결합하면 선형으로 표현이 가능함을 보여준다.

표 1을 이용하면 항법 좌표계 기준 곱형 쿼터니언 오차 및 동체 좌표계 기준 곱형 쿼터니언 오차 사이의 변환 관계식은 (62)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} c_n \\ q^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1_{1 \times 1} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & \tilde{C}_b^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_b \\ q^b \end{bmatrix} \quad (62)$$

(21)에 주어진 관계식들 그리고 (61) 및 (62)를 이용하여 동체 좌표계 기준 곱형 쿼터니언 오차모델 (61)로부터 리아프노프 변환된 항법 좌표계 기준 곱형 쿼터니언 오차모델을 구해보면 (63)과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{c}_n \\ \dot{q}^n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & -w_{in}^n \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ q^n \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ \tilde{C}_b^n & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_{ib}^b \\ \delta\omega_{in}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

(63)의 결과는 리아프노프 변환을 이용하면 기준 좌표계 사이의 오차모델도 서로 변환 가능함을 보여준다. 동일한 방법으로 표 1과 표 2의 리아프노프 변환행렬을 이용하면 모든 자세오차들 사이의 관계를 상호 변환할 수 있다. 이러한 자세오차 사이의 변환은 SDINS 뿐만 아니라, 특히 항공기 및 위성의 자세 추정시스템에 쉽게 적용할 수 있다.

3.2 리아프노프 변환을 이용한 SDINS 등가 오차모델

본 절에서는 앞 절에서 제시한 자세오차 사이의 리아프노프 변환 방법을 확장하여 SDINS에 대한 오차모델의 리아프노프 변환을 구한다. 먼저 3.2절에 언급된 자세오차 사이의 리아프노프 변환행렬을 확장하여 SDINS에 대한 리아프노프 변환행렬을 구하고 이것을 이용하여 등가 SDINS 오차모델을 유도한다.

항법 좌표계에서 SDINS 오차모델은 (42)와 같이 주어진다. 속도 보정형 관성항법시스템을 가정하여 (42)를 구해보면 4변수 자세오차를 사용하는 경우는 (64)와 같이 주어지며, 3변수 자세오차를 사용하는 경우는 (65)와 같이 주어진다.

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0_{3 \times 3} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0_{4 \times 3} & A_{35} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ B_{21} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{4 \times 3} & B_{32} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0_{1 \times 10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0_{1 \times 10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 10} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0_{3 \times 3} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0_{3 \times 3} & A_{35} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ B_{21} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & B_{32} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0_{1 \times 9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0_{1 \times 9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 9} \end{bmatrix} \quad (65)$$

여기서, 상태변수 $x(t)$ 는 위치오차(3개), 속도오차(3개), 자세오차(4개 혹은 3개), 가속도계 바이어스(3개) 및 자이로 바이어스(3개)로 구성된다. 또한 공정잡음 $w(t)$ 는 가속도계와 자이로의 잡음들로 구성된다.

표 1과 표 2에서 주어진 자세오차 사이의 리아프노프 변환행렬을 확장하여 SDINS에 대한 리아프노프 변환행렬을 구해보면 (66)과 같이 주어지며, $M_4(t)$ 는 4변수 자세오차에 대한 변환행렬이고, $M_3(t)$ 은 3변수 자세오차에 대한 변환행렬이다.

$$M_4(t) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & m_{4T} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$M_3(t) = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & m_{3T} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (66)$$

여기서, m_{4T} 은 표 1의 변환행렬이며, m_{3T} 은 표 2의 변환행렬이다. (64)-(66)을 이용하여 리아프노프 변환된 시스템을 구해보면 4변수 자세오차에 대하여 (64)는 (67)로 변환되고, 3변수를 사용하는 경우에 대하여 (65)는 (68)로 변환된다.

