# PD-슬라이딩 모드 복합 제어기를 이용한 로봇 매니퓰레이터의 제어

# Control of Robot Manipulators Using PD-Sliding Mode Hybrid Controller

이 규 준, 경 태 현, 김 종 식
(Kyu-Joon Lee, Tai Hyun Kyung, and Jong Shik Kim)

**Abstract :** A new chattering free PD-sliding mode hybrid control scheme is proposed for robot manipulators. This hybrid controller is composed of a PD controller and a semi-continuous sliding mode controller. It has a good robust performance in reaching mode which does not possess invariance property of sliding mode, and has chattering free characteristics in sliding mode. Thus, the PD-sliding mode hybrid controller has a good robust performance in the whole region. It is shown that the proposed control has a good transient response and trajectory tracking performance for a 2-link SCARA robot manipulator.

**Keywords :** chattering free, PD-sliding mode hybrid control, reaching law, Lyapunov stability

## I. 서론

슬라이딩 모드 제어기법은 시스템의 동특성과 관계없이 설계자가 제어목적에 적합하게 슬라이딩 평면에 대한 동특성을 지정할 수 있고, 플랜트의 상태를 이 슬라이딩 평면에 머물게 할 수 있다. 이런 특성으로 인해서 플랜트 자체의 안정성과 관계없이 플랜트를 안정하고 바람직한 상태로 만들 수 있다. 또한 파라미터의 변동이나 모델링 되지 않은 빠른 동특성이나 입력측으로 반영할 수 있는 불확실한 외란 등이 정합 불확실성(matched uncertainty) 조건을 만족하면 제어기의 성능은 이들에 대하여 완전히 영향을 받지 않는 불변성(invariance property)을 가진다[1]-[4]. 그리고 슬라이딩 평면에서 시스템의 동특성은 슬라이딩 평면의 차수만큼 시스템의 차수가 감소되는 특징도 가진다. 이런 특성 때문에 가장 널리 연구되고 있는 비선형 제어기법 중의 하나이다.

그렇지만 실제 적용 시에는 시스템의 비모델 동특성을 여기 시키는 채터링 문제와 도달단계(reaching phase)에서의 강인성 문제를 가지고 있다. 채터링을 유발하는 메카니즘은 두 가지로 나눌 수 있다[2][5]. 첫째는 슬라이딩 모드 제어입력의 특징인 고주파 성분이 시스템 모델링 시 무시한 플랜트의 빠른 동역학을 여기 시켜 감쇠되지 않은 유한한 주파수와 크기를 가지는 진동을 발생시키는 것이다. 둘째는 제어기를 이산시간계에서 구현할 때 제어기의 출력이 부분연속인 불연속 함수로 생성되므로 채터링이 발생한다. 이는 현재 컴퓨터와 A/D, D/A 변환기의 속도가 아주 빨라 대부분의 경우 문제가 되지 않는다.

본 논문에서는 채터링에 대한 첫째 메카니즘과 도달단계에서의 강인성에 대해 관심을 갖는다. 현재 채터링을 줄이기 위하여 가장 널리 사용하는 방법은 슬라이딩 평면의 경계층(boundary layer) 내에서 절환(switching) 요소를 부분 선형화 혹은 부드럽게 근사화하는 방법이다[6]. 이 방법의 특징상 강인성과 성능이 서로 상반되므로 이 두 가지 제어 특성치를 적절하게 조절해야 하며 진동을 완전하게 없앨 수는 없다. 그리고 특히 플랜트 내부에 불연속 요소를 가지고 있는 경우 채터링은 없앨 수가 없으며 큰 제어입력이 요구된다. 두 번째 방법은 점근 관측기(asymptotic observer)를 이용하는 방법[2][7]이다. 이 방법은 관측기의 루프에서 채터링이 일어나게 하는 것이다. 슬라이딩 모드의 변수가 관측기의 변수이고 제어기의 소프트웨어 상에서 슬라이딩 모드가 발생되므로 이상적인 슬라이딩 모드가 되고 실제 채터링은 일어나지 않는다. 그렇지만 이 방법은 관측기의 오차가 점근적으로 0이 되어야 효과적이다. 세 번째 방법은 슬라이딩 모드 외란 관측기를 이용하는 방법[2]이다. 슬라이딩 모드 제어입력은 연속항과 불연속항으로 구성되고 불연속항은 외란과 파라미터의 변동 등 모델 불확실성을 제어하기 위해 사용된다. 만약 모델 불확실성을 보상할 수 있으면 불연속항은 불필요하게 된다. 그렇지만 이 방법은 외란의 대역폭과 시스템의 바람직한 대역폭이 이 관측기의 절점 주파수(cutoff frequency)를 결정하는 중요한 요소가 되어 외란과 시스템의 특성에 따라 성능이 변하는 한계가 있다. 네 번째는 고차의 슬라이딩 모드를 이용하는 방법[8]이다. 이 방법은 슬라이딩 모드를 2차 이상으로 하면 실제 제어입력항은 불연속항을 적분한 값이 되므로 연속이 된다. 이 방법의 단점은 차수가 증가함에 따라서 새로운 변수가 추가되며 이 변수를 구해야 한다.

도달단계에서의 강인성을 높이기 위한 기존의 방법은 큰 제어입력을 이용하거나 적분 슬라이딩 모드[9]를 이용하는 방법이다. 큰 제어입력을 이용하는 방법은 제어기의 포화문제로 사용에 제한이 많다. 적분 슬라이딩 모드는 차수 감소의 특징이 없어지고 외란과 매개변수 변동의 주파수 대역이 스윗칭 요소의 고주파 성분과 겹치지 않아야 한다.

