

# 반복계산에 의한 고유치 해석 알고리즘의 2차 뉴튼랩슨법으로의 정식화

論文

51A-3-3

## A Formulation of Iterative Eigenvalue Analysis Algorithm to the Second Order Newton Raphson Method

金 德 泳\*  
(Deok Young Kim)

**Abstract** - This paper presents an efficient improvement of the iterative eigenvalue calculation method of the AESOPS algorithm. The intuitively and heuristically approximated iterative eigenvalue calculation method of the AESOPS algorithm is transformed to the Second Order Newton Raphson Method which is generally used in numerical analysis. The equations of second order partial differentiation of external torque, terminal and internal voltages are derived from the original AESOPS algorithm. Therefore only a few calculation steps are added to transform the intuitively and heuristically approximated AESOPS algorithm to the Second Order Newton Raphson Method, while the merits of original algorithm are still preserved.

**Key Words** : Small Signal Stability, AESOPS Algorithm, Eigenvalue Analysis, Second Order Newton Raphson Method

### 1. 서 론

전력계통의 미소신호 안정도 해석을 위한 고유치 해석법으로 상태행렬을 구성하지 않고 회전자각의 진동과 관련있는 전기기계적 진동모드에 해당하는 고유치만을 선별적으로 계산하는 계산기법이 개발되었으며, AESOPS(Analysis of Essentially Spontaneous Oscillations in Power Systems) 알고리즘으로 알려져 있다. AESOPS 알고리즘은 고유치의 함수인 외부토크를 특정발전기의 회전자에 가하고 계통의 대수방정식을 반복계산하여 한 번에 하나씩 전기기계적 진동과 관련있는 고유치를 구하게 된다. AESOPS 알고리즘은 후에 보다 다양한 모델을 사용할 수 있고 계통 어드미턴스 행렬 계산시 소성(sparsity)을 최대한 살릴 수 있도록 내부 알고리즘의 일부를 개선하여 PEALS나 SSSP 프로그램에서 고유치 해석법의 하나로 사용되고 있다[1, 2]. 그러나 경험적이고 직관적인 방법으로 근사화한 변형된 Newton Raphson법을 사용하는 고유치 반복계산 알고리즘은 그대로 사용되고 있으며, 이로 인해서 간혹 특정 고유치 계산시 계산시간과 반복회수가 다른 진동모드에 비해서 크게 나타나는 현상이 보고되었다. 이러한 문제를 해결하기 위해 참고문헌 [3, 4]에서는 확대 자코비안 행렬을 사용하여 고유치 반복계산식을 Newton Raphson 법의 일반형으로 정식화하였으나 반복계산시 고유치 뿐만 아니라 상태변수에 대해서도 초기값을 선정하고 값을 재계산하는 등 계산량이 많아지게 되는 문제점이 있다. 또한 참고문헌 [5, 6]에서는 AESOPS 알고리즘을 상태공간 방정식의 일반형으로 나타내고 이로부터 고유치 계산식을 Newton Raphson의 형태로 변형하였다. 본 논문

에서는 AESOPS 알고리즘의 고유치 반복계산 방법을 보다 빠른 수렴특성을 갖는 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 변환하여 알고리즘의 효율성을 개선하고자 한다. 모델의 다양성 등 많은 장점을 갖고있는 AESOPS 알고리즘의 기본구조를 그대로 살리면서 고유치 반복계산 방법만을 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 변환하는데 필요한 관계식은 원래의 AESOPS 알고리즘으로부터 직접 유도하였다.

### 2. AESOPS 알고리즘의 고유치 반복계산 방법

전력계통의 선형 동적모델에서 하나의 발전기축에 다음과 같은 외부토크가 가해져서 강제적으로 진동하고 있는 경우를 가정한다.

$$T = T_x e^{(\sigma + j\Omega)t} \quad (1)$$

식(1)에서  $T_x$ 는 복소수이고  $\sigma + j\Omega$ 는 고유치의 초기추정값이다. AESOPS 알고리즘에서는 발전기 단자전압, 내부전압, 속도편차 그리고 외부토크  $T_x$ 를 계산한다. 이들 값을 사용하여 고유치의 추정치를 계산하고, 연속적인 고유치 추정치의 변화가 지정된 오차한계보다 작은 경우 계산을 마치게 된다.