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ A_{21} & A_{22} & \bar{A}_{23} & A_{24} & 0_{3 \times 3} \\ m_{4T}A_{31} & m_{4T}A_{32} & \bar{A}_{33} & 0_{4 \times 3} & m_{4T}A_{35} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ B_{21} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{4 \times 3} & m_{4T}B_{32} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \bar{C}(t) = C(t) \quad (67)$$

여기서, $\bar{A}_{33} = \dot{m}_{4T}m_{4T}^T + m_{4T}A_{33}m_{4T}^T$, $\bar{A}_{23} = A_{23}m_{4T}^T$.

$$\bar{A}(t) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ A_{21} & A_{22} & \bar{A}_{23} & A_{24} & 0_{3 \times 3} \\ m_{3T}A_{31} & m_{3T}A_{32} & \bar{A}_{33} & 0_{3 \times 3} & m_{3T}A_{35} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}(t) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ B_{21} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & m_{3T}B_{32} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \bar{C}(t) = C(t) \quad (68)$$

여기서, $\bar{A}_{33} = \dot{m}_{3T}m_{3T}^T + m_{3T}A_{33}m_{3T}^T$, $\bar{A}_{23} = A_{23}m_{3T}^T$. (67) 및 (68)에서 \bar{A}_{23} 및 \bar{A}_{33} 의 계산은 복잡해 보인다. 그러나 2절의 결과와 [3]의 결과를 이용하면 간단하게 등가 식을 구할 수 있다. \bar{A}_{23} 에 대한 등가 식은 표 3과 같이 주어진다. 그리고 \bar{A}_{33} 에 대한 등가 식은 표 4와 같이 주어진다. 따라서 표 3과 표 4를 이용함으로써 변환된 시스템의 모델을 구할 수 있다. 예를 들면 local-level좌표계에서 동체 좌표계를 기준으로 사용한 미소 비틀림 각 ($\Delta\phi^b$) SDINS 오차모델은 (2), (23), (28), (41) 및 (65)를 이용하면 구해진다. 구해진 $A(t)$, $B(t)$ 및 $C(t)$ 는 다음과 같다.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \frac{R_{mm}\rho_E}{R_m+h} & 0 & \frac{\rho_E}{R_m+h} \\ \frac{\rho_N}{\cos L} \left(\tan L - \frac{R_H}{R_t+h} \right) & 0 & \frac{\rho_N \sec L}{R_t+h} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_m+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sec L}{R_t+h} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} an211 & 0 & \frac{\rho_E}{R_m+h} v_D - \rho_N \rho_D \\ an212 & 0 & \frac{\rho_D}{R_t+h} v_N - \frac{\rho_N}{R_t+h} v_D \\ an213 & 0 & \rho_N^2 + \rho_E^2 \end{bmatrix},$$

$$an211 = \frac{\rho_E R_{mm}}{R_m+h} v_D - (\rho_N \sec^2 L + 2\Omega_N) v_E - \rho_N \rho_D R_H$$

$$an212 = \left(2\Omega_N + \rho_N \sec^2 L + \rho_D \frac{R_H}{R_t+h} \right) v_N - \left(\frac{\rho_N R_H}{R_t+h} - 2\Omega_D \right) v_D$$

$$an213 = \rho_N^2 R_H + \rho_E^2 R_{mm} - 2\Omega_D v_E$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{v_D}{R_m+h} & 2\rho_D + 2\Omega_D & -\rho_E \\ -2\Omega_D - \rho_D & \frac{v_N \tan L + v_D}{R_t+h} & 2\Omega_N + \rho_N \\ 2\rho_E & -2\Omega_N - 2\rho_N & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{23} = \tilde{C}_b^n [\dot{f}^b] \times, \quad A_{24} = \tilde{C}_b^n,$$

$$A_{31} = \tilde{C}_n^b \begin{bmatrix} \Omega_D - \frac{\rho_N R_H}{R_t+h} & 0 & -\frac{\rho_N}{R_t+h} \\ -\frac{\rho_E R_{mm}}{R_m+h} & 0 & -\frac{\rho_E}{R_m+h} \\ -\Omega_N - \rho_N \sec^2 L - \frac{\rho_D R_H}{R_t+h} & 0 & -\frac{\rho_D}{R_t+h} \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \tilde{C}_n^b \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_t+h} & 0 \\ -\frac{1}{R_m+h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\tan L}{R_t+h} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{33} = -w_{ib}^b \times, \quad A_{35} = -I, \quad B_{21} = \tilde{C}_b^n,$$

$$B_{32} = -I, \quad C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0_{1 \times 9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0_{1 \times 9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 9} \end{bmatrix}.$$