본 논문에서는 PD-슬라이딩 모드 복합 제어기를 제안한다. 이 제어기는 슬라이딩 모드의 도달 단계에서는 PD 제어기를 사용하고 슬라이딩 모드 단계에서는 반-연속 슬라이딩 모드 제어기를 사용한다. 반-연속 슬라이딩 모드 제어기

접수일자 : 2001. 7. 26., 수정완료 : 2001. 11. 14.
이규준 : 국방 과학 연구소(jjdream@hanmir.com)
경태현 : 부산대학교 지능기계공학과 대학원(taihyuni@freechal.com)
김종식 : 부산대학교 기계공학부, 기계기술연구소(jskim@pusan.ac.kr)

법은 슬라이딩 모드의 도달조건(reaching condition)[10][11] 중에서 Lyapunov 함수를 이용한 도달법칙(reaching law)과 Lyapunov 안정 조건을 이용하여 제어법칙을 유도한다. 이 슬라이딩 모드 제어기의 특징은 채터링이 거의 발생되지 않으며, 발생되더라도 그 크기가 아주 작아 문제가 되지 않는다. 설계 기법이 기존 슬라이딩 모드에 비해서 간단하다. 그리고 일반적인 복합 제어기에서 스윗칭 때문에 발생할 수 있는 불안정성은 스윗칭을 단순화하고 스윗칭시 히스테리시스 함수를 이용하면 아주 간단하게 이 문제가 해결된다. 따라서 본 복합 제어기는 전 영역에서 우수한 강인성과 성능을 보장 할 수 있는 제어기이다. 이 제어기법을 2축 SCARA 로봇 매니퓰레이터에 적용하여 실험을 통하여 그 효율성을 입증하였다.

## II. 채터링 없는 슬라이딩 모드 제어기

### 1. 도달법칙을 이용한 슬라이딩 모드 제어기 설계

이 절에서는 도달법칙을 이용하여 슬라이딩 모드 제어법칙을 유도하기로 한다. 우선, 제어입력에 대해 선형인 비선형 시스템(affine system)을 고려한다.

$$\dot{x} = f(x,t) + B(x,t)u + d_0 \tag{1}$$

여기서, $x \in R^n$, $u \in R^m$는 각각 상태 벡터, 제어입력 벡터이고, $B \in R^{n\times m}$는 입력행렬, 그리고 $d_0 \in R^n$는 파라미터 변동, 모델링 되지 않은 동특성, 외란 등 모든 모델불확실성을 포함한다. 이 식을 슬라이딩 모드의 정규 형태(regular form)로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \tag{2}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)u + d \tag{3}$$

여기서, $x_1 \in R^{n-m}$, $x_2 \in R^m$, $u \in R^m$이며, $B_2 \in R^{m\times m}$는 비특이행렬이고 $d \in R^m$이다.

그리고, 슬라이딩 면 $S$는 다음과 같이 정의된다.

$$S = \{x : s(x_1, x_2, t) = 0\} \tag{4}$$

여기서, $s(x_1, x_2, t) \in R^m$는 연속함수이다. 이때 제어 목적은 시스템의 상태를 집합 $S$로 가게 유도하는 것이며, 폐루프 시스템의 특징은 제어 대상 시스템 (1)의 제한조건인 슬라이딩 면 (4)의 선정에 의해 결정된다[3][5]. 바람직한 슬라이딩 면 선정을 위해 시스템 (1)과 슬라이딩 면 (4)에 대한 Lyapunov 함수를 2차곱의 형태로 나타내고, 그 도함수가 음의 한정함수(negative definite function)가 되도록 한다. 이 때 $s=0$의 해는 안정성을 가진다. 즉, Lyapunov 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$V = \frac{1}{2} s^T s \tag{5}$$

그리고, Lyapunov 함수의 도함수가 음의 한정함수이면 슬라이딩 모드는 안정하게 되므로, Lyapunov 함수의 도함수 $\dot{V}$는 다음과 같이 표현되어야 한다.

$$\dot{V} = s^T \dot{s} = -s^T D s \tag{6}$$

여기서, $D$는 양의 한정(positive definite)이다. (6)으로부터 다음 식이 성립한다.

$$s^T (Ds + \dot{s}) = 0 \tag{7}$$

이 방정식의 해로부터 다음과 같은 슬라이딩 모드에 대한 도달법칙[4]이 유도된다.

$$Ds + \dot{s} = 0 \tag{8}$$

위 조건으로부터 제어법칙을 구하면 다음과 같다[10].

$$u = u_{eq} - \left(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2\right)^{-1} Ds \tag{9}$$

여기서, 등가제어 항 $u_{eq}$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_{eq} = & -\left(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2\right)^{-1} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x_1} f_1 \right. \\ & \left. + \frac{\partial s}{\partial x_2} f_2\right] - \left(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x_2} d \end{aligned} \tag{10}$$

이 제어법칙은 도달법칙을 만족하고 불연속항을 포함하고 있지 않으므로 채터링을 발생하지 않는다. 그렇지만 이 제어법칙에는 미지의 모든 모델 불확실성 $d$를 포함하고 있다. 따라서 도달법칙 (8)을 만족하기 위해서는 $d$를 정확하게 구해야 적용이 가능하므로 현 상태로는 적용할 수 없다[9].

### 2. 연속 슬라이딩 모드 제어기 설계

이 절에서는 도달법칙을 이용한 슬라이딩 모드 제어법칙을 Lyapunov 안정 조건에 적용하여 새로운 연속 슬라이딩 모드 제어법칙을 유도하기로 한다. (9)는 (10)에서 미지의 모델 불확실성을 포함하고 있으므로 정확한 모델 불확실성을 구해야만 이용 가능하지만, 여기서는 정확히 모델 불확실성을 모르는 상태에서 연속 슬라이딩 모드 제어법칙을 유도하고자 한다.