#### 2.1 계통방정식

발전기 단자전압과 내부전압에 대한 계통의 전류방정식을 구성하고, 발전기 단자전압으로 축약한 후의 계통방정식은 다음과 같다.

$$A_{TT} e_T + R_{TG} e'' = 0 \quad (2)$$

계통의 발전기 단자수를  $T$ 라 하고 발전기 수를  $N$ 이라 하면 식(2)는  $(2T+2N)$ 개의 변수가 있고, 방정식의 수는  $2T$ 개이므로

\* 正 會 員 : 群 山 大 學 電 子 情 報 工 學 部 助 教 授 · T. 博

接 受 日 字 : 2001年 7月 26日

最 終 完 了 : 2002年 1月 8日

2N개의 방정식이 더 있어야 풀 수 있게 된다.

2.2 발전기 동적방정식

N개 발전기에 대한 2N개의 추가적인 식은 다음과 같은 발전기 동적방정식에서 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & z_{35} & a_{37} & a_{38} & a_{39} & a_{310} \\ & 1 & z_{45} & a_{47} & a_{48} & a_{49} & a_{410} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & z_{55} & & \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & z_{65} & z_{66} & \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & z_{75} & z_{76} & z_{77} & a_{78} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & z_{85} & & a_{87} & z_{88} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & z_{95} & & & z_{99} & a_{910} \\ a_{101} & a_{102} & a_{103} & a_{104} & z_{105} & & & & a_{109} & z_{1010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \\ e_R \\ e_I \\ \omega \\ V_E \\ \lambda_{FD} \\ \lambda_{SD} \\ \lambda_{FQ} \\ \lambda_{SQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_X \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

식(3)에서 a<sub>ij</sub>로 표시된 것은 실수의 원소들이며, Z<sub>ij</sub>로 표시된 것은 복소수의 원소들이다. 복소수의 원소들은 고유치 S의 함수이며, 고유치의 추정치가 변함에 따라 그 값이 달라지게 된다. 식(3)을 밑에서부터 축약하여 3개의 방정식으로 만들면 다음과 같다

$$\begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \\ e_R \\ e_I \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_X \end{bmatrix} \quad (4)$$

비구동 발전기

비구동 발전기는 외부토크가 0인 발전기를 말하며, 식(4)에서 세 번째 행은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega = -z_{55}^{-1} [a_{51}e_{TR} + a_{52}e_{TI} + a_{53}e_R + a_{54}e_I] \quad (5)$$

식(5)는 발전기의 단자전압과 내부전압을 구한 후에 발전기의 속도를 계산하는데 사용된다. 식(4)에서 세 번째 행을 ω에 대하여 치환한 후의 내부전압은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} e_R \\ e_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{31} & Y_{32} \\ Y_{41} & Y_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \end{bmatrix} \quad (6)$$

구동 발전기

구동발전기의 경우는 식(4)의 세 번째 행에서 외부토크 T<sub>X</sub>를 구하게 된다. 이 경우 외부토크 T<sub>X</sub>의 값을 지정하는 대신 구동발전기의 각속도 ω<sub>D</sub>를 1.0으로 지정하여 T<sub>X</sub>를 계산하게 된다.

$$T_X = a_{51}e_{TR} + a_{52}e_{TI} + a_{53}e_R + a_{54}e_I + z_{55}\omega_D \quad (7)$$

식(7)은 발전기 단자전압과 내부전압이 계산된 후 외부토크 T<sub>X</sub>를 계산하는데 사용되며, 이는 다시 고유치를 계산하는데 사용된다. 식(4)에서 발전기 내부전압은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} e_R \\ e_I \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_{33} & z_{34} \\ z_{43} & z_{44} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \omega_D z_{35} \\ \omega_D z_{45} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{TR} \\ e_{TI} \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

식(6)과 식(8)의 발전기 내부전압에 대한 관계식을 식(2)의 계통방정식에 치환하여 단자전압을 계산하고, 이 값을 다시 식(6)과 식(8)에 대입하여 발전기의 내부전압을 계산하게 된다.