리아프노프 변환된 상태변수 $\bar{x}(t)$ 를 항법 좌표계를 기준으로 한 미소 비틀림 각 ($\Delta\phi^n$)이라고 정의하면, (66)의 변환행렬 $M_3(t)$ 는 표 2로부터 $m_{3T} = \tilde{C}_b^n$ 에 의해 구해진다. 또한 리아프노프 변환된 SDINS 오차모델은 (44) 및 (68)에 의해 구해지며 그 결과는 (70)과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11}, \quad \bar{A}_{12} = A_{12}, \quad \bar{A}_{21} = A_{21}, \\ \bar{A}_{22} &= A_{22}, \quad \bar{A}_{24} = A_{24}, \quad \bar{A}_{31} = \tilde{C}_b^n A_{31}, \\ \bar{A}_{23} &= A_{23} \tilde{C}_b^n = \tilde{C}_b^n [\dot{f}^b] \times \tilde{C}_b^n = [\dot{f}^n] \times \\ &= [\tilde{C}_b^n \dot{f}^b] \times, \quad \bar{A}_{32} = \tilde{C}_b^n A_{32}, \\ \bar{A}_{33} &= -w_{in}^n \times, \quad \bar{A}_{35} = -\tilde{C}_b^n, \\ \bar{B}_{21} &= B_{21}, \quad \bar{B}_{32} = -\tilde{C}_b^n, \quad \bar{C} = C \end{aligned} \quad (70)$$

여기서 \bar{A}_{23} 및 \bar{A}_{33} 은 표 3과 표 4에 의하여 각각 등가모델을 쉽게 얻을 수 있다.

(69) 및 (70)은 비틀림 각에 대하여 기준 좌표계에 따른 오

차모델을 변환하였다. 이러한 유도 방법과 동일하게 본 연구에서 얻어진 자세오차 사이의 관계식 및 표들을 이용하면 모든 SDINS의 오차모델을 리아프노프 변환으로 얻을 수 있다. 이렇게 구해진 오차모델은 필터 구성에 유용할 것으로 판단되며, 시스템의 적용 환경에 따라서 제시된 오차모델을 선택하여 사용할 수 있다. 특히 동체 좌표계를 기준으로 유도된 오차모델을 사용하는 관성항법시스템의 경우, 기존에는 필터의 특성을 해석하기 어려웠다. 그러나 리아프노프 변환관계를 구함으로써 항법 좌표계를 기준으로 해석된 기존의 자료들을 사용하고 리아프노프 변환 행렬의 특성들만 조사함으로써 간단하게 필터의 특성을 조사할 수 있다. 또한 오차모델 변환에 따른 필터 구성도 간단하게 전환할 수 있다.

표 3. 자세오차에 따른 A_{23} 혹은 \bar{A}_{23} .

Table 3. A_{23} or \bar{A}_{23} according to attitude errors.