(10)의 등가제어 항을 공칭 항과 모델 불확실 항으로 구분하여 나타내면 다음과 같다.

$$u_{eq} = u^n{}_{eq} + d_{eq} \tag{11}$$

여기서,

$$u^n{}_{eq} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2\right)^{-1} \left[\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial s}{\partial x_2} f_2\right]$$

$$d_{eq} = -\left(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial x_2} d$$

모델 불확실성에 대한 상한치만 알고 있다면 도달법칙에

서 구한 제어법칙은 현재의 상황에서는 다음과 같이 변형된 형태로 이용이 가능하다.

$$u = u^n{}_{eq} - (\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2)^{-1} Ds \tag{12}$$

이 제어법칙이 슬라이딩 도달조건(reaching condition)을 만족하면 연속 슬라이딩 모드 제어입력이 구해진다. 즉, (12)가 아래의 Lyapunov 함수의 도함수가 음이 되는 부등식을 만족시키면 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} \\ &= s^T (\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial s}{\partial x_2} (f_2 \\ &\quad + B_2 u + d)) < -\varepsilon \end{aligned} \tag{13}$$

여기서, $\varepsilon$은 양의 작은 실수이다. (13)을 만족하면 $s$는 유한 시간 이내에 슬라이딩 면에 도달하여 슬라이딩이 일어나고 그 면에 계속해서 머무르게 된다. 그리고 (12)를 (13)에 대입하면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \dot{s} = s^T (-Ds + \frac{\partial s}{\partial x_2} d) \\ &\le -\lambda_{\min}(D)\|s\|^2 + \lambda_{\max}(\frac{\partial s}{\partial x_2})\delta\|s\| < -\varepsilon \end{aligned} \tag{14}$$

여기서, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$는 유클리드 놈(Euclidean norm)이고, $\delta$는 모델 불확실성에 대한 상한치를 나타내며, 다음 조건식 (15)를 만족하면 Lyapunov 함수의 도함수는 항상 음이 되어 시스템의 안정성이 확보된다.

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min}(D) > \lambda_{\max}(\frac{\partial s}{\partial x_2})\delta\|s\|^{-1} + \varepsilon\|s\|^{-2} \\ &\delta \ge \|d\|_{\max} \end{aligned} \tag{15}$$

따라서, (15)를 만족하는 (12)는 도달조건을 만족하는 연속 슬라이딩 모드 제어법칙이 된다.

도달법칙과 Lyapunov 안정 조건을 이용하여 유도한 이 연속 슬라이딩 모드 제어법칙 (12)를 (9)와 비교하면, (9)는 모델 불확실성을 정확하게 구해야 적용이 가능하기 때문에 모델 불확실성을 정확하게 추정하는 항이 추가되어야 한다. 그러나, 조건 (15)를 만족하는 본 기법의 제어 입력식 (12)는 모델 불확실성의 상한치만 알면 언제나 적용이 가능하다. 본 제어기법의 장점은 현재까지 채터링을 방지하기 위하여 제안된 어떤 방식 보다 간결하며, 제어 입력식에서 설계 파라미터는 모델 불확실성의 크기를 고려하는 $\delta$와 슬라이딩 면의 선정뿐이다. 또한 플랜트의 운동방정식에서 그대로 유도했기 때문에 슬라이딩 모드의 장점인 불변성(invariance)과 시스템의 차수감소(reduced order)가 조금도 손상되지 않는다. 고전 슬라이딩 모드 제어에서 경계층 개념을 도입할 때 발생되는 경계에서의 불연속도 일어나지 않으며, 저주파 필터를 설계하기 위하여 자세한 외란에 대한 정보도 필요하지 않으며, 또한 2차 슬라이딩 모드[8]처럼 제어법칙이 복잡하지 않는 장점을 갖는다.

### 3. 반-연속 슬라이딩 모드 제어기의 설계

앞 절에서 유도한 연속 슬라이딩 모드 제어기법에서 $(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2)^{-1} Ds$ 항은 슬라이딩 면에 접근할수록 크기가 작아져 슬라이딩 면에서 0이 된다. 따라서 이 제어기의 특징상 도달시간이 아주 길어 정상상태 오차가 발생할 수밖에 없는 구조를 가지고 있다. 오차의 크기가 작으면 큰 문제는 없으나 오차가 클 경우 연속 슬라이딩 모드 제어기법으로는 보다 우수한 성능을 얻기 어렵다. 이를 보상하기 위하여 Lyapunov 함수와 바람직한 Lyapunov 함수의 도함수를 다음과 같이 수정한다.

$$V_1 = \frac{1}{2} s^T s + \int^t s^T k_1 \operatorname{sgn}(s) dt \tag{16}$$

$$\frac{dV_1}{dt} = -s^T Ds - s^T k_2 \, sgn(s) \tag{17}$$

여기서, $D$와 $k_1$, $k_2$는 양의 한정 행렬이다.

(16)의 도함수와 (17)에서 다음과 같은 수정된 도달 법칙이 구해진다.

$$\dot{s} + Ds + k \operatorname{sgn}(s) = 0 \tag{18}$$

여기서, $k = k_1 + k_2$이다. 수정된 도달법칙 (18)과 도달 조건을 이용하여 연속슬라이딩 모드 제어기법을 유도하는 방법과 같은 방법으로 식을 유도하면, 다음과 같은 반-연속 슬라이딩 모드 제어기법이 유도된다.

$$u = u^n{}_{eq} - (\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2)^{-1} Ds + K sgn(s) \tag{19}$$

여기서, $K = -(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2)^{-1} k$이고, $D$와 $k$는 아래 식을 만족해야 한다.

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min}(D) + \lambda_{\min}(k) > \lambda_{\max}(\frac{\partial s}{\partial x_2})\delta\|s\|^{-1} + \varepsilon\|s\|^{-2} \\ &\delta \ge \|d\|_{\max} \end{aligned} \tag{20}$$

반-연속 슬라이딩 모드 제어 기법은 연속 슬라이딩 모드와 고전 슬라이딩 모드 제어의 단순 조합 형태이지만, (19)의 마지막 항의 역할은 슬라이딩 면 근처에 있는 시스템의 상태를 이 면과 만나게 하는 역할만을 한다. 따라서 제어기의 설계에서 이 항의 설계가 다른 항에 큰 영향을 미치지 않는다. 이것이 본 제어기법의 큰 장점 중의 하나이다. 본 제어기법의 설계방법은 먼저 연속 슬라이딩 모드 제어기 설계 방법으로 설계를 하고, 마지막 항인 $K$는 $\|(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2)^{-1} D\|$항 크기의 일정범위 내에서 결정하면 된다. 또한, (19)의 마지막 항을 경계층 기법으로 근사화하여도 이항의 크기가 작기 때문에 강인성에 영향이 거의 없고 채터링도 거의 일어나지 않는다.