2.3 고유치 계산과정

종래의 AESOPS 알고리즘에서 사용하는 고유치의 반복계산식은 그림 1의 발전기 동요방정식의 블록선도에서 유도되었다.

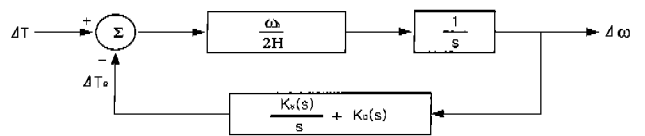


그림 1 AESOPS 알고리즘의 발전기 동요방정식 블록선도  
Fig. 1 Block diagram of generator swing equation in AESOPS algorithm

그림 1에서 토크에 대한 표현식을 구하면 다음과 같다.

$$\Delta T = \left[ \frac{2H}{\omega_o} S + K_D(S) + \frac{K_S(S)}{S} \right] \Delta \omega \quad (9)$$

식(9)에서 토크 T<sub>X</sub>의 고유치에 대한 편미분의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial S} = \left[ \frac{2H}{\omega_o} + \frac{1}{S} \frac{\partial K_S(S)}{\partial S} - \frac{1}{S^2} K_S(S) + \frac{\partial K_D(S)}{\partial S} \right] \Delta \omega \quad (10)$$

식(9)의 특성방정식 조건을 식(10)에 대입하고, K<sub>D</sub>(S), ∂K<sub>D</sub>(S)/∂S, ∂K<sub>S</sub>(S)/∂S가 작다고 가정하여 다음과 같은 직관적이고도 경험적인 방법으로 근사화된 고유치 반복계산식이 사용된다.

$$S_{n+1} \approx S_n - \left[ \frac{\Delta T(S)}{4H \frac{\Delta \omega}{\omega_o}} \right], \text{ 단 } H = \sum_{i=1}^{N_n} H_i \frac{|\Delta \omega_i|^2}{\omega_o^2} \quad (11)$$

3. 2차 뉴튼랩슨법으로의 변환

비선형 연립방정식을 해석하기 위한 수치해석 방법 중에서 2차 뉴튼랩슨법은 일차 뉴튼랩슨법보다 일반적으로 보다 적은 계산으로 해에 가까운 값을 계산할 수 있어서 수렴속도가 빠르다는 장점을 갖는다. 본 절에서는 고유치 반복계산과정을 개선하기 위한 방법으로 AESOPS 알고리즘의 고유치 반복계산 방법을 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 변환하고자 한다. 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 나타낸 고유치 반복계산식은 다음과 같다.

$$S_{n+1} = S_n - \left\{ \frac{T_X}{\frac{\partial T_X}{\partial s} - \left[ \frac{\frac{\partial^2 T_X}{\partial s^2} T_X}{2 \frac{\partial T_X}{\partial s}} \right]} \right\} \quad (12)$$

식(12)에서 AESOPS 알고리즘의 고유치 계산과정을 2차 뉴턴랩슨법의 형태로 정식화하기 위해서는 외부토크의 고유치에 대한 일차, 이차 편미분 값이 추가로 필요하다. 본 논문에서는 원래의 AESOPS 알고리즘에서 발전기의 동적방정식을 구하는데 사용하는 그림 2의 회전자 블록선도로부터 2차 뉴턴랩슨법을 사용하여 고유치 반복계산을 하는데 필요한 관련식들을 유도하였다.

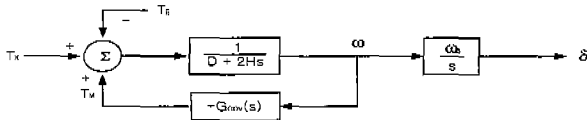


그림 2 2차 뉴턴랩슨법으로의 정식화에 사용한 발전기 동요방정식의 블록선도

Fig. 2 Block diagram of generator swing equation for second order Newton Raphson Method

그림 2에서 전기적 토크를 치환한 후의 외부토크 방정식은 다음과 같다.

$$a_{51}e_{TR} + a_{52}e_{TI} + a_{53}e_{R}'' + a_{54}e_{I}'' + [G_{Gov}(s) + D + 2HS] \omega = T_X \quad (13)$$