	ΔQ	$[c_b, q^b]^T$
A_{23} 혹은 \bar{A}_{23}	va_{1b}	$2[-C_b^n \dot{f}^b, \tilde{C}_b^n [\dot{f}^b] \times]$
	q^b	$\Delta\phi^b$
A_{23} 혹은 \bar{A}_{23}	$2\tilde{C}_b^n [\dot{f}^b] \times$	$\tilde{C}_b^n [\dot{f}^b] \times$
	δQ	$[c_n, q^n]^T$
A_{23} 혹은 \bar{A}_{23}	va_{1b}	$2[-C_b^n \dot{f}^b, [\tilde{C}_b^n \dot{f}^b] \times]$
	q^n	$\Delta\phi^n$
A_{23} 혹은 \bar{A}_{23}	$2[\tilde{C}_b^n \dot{f}^b] \times$	$[\tilde{C}_b^n \dot{f}^b] \times$

$$\text{여기서, } va_{1b} = 2 \begin{bmatrix} u_2 \dot{f}^b - u_2 \dot{f}^b & u_4 \dot{f}^b - u_3 \dot{f}^b \\ u_3 \dot{f}^b - u_4 \dot{f}^b & -u_1 \dot{f}^b & u_2 \dot{f}^b \\ u_4 \dot{f}^b & u_3 \dot{f}^b & -u_2 \dot{f}^b & -u_1 \dot{f}^b \end{bmatrix}$$

표 4. 자세오차에 따른 A_{33} 혹은 \bar{A}_{33} .

Table 4. A_{33} or \bar{A}_{33} according to attitude errors.

	ΔQ	$[c_b, q^b]^T$
A_{33} 혹은 \bar{A}_{33}	aa_{1b}	$\begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & -w_{ib}^b \times \end{bmatrix}$
	q^b	$\Delta\phi^b$
A_{33} 혹은 \bar{A}_{33}	$-w_{ib}^b \times$	$-w_{ib}^b \times$
	δQ	$[c_n, q^n]^T$
A_{33} 혹은 \bar{A}_{33}	aa_{1b}	$\begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & -w_{in}^n \times \end{bmatrix}$
	q^n	$\Delta\phi^n$
A_{33} 혹은 \bar{A}_{33}	$-w_{in}^n \times$	$-w_{in}^n \times$

여기서, aa_{1b} 는 (19)의 M_1 이다.

IV. 결론

큰 자세오차를 가진 시스템에도 적용할 수 있는 동체 좌표계 기준 오차모형을 구하고, 오차모형 사이의 관계식들을 얻었다. 유도된 관계식들로부터 기준 좌표계 및 자세오차의 정의에 따른 리아프노프 변환행렬을 구하였으며, 리아프노프 변환을 이용하여 SDINS 오차모형의 유도 방법을 일반화하였다. 이렇게 유도된 오차모형은 시스템의 적용 환경에 따라서 적절하게 선택하여 사용할 수 있다. 또한 리아프노프 변환을 오차모형 유도에 적용함으로써 가관측성과 같은 필터의 특성을 간단하게 판단할 수 있음을 보였으며, 오차모형의 변환에 따른 필터구성도 간단하게 변환할 수 있음을 보였다.