## III. PD-슬라이딩 모드 복합 제어기

### 1. PD-슬라이딩 모드 복합제어기의 구성

일반적인 슬라이딩 모드 제어기는 도달단계(과도영역)에서 강인성이 없기 때문에, 이 과도영역에서는 과도응답 특성이 우수한 제어기를 사용하고 슬라이딩 단계에서는 슬라이딩 모드 제어기를 이용하면 개념적으로 전 구간에서 강인성과 성능이 아주 우수한 제어기가 구성된다. 이를 위하여 과도영역에서는 과도응답 특성과 시스템을 안정화시키는 능력이 우수한 PD 제어기를 사용하고, 슬라이딩 모드 영역에서는 앞 절에서 유도한 채터링 없는 반-연속 슬라이딩 모드 제어기를 사용하는 PD-슬라이딩 모드 복합제어기를 그림 1과 같이 구성하면, 전 구간에 걸쳐서 모델 불확실성에 대한 우수한 강인성을 갖는 제어기를 구성할 수 있다.

### 2. PD-슬라이딩 모드 복합제어기의 스윗칭 기법

#### 2.1 기존 복합 제어기의 스윗칭 기법

일반적으로 복합제어기(hybrid controller) 설계시, 개개의 안정한 제어기를 이용하여 복합제어기를 구성하더라도 전체 시스템의 안정성이 보장되지 않는다[12]. 따라서 안정한 스윗칭 알고리즘이 요구된다. 만약 스윗칭이 계속해서 일어나면 슬라이딩 모드에서 일어나는 스윗칭과 유사한 현상이 일어나므로 안정한 스윗칭 조건을 선정해야 시스템의 안정성이 보장된다. 복합제어기에서 안정성이 보장되는 스윗칭 기법은 복합제어 시스템에 적용가능한 불연속 Lyapunov 함수를 구하고 이 함수를 이용하여 안정한 스윗칭 기법을 구현 할 수 있다[12]. 이렇게 선정되는 제어기는 주어진 영역(혹은 상태)에서 최적의 성능을 가진다. 그러나 이를 구현하기 위해서는 스윗칭 영역 근처에서 각 제어기를 선택했을 경우에 대한 시스템의 상태를 추정해야 하므로 시스템이 아주 복잡해진다. 이 일련의 작업은 복합 제어시스템의 큰 단점 중 하나이다. 그런데 이 영역에서는 어느 제어기를 선택하여도 성능에 큰 차이가 없기 때문에 최적의 제어기를 선택하기 위해서 소요되는 노력들과 스윗칭을 단순화했을 경우 절감되는 노력을 비교하면 불연속 Lyapunov 함수를 이용한 스윗칭 기법이 실제 구현에서 이런 모든 것들은 감안한다면 최적을 보장하는 것은 아니다.

#### 2.2 PD-슬라이딩 모드 복합제어기의 스윗칭 기법

본 제어기에서 PD 제어기의 도입 목적은 도달단계의 응답 특성을 개선하는데 있으며, PD 제어기와 슬라이딩 제어기는 각각 안정된 제어기이다. 따라서 슬라이딩 면 근처에서 PD 제어기가 슬라이딩 모드 제어기로 스윗칭 되게 하고, 그후 이들 두 제어기 사이에서 스윗칭이 반복해서 일어나지 않게 하면 복합시스템의 안정도는 보장이 된다. 왜냐하면 복합 제어기에서 불안정은 스윗칭이 반복될 때만 발생되는 문제이기 때문이다. 다음과 같은 간단한 스윗칭 알고리즘을 제안한다.

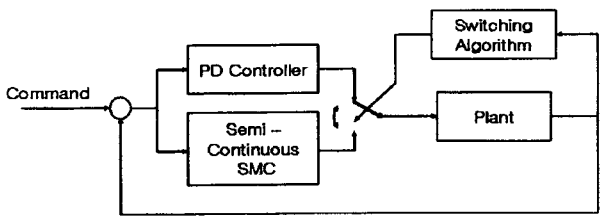



그림 1. PD-슬라이딩 모드 복합제어기 구성도.
Fig. 1. The configuration of the PD-sliding mode hybrid controller.

$$\begin{array}{l} PD\text{ 제어기} \rightarrow SMC\text{ 제어기}, \ \text{if } \|s\| < s_0 \\ SMC\text{ 제어기} \rightarrow PD\text{ 제어기}, \ \text{if } \|s\| > s_0 + \Delta \end{array} \tag{21}$$

여기서, $s_0$는 슬라이딩 모드 제어기가 작동하기 시작하는 영역을 결정하는 임의의 양의 실수이고, $\Delta$는 슬라이딩 모드에서 PD 제어기로의 전환되는 영역을 결정하는 설계변수이다. 이 $\Delta$가 어느 값 이상이 되면 시스템에 아주 큰 외란이 갑자기 유입되지 않는 한 스윗칭은 일어나지 않는다. 따라서 히스테리시스를 이용한 단순한 스윗칭 기법으로 PD의 장점과 슬라이딩 모드의 장점을 그대로 보존하면서 강인성과 성능이 아주 우수한 제어기를 구성할 수 있게 된다.

### 3. PD-슬라이딩 모드 복합제어기의 설계방법

복합제어기에서 각 제어기는 고유 영역에서 최대의 성능이 발휘되게 설계해야 한다.