식(13)에서 계수  $a_{51}$ ,  $a_{52}$ ,  $a_{53}$ ,  $a_{54}$ 는 고유치와는 관계없는 상수값이며, 따라서 외부토크  $T_X$ 의 고유치에 대한 일차, 이차 편미분 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T_X}{\partial S} = a_{51} \frac{\partial e_{TR}}{\partial S} + a_{52} \frac{\partial e_{TI}}{\partial S} + a_{53} \frac{\partial e_{R}''}{\partial S} + a_{54} \frac{\partial e_{I}''}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial S} [G_{Gov}(s) + D + 2HS] \omega_D \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 T_X}{\partial S^2} = a_{51} \frac{\partial^2 e_{TR}}{\partial S^2} + a_{52} \frac{\partial^2 e_{TI}}{\partial S^2} + a_{53} \frac{\partial^2 e_{R}''}{\partial S^2} + a_{54} \frac{\partial^2 e_{I}''}{\partial S^2} + \frac{\partial^2}{\partial S^2} [G_{Gov}(s) + D + 2HS] \omega_D \quad (15)$$

식(14), (15)에서 외부토크의 고유치에 대한 일차, 이차 편미분 값을 구하기 위해서는 발전기의 단자전압과 내부전압의 일차, 이차 편미분 값을 구하기 위한 관계식이 필요함을 알 수 있다.

### 3.1 외부토크의 고유치에 대한 일차 편미분 식

#### 3.1.1 계통방정식

식(2)의 계통방정식에서 어드미턴스 행렬인  $A_{TT}$  행렬과  $R_{TG}$  행렬은 고유치와 무관한 상수행렬이며, 고유치에 대한 일차 편미분 식은 다음과 같다.

$$[A_{TT}] \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{TR}}{\partial S} \\ \frac{\partial e_{TI}}{\partial S} \end{bmatrix} + [R_{TG}] \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{R}''}{\partial S} \\ \frac{\partial e_{I}''}{\partial S} \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

### 3.1.2 발전기 동적방정식

발전기 동적방정식인 식(3)에서 상태변수의 계수행렬은 단지 14개의 요소만이 고유치와 관련이 있으며 나머지는 고유치와는 관계없는 상수이다. 고유치에 대한 발전기 동적방정식의 편미분 식은 다음과 같다.

$$\left[ \frac{\partial A_D}{\partial S} \right] [X] + [A_D] \left[ \frac{\partial X}{\partial S} \right] = \left[ \frac{\partial F}{\partial S} \right] \quad (17)$$

식(17)에서 왼쪽 첫 번째 항의  $[\partial A_D / \partial S]$ 는 식(3)의 상태변수의 계수행렬의 고유치에 대한 미분항이며, 이때 0이 아닌 14개의 행렬요소들의 고유치에 대한 편미분 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} z_{35}' &= \frac{A_R \omega_B}{(\sigma + j\Omega)^2}, \quad z_{45}' = \frac{-A_I \omega_B}{(\sigma + j\Omega)^2}, \quad z_{55}' = 2H + G_{GOV}(s)' \\ z_{65}' &= -[T_R G_{BSS}(s) + (1 + s T_R) G_{PSS}(s)'], \quad z_{66}' = T_R \\ z_{75}' &= -\frac{C_{3D} \omega_B I_{Q0}}{(\sigma + j\Omega)^2}, \quad z_{76}' = -G_{exc}(s)', \quad z_{77}' = T_{FD0} \\ z_{85}' &= -\frac{C_{5D} \omega_B I_{Q0}}{(\sigma + j\Omega)^2}, \quad z_{88}' = T_{SD0}, \quad z_{95}' = \frac{C_{3Q} I_{D0} \omega_B}{(\sigma + j\Omega)^2} \\ z_{99}' &= T_{FQ0}, \quad z_{105}' = \frac{C_{5Q} I_{D0} \omega_B}{(\sigma + j\Omega)^2}, \quad z_{1010}' = T_{SQ0} \end{aligned} \quad (18)$$