참고문헌

- [1] K. R. Britting, *Inertial Navigation Systems Analysis*, New York: Wiley Interscience, 1971.
- [2] G. M. Siouris, *Aerospace Avionics System: A Modern Synthesis*, Academic Press, 1993.
- [3] M.-J. Yu, J. G. Lee, and H.-W. Park, "Comparision of SDINS in-flight alignment using equivalent error models," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 35, no. 3, pp. 1046-1054, July, 1999.
- [4] A. Weinreb and I. Y. Bar-Itzhack, "The psi-ang error equation in strapdown inertial navigation systems," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 14, no. 3, pp. 539-542, May, 1978.
- [5] B. Friedland, "Analysis strapdown navigation using quaternions," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 14, no. 5, pp. 764-768, Sep., 1978.
- [6] M. Shibata, "Error analysis strapdown inertial navigation using quaternions," *Journal of Guidance*, vol. 9, no. 3, pp. 379-381, May-June, 1986.
- [7] D. Chung, J. G. Lee, G. C. Park, and H.-W. Park, "Strap-down INS error model for multiposition alignment," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 32, no. 4, pp. 1362-1366, Oct., 1996.
- [8] H. K. Lee, J. G. Lee, Y. K. Roh, and C. G. Park, "Modeling quaternion errors in SDINS: computer frame approach," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 1, pp. 289-299, Jan., 1998.
- [9] M.-J. Yu, H.-W. Park, and C. B. Jeon, "Equivalent non-linear error models of strapdown inertial navigation system," *In Proceedings of the AIAA 1997 GNC Conference*, Aug., 1997; AIAA Paper 97-3536.
- [10] 유명중, 김현백, 전창배, 유준, "스트랩다운 관성항법시스템의 비선형 자세오차 미분방정식," 한국항공우주학회지, 제23권, 제5호, 1995.
- [11] S. Vathsal, "Spacecraft attitude determination using a second-order nonlinear filter," *Journal of Guidance*, vol. 10, no. 6, pp. 559-566, Nov.-Dec., 1987.
- [12] I. Y. Bar-Itzhack and N. Berman, "Control theoretic approach to inertial navigation systems," *Journal of Guidance*, vol. 11, no. 3, pp. 237-245, May-June, 1988.
- [13] 정도형, "선형 시변 시스템의 가제어/가관측 강인성 연구 및 스트랩다운 관성항법시스템의 응용" 서울대학교 박사학위논문, 1996.
- [14] 송기원, 유명중, 전창배, "속도보정 스트랩다운 관성항법장치에의 안정성 강화 및 가관측성 분석," '94 한국자동차제어 학술회의 논문집, pp. 1296-1299, 1994.
- [15] D. Goshen-Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, "Observability analysis of piece-wise constant system, part II: application to inertial navigation in-flight alignment," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 3, pp. 1068-1073, Oct., 1992.
- [16] D. Goshen-Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, "Unified approach to inertial navigation system error modeling," *Journal of Guidance and Control, and Dynamics*, vol. 15, no. 3, pp. 648-653, May-June, 1992.
- [17] J. G. Lee, C. G. Park, and H. W. Park, "Multiposition alignment of strapdown inertial navigation system," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 29, no. 4, pp. 1323-1328, 1993.
- [18] D. Goshen-Meskin and I. Y. Bar-Itzhack, "Observability analysis of piece-wise constant system, part I: theory," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 3, pp. 1056-1067 Oct., 1992.
- [19] Y. F. Jiang and Y. P. Lin, "Error estimation of ins ground alignment through observability analysis," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 1, pp. 92-97, 1992.



유 명 중

1964년 12월 20일생. 1987년 경북대학교 공대 전자공학과 졸업. 1990년 동 대학원 석사. 1990년~현재 국방과학연구소 선임연구원. 1998년~현재 서울대학교 공대 전기 컴퓨터공학부 박사과정 재학중. 관심분야는 관성항법시스템, 오차 모델링, 강인 필터링 등.



이 장 규

1946년 3월 28일생. 1971년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업. 1974년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(석사). 1977년 Univ. of Pittsburgh 전기공학과 졸업(공학박사). 1977년~1981년 The Analytic Sciences Corporation 연구원(Technical Staff). 1981년~1982년 Charles Draper Laboratory 연구원(Technical Staff). 1982년~현재 서울대학교 전기 컴퓨터공학부 교수. 1994년~현재 서울대학교 자동제어 특화연구센터 소장. 관심분야는 관성항법시스템, 계수식별, 강인필터링, 자율주행항체(AVG), 표적 추적 시스템 등.



박 찬 국

1961년 9월 13일생. 1985년 서울대학교 제어계측공학과 졸업. 1987년 동 대학원 석사. 1993년 동대학원 박사. 1993년 서울대학교 제어계측신기술연구센터 박사후 연구원. 1994년 ~현재 광운대학교 제어계측공학과 조교수/부교수. 1998년 미국 UCLA 기계항공공학과 방문 연구원. 1997년~현재 제어자동화시스템 공학회 논문지 편집위원. 연구관심분야는 관성항법시스템 개발, GPS/INS 결합기법, 저급 IMU 응용, 칼만필터 설계.