PD 제어기 : PD 제어기는 과도기와 갑작스런 외란이 유입되었을 경우에 적용되므로 과도 영역에서 최대한의 성능이 발휘되게 비례제어게인 $K_p$와 미분제어게인 $K_d$를 선정하면 PD 제어기는 (22)과 같이 나타낼 수 있다.

$$u = K_p e_p + K_d e_d, \ \text{if } s \in \Omega_1 \tag{22}$$

여기서, $e_p$는 위치오차를, $e_d$는 속도오차를 나타내며, 범위 $\Omega_1$은 다음과 같다.

$$\Omega_1 = \{(s,t) \mid \|s(t)\| > s_0 \text{ and } t < t_r\}$$

그리고, $t_r$은 시정수 개념을 가지는 임의의 상수이다. 즉, 본 제어기는 PD 제어기로 제어가 시작됨을 의미한다. 물론 여기서 시스템 (1)에 불안정한 극점이 있는 경우 PD 제어기로 안정화 될 수 있는 시스템에 한하여 적용할 수 있다.

반-연속 슬라이딩 모드 제어기 : 반-연속 슬라이딩 모드 제어기의 설계기법은 슬라이딩 영역에서 최대의 성능이 발휘되게 앞에서 언급한 설계방법에 준하여 행한다.

$$u = u_{eq}^n + \left(\frac{\partial s}{\partial x_2} B_2\right)^{-1} Ds + K sat(s), \ \text{if } s \in \Omega_2 \tag{23}$$

여기서, $\Omega_2 = \{(s,t) \mid \|s(t)\| < s_0 + \Delta \text{ or } t > t_r\}$

## IV. 스카라 로봇의 모델링 및 복합 제어기의 적용

### 1. 스카라 로봇의 모델링

그림 2에 표시된 스카라형 로봇 매니퓰레이터의 동역학 모델은 다음과 같이 나타난다.

$$M(\theta)\ddot{\theta}(t) + V(\theta, \dot{\theta}) + F = u(t) \tag{24}$$

여기서, $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$는 각 관절에서 각변위 벡터, $u$는 관절에 가해지는 제어입력 토크 벡터, $M(\theta)$는 관성행렬, $V(\theta, \dot{\theta})$

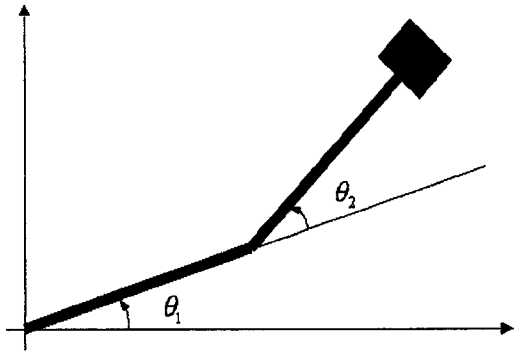



그림 2. 스카라 로봇의 각변위.
Fig. 2. Joint angles of a SCARA robot.

는 원심력과 Coriolis 힘에 의한 토크벡터를 나타내고, F는 파라미터 변동, 비모델링 항, 그리고 외란 등 모든 모델 불확실성을 나타낸다. 그리고 $M(\theta)$와 $V(\theta, \dot{\theta})$를 자세하게 나타내면 각각 다음과 같다.

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \alpha + 2\gamma\cos\theta_2 & \beta + \gamma\cos\theta_2 \\ \beta + \gamma\cos\theta_2 & \beta \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$V(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -\gamma\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\sin\theta_2 + b_1\dot{\theta}_1 \\ \gamma\dot{\theta}_2^2\sin\theta_2 + b_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

여기서, $\alpha$=2.087, $\beta$=0.2294, $\gamma$=0.2563, $b_1$=3.47, $b_2$=0.565이다.

상태벡터는 각 관절의 각변위와 각속도로 정의하기로 한다.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

여기서,

$$x_1 = \theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$$
$$x_2 = \dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$$

이때 로봇 매니퓰레이터의 동역학을 슬라이딩 모드 정규형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -M^{-1}(x_1)[V(x_1, x_2) + F] + B_2 u \end{cases} \tag{28}$$

여기서, $B_2 = M^{-1}(x_1)$

2. PD-슬라이딩 모드 복합 제어기의 적용

우선, 추적 오차벡터를 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1d} - x_1 \\ x_{2d} - x_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

여기서, $x_{1d}$와 $x_{2d}$는 바람직한 상태벡터이다.

1) PD 제어기의 설계

$$u = K_p e_1 + K_d e_2, \ \text{if} \ s \in \Omega_1 \tag{30}$$

여기서, $K_p$와 $K_d$는 다음과 같은 형태이고, $\Omega_1$에서 최대 성능을 발휘하는 값으로 선정한다.

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{P1} & 0 \\ 0 & k_{P2} \end{bmatrix}, \ K_d = \begin{bmatrix} k_{D1} & 0 \\ 0 & k_{D2} \end{bmatrix}$$

2) 반-연속 슬라이딩 모드 제어기의 설계

슬라이딩 면을 다음과 같이 정의한다.

$$s(x, t) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = G_1 e_1 + G_2 e_2 \tag{31}$$

여기서, 행렬 $G_1$과 $G_2$는 설계단계에서 선정되는 설계 파라미터이다.

$$G_1 = \begin{bmatrix} g1_{11} & 0 \\ 0 & g1_{22} \end{bmatrix}, \ G_2 = \begin{bmatrix} g2_{11} & 0 \\ 0 & g2_{22} \end{bmatrix} \tag{32}$$

그리고, $g1_{11}$, $g1_{22}$, $g2_{11}$, $g2_{22}$는 양의 상수이다. 앞에서 유도한 제어법칙 (23)를 본 플랜트에 적용하면 다음과 같다.

$$u = u^n_{eq} + (G_2 M^{-1})^{-1} Ds + K\,\mathrm{sat}(s), \ \text{if} \ s \in \Omega_2 \tag{33}$$

여기서, $u^n_{eq} = (G_2 M^{-1})^{-1}[G_1 \dot{e}_1 + G_2(\dot{x}_{2d} + M^{-1}V)]$

그리고,

$$\lambda_{\min}(D) + K > \lambda_{\max}(B_2)\delta\|s\|^{-1} + \varepsilon\|s\|^2$$

$$\delta \geq \|F\|_{\max}$$

## V. 실험

본 절에서는 본 논문에서 제안한 PD-슬라이딩 모드 복합 제어기(PD-SMC)와 반-연속 슬라이딩 모드 제어기(SC-SMC), PD 제어기(PDC)를 2관절 스카라형 로봇 매니퓰레이터에 적용하여 실험을 수행하고 제어특성을 비교 분석하였다. 그림 3은 로봇 매니퓰레이터 제어시스템에 대한 실험 장치의 개략도이다.