식(17)에서 왼쪽 첫 번째 항의 상태변수  $[X]$ 의 값은 발전기의 단자전압과 내부전압을 구한 후 식(3)으로부터 구할 수 있다. 단자전압과 내부전압을 계산한 후 나머지 상태변수를 구하기 위한 관계식은 다음과 같다.

$$\omega = 1.0 : \text{구동발전기}$$

$$\omega = -Z_{55}^{-1}(a_{51}e_{TR} + a_{52}e_{TI} + a_{53}e_{R}'' + a_{54}e_{I}'') : \text{비구동발전기}$$

$$V_E = -z_{66}^{-1}(a_{61}e_{TR} + a_{62}e_{TI} + a_{63}e_{R}'' + a_{64}e_{I}'' + z_{65}\omega)$$

$$\lambda_{FD} = (a_{78}a_{87} - z_{77}z_{88})^{-1}$$

$$\times \left[ \begin{array}{c} -a_{78}(a_{81}e_{TR} + a_{82}e_{TI} + a_{83}e_{R}'' + a_{84}e_{I}'' + z_{85}\omega) \\ + z_{88}(a_{71}e_{TR} + a_{72}e_{TI} + a_{73}e_{R}'' + a_{74}e_{I}'' + z_{75}\omega + z_{76}V_E) \end{array} \right]$$

$$\lambda_{SD} = (a_{87}a_{78} - z_{77}z_{88})^{-1}$$

$$\times \left[ \begin{array}{c} -a_{87}(a_{71}e_{TR} + a_{72}e_{TI} + a_{73}e_{R}'' + a_{74}e_{I}'' + a_{75}\omega + z_{76}V_E) \\ + z_{77}(a_{81}e_{TR} + a_{82}e_{TI} + a_{83}e_{R}'' + a_{84}e_{I}'' + z_{85}\omega) \end{array} \right]$$

$$\lambda_{FQ} = (a_{910}a_{109} - z_{99}z_{1010})^{-1}$$

$$\times \left[ \begin{array}{c} -a_{910}(a_{101}e_{TR} + a_{102}e_{TI} + a_{103}e_{R}'' + a_{104}e_{I}'' + z_{105}\omega) \\ + z_{1010}(a_{91}e_{TR} + a_{92}e_{TI} + a_{93}e_{R}'' + a_{94}e_{I}'' + z_{95}\omega) \end{array} \right]$$

$$\lambda_{SQ} = (a_{910}a_{109} - z_{99}z_{1010})^{-1}$$

$$\times \left[ \begin{array}{c} -a_{109}(a_{91}e_{TR} + a_{92}e_{TI} + a_{93}e_{R}'' + a_{94}e_{I}'' + z_{95}\omega) \\ + z_{99}(a_{101}e_{TR} + a_{102}e_{TI} + a_{103}e_{R}'' + a_{104}e_{I}'' + z_{105}\omega) \end{array} \right] \quad (19)$$

또한 식(17)의 우변의  $[\partial F / \partial S]$ 는 다음과 같다.

$$[\partial F / \partial S] = [0 \ 0 \ T_X' \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (20)$$

식(17)의 첫 번째 항의 상태변수를 위에서 구한 값으로 대치하고 이를 방정식의 우변으로 이항하여 정리하면 다음과 같다.

$$[A_D] \left[ \frac{\partial X}{\partial s} \right] = \left[ \frac{\partial F_D}{\partial s} \right] \quad (21)$$

식(21)에서  $A_D$  행렬은 식(3)의 계수행렬과 같으며, 앞에서와 같은 방법으로 다섯 개의 변수로 구성된 3개의 방정식으로 축약할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} z_{31}' & z_{32}' & z_{33}' & z_{34}' & z_{35}' \\ z_{41}' & z_{42}' & z_{43}' & z_{44}' & z_{45}' \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{TR}}{\partial s} \\ \frac{\partial e_{TI}}{\partial s} \\ \frac{\partial e_R}{\partial s} \\ \frac{\partial e_I}{\partial s} \\ \frac{\partial \omega}{\partial s} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial F_{DSub}}{\partial s} \right] \quad (22)$$

식(22)에서  $[\partial F_{DSub}/\partial S]$ 는