실험에 사용된, 매니퓰레이터의 파라미터들은 신호압축법(signal compression method)[13]을 이용하여 구했으며, 실험 조건은 다음과 같다.

1) 초기조건

$$\theta_0 = [0 \ 0]^T$$
$$\dot{\theta}_0 = [0 \ 0]^T$$

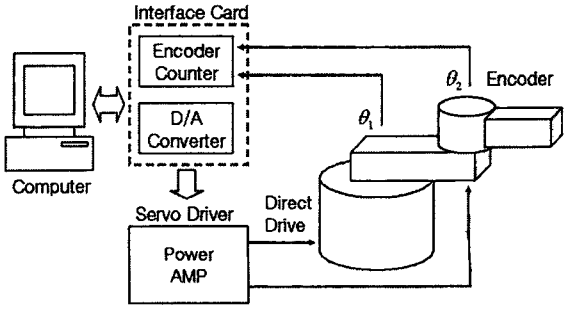



그림 3. 실험장치의 개략도.
Fig. 3. Schematic diagram of the experimental device.

표 1. 모터 사양.
Table 1. Specifications of motors.

| 항 목 | 1축 | 2축 |
|---|---|---|
| 모델 | DM1150A | DM1030B |
| 최대 회전력(Nm) | 150 | 30 |
| 최대 회전속도(rps) | 0.5 | 2.0 |
| 엔코더 분해능(pul/rev) | 1024000 | 655360 |

2) 공칭 모델: 탑재하중 0kg 기준

3) 강인성 실험: 탑재하중을 0~10kg까지 1kg씩 증가

인터페이스 카드에는 12비트 분해능의 2채널 D/A 변환기와 24비트의 엔코더 카운터 2채널이 탑재되어 있으며, 모터는 Parker사 제품으로, 다이렉트 드라이브 형태이고, 사양은 표 1과 같다.

수치적으로 미분하여 구한 속도신호에서 잡음에 대한 민감성을 줄이기 위하여 2차 버터워스(Butterworth) 저역통과필터를 사용하였으며, 필터의 전달 함수 $H(z)$는 다음과 같다.

$$H(z)=\frac{0.0675+0.1349z^{-1}+0.0675z^{-2}}{1-1.1430z^{-1}+0.4128z^{-2}} \tag{34}$$

실험에 사용된 제어기법들의 설계파라미터들은 다음과 같으며, 이 제어 파라미터들은 모델 불확실성의 크기를 고려하여 시행착오적으로 최대의 추적성능을 나타내는 값을 선정하였다.

1) PD-SMC의 설계 파라미터

PD 제어기:

$$K_p=\begin{bmatrix}1350 & 0\\ 0 & 320\end{bmatrix},\ K_d=\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 22\end{bmatrix}$$

$s_0=0.05,\ \Delta=0.7$

SMC 제어기:

$$G_1=\begin{bmatrix}40 & 0\\ 0 & 30\end{bmatrix},\ G_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}50 & 0\\ 0 & 110\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

2) SC-SMC의 설계 파라미터

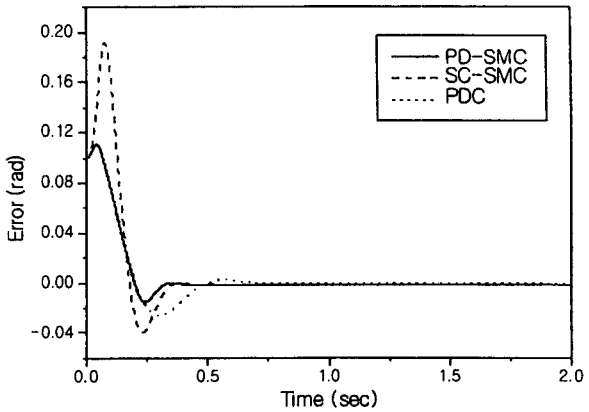
$$G_1=\begin{bmatrix}40 & 0\\ 0 & 30\end{bmatrix},\ G_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}50 & 0\\ 0 & 110\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

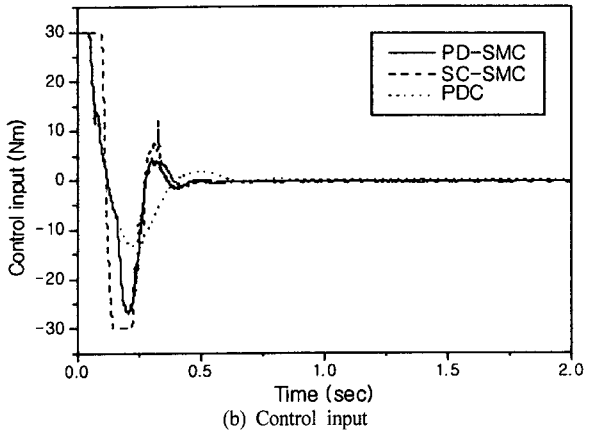
3) PDC의 설계 파라미터

$$K_p=\begin{bmatrix}1350 & 0\\ 0 & 320\end{bmatrix},\ K_d=\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 22\end{bmatrix}$$

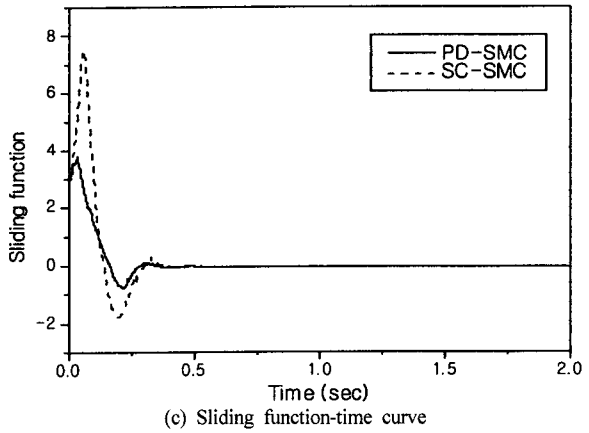
스카라 로봇의 특징상 관절 2의 성능이 관절 1 보다 중요하므로 관절 2의 제어성능에 대해 자세히 언급한다. 그림 4는 탑재하중이 10kg일 때 계단파 입력에 대한 추적오차, 제어입력, 슬라이딩 함수의 궤적을 나타낸다. 추적오차는 예상대로 전 영역에 걸쳐서 PD-SMC가 가장 우수하다. 제어입력은 PDC가 가장 적은 에너지를 소모하고, PD-SMC의 경우 예상대로 SC-SMC에 비해서 많이 개선되었으나, PD에 비해서 많은 에너지가 소모된다. PD-SMC와 SC-SMC 모두 채터링은 일어나지 않는다. 슬라이딩 함수-시간 선도는 PD-SMC



(a) Tracking error



(b) Control input



(c) Sliding function-time curve

그림 4. 계단파 입력에 대한 관절2의 실험결과.
Fig. 4. Experimental results of the step responses of the link 2.

가 작은 오버슈트와 언더슈트를 가지고 보다 빨리 슬라이딩 면에 접근함을 알 수 있다. 그림 4(b)에서 제어입력의 초기값이 30Nm로 보이는 것은 오차계산의 알고리즘 특징 때문이며, 실제는 매니퓰레이터의 초기 위치가 0이므로 0에서 시작하여 1회 샘플링 시간이 지난 후 30Nm로 급격하게 증가한다.

그림 5와 6은 로봇의 끝에 질량 1kg에서 10kg까지의 질량을 매달고 계단파 입력에 대해 강인 성능을 실험한 결과이다. 이 실험결과에서 PD-SMC 복합제어기는 과도영역에서 PDC와 같은 성능이 나타나고 슬라이딩 모드 영역에서는 슬라이딩 모드로 변환될 때 시스템의 상태가 SC-SMC의 시스

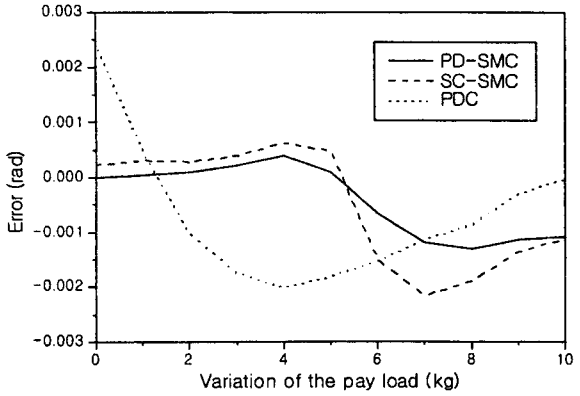



그림 5. 탑재하중의 변화에 따른 링크 2의 정상상태오차.
Fig. 5. Steady state error of the link 2 with the pay load variation.

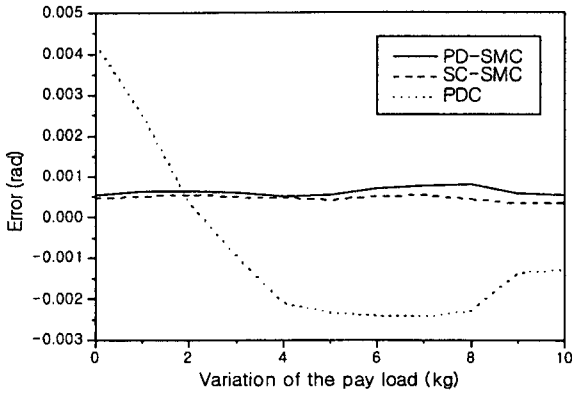



그림 6. 탑재하중의 변화에 따른 링크 1의 정상상태오차.
Fig. 6. Steady state error of the link 1 with the pay load variation.

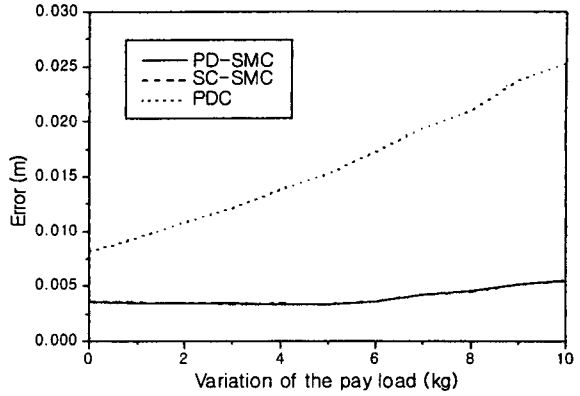



그림 7. 탑재하중의 변화에 따른 원궤적의 최대 추적오차.
Fig. 7. Maximum tracking error of the circular locus with the pay load variation.

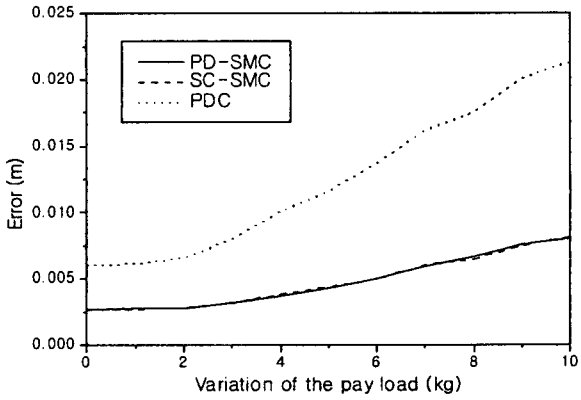



그림 8. 탑재하중의 변화에 따른 직선 궤적의 최대 추적오차.
Fig. 8. Maximum tracking error of the straight line locus with the pay load variation.

템 상태 보다 슬라이딩 면에 더 근접해 있기 때문에 성능이 더욱 우수하게 되어 본 제어기의 성능은 전 영역에서 아주 우수한 성능을 발휘함을 알 수 있다. 지면 관계상 여러 가지 슬라이딩 모드 제어기에 대한 실험결과를 보여줄 수는 없으나 경계층 SMC나 연속 SMC는 SC-SMC 보다 성능이 더 떨어진다. 그리고 탑재하중이 0인 경우 실험결과, 제어 성능차이는 거의 무시할 수 있는 수준이며, 실험결과는 지면 관계로 생략하였다.

그림 7은 직교좌표 상의 점 (0.0, 0.4)를 중심으로 하고 반지름 0.1m, 각속도 $2\pi$ rad/s로 회전하는 운동에 대한 궤적의 최대오차를 부하하중의 변동에 대하여 나타낸다. PD-SMC와 SC-SMC의 추적오차의 차이는 거의 없다. 그림 8은 직교좌표 상의 점 (0.4, -0.4)에서 점 (0.4, 0.4)로 0.8m/s의 속도로 정속 이동하는 직선궤도의 최대오차를 나타낸 것으로, 원궤적과 같이 PD-SMC와 SC-SMC간의 추적오차 차이는 거의 없다. 이 결과로부터 제어명령 신호의 도함수의 크기가 작으면 PD-SMC와 SC-SMC의 제어성능 차이는 거의 없으나 큰 경우에는 PD-SMC가 아주 우수함을 알 수 있다.

이상의 실험결과를 통하여 PD-SMC와 SC-SMC의 장단점을 살펴보면, 두 제어기법 모두 채터링은 발생되지 않으며 우수한 추적성능을 가진다. 그러나 강인성 면에서 PD-SMC는 과도기 응답이 SC-SMC에 비해서 아주 우수하고 구동기에 필요한 에너지 소모도 SC-SMC에 비해서 아주 작음을 알 수 있다. 물론 구동기의 에너지 소모 측면에서는 PD 제어기가 아주 우수하나 성능 강인성이 좋지 못함으로 사용에 한계가 있다.

## VI. 결론

본 논문에서는 도달법칙과 Lyapunov 안정도 조건을 이용하여 유도한 채터링 없는 반-연속 슬라이딩 모드 제어기와 PD 제어기를 조합한 PD-슬라이딩 복합제어기를 제안하였다. 본 복합 제어기에서 PD제어기는 SMC의 도달 단계인 과도기에 사용하고 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 영역에서 사용한다. 본 제어기의 특징은 각 제어기의 장점이 그대로 유지되므로 전 영역에서 모델 불확실성에 대한 우수한 성능 강인성을 갖는다. 또한 시스템의 복잡성에 비해서 간단한 설계방법과 단순 스윗칭 기법을 이용하므로 적용이 아주 용이하다. 이 특징을 입증하기 위하여 본 제어기를 2축 스카라 로봇 매니퓰레이터에 적용시켜 실험을 한 결과, 그 효용성을 입증하였다.

## 참고문헌

[1] V. I. Utkin, Sliding Modes in Control and Optimization, Springer-Verlag, 1992.

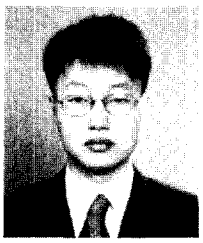
[2] K. D. Young, V. I. Utkin, and U., Ozguner, "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE Trans. on Con. Sys. Tech.*, vol. 7, no. 3, pp. 328-342, 1999.
[3] C. Edwards and S. K. Spurgeon, Sliding Mode Control : Theory and Applications, Taylor & Francis, 1999.
[4] R. A. Decarlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems : a tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 76, no. 3, pp. 212-232, 1988.
[5] J. Y. Hung and W. Gao, "Variable structure control : a survey," *IEEE Trans. on Indus. Elect.*, vol. 40, no. 3, pp. 2-22, 1993.
[6] J. Slotine and S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators," *Int. J. Control*, vol. 38, no. 2, pp. 465-492, 1983.
[7] A. G. Bondarev, S. A. Bondarev, N. E. Kostyleva, and V. I. Utkin, "Sliding mode in systems with asymptotic state observers," *Automation and Remote Control*, pp. 679-684, 1985.
[8] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai, "Chattering avoidance by second order sliding mode control," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 43, no. 2, pp. 241-246, 1998.
[9] V. I. Utkin and J. Shi, "Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions," *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 4591-4596, 1996.
[10] K. Erbatur, M. O. Kaynak, and A. Sabanovic, "A study of robustness property of sliding-mode controllers : a novel design and experimental investigation," *IEEE Trans. on Indus. Elect.*, vol. 46, no. 5, pp. 1012-1018, 1999.
[11] J. X. Xu and W. J. Cao, "Synthesized sliding mode and time delayed control for a class of uncertain systems," *Automatica*, vol. 36, pp. 1909-1914, 2000.
[12] J. Malmborg, Analysis and Design of Hybrid Control System, PhD thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1998.
[13] M. C. Lee and N. Aoshima, Microprocessor-based system identification by signal compression method, Reidel Publishing Company, pp. 81-103, 1986.

**이 규 준**

1959년 4월 26일생. 1982년 부산대 기계설계공학과 졸업. 동대학원 석사(1984). 동대학원 박사 학위 예정(2002). 1984년~현재 국방과학연구소 추진기관부 연구원. 관심분야는 가변 구조 제어, 마찰 제어, 6분력 추력 계측시스템의 설계 및 계측.

**김 종 식**

1954년 3월 30일생. 1977년 서울대 기계설계학과 졸업. 한국과학기술원 기계공학과 석사(1979). 미국 M.I.T. 기계공학과 박사(1987). 1980년~현재 부산대 기계공학부 교수. 관심분야는 차량 및 생산 시스템의 동역학 및 제어, 다변수 비선형 강인 제어.



**경 태 현**

1972년 1월 12일생. 1997년 부산대 기계설계공학과 졸업. 1997년~현재 부산대 지능기계공학과 석사과정. 관심분야는 로봇 공학, 슬라이딩 모드 제어, 컨트롤러 시스템 설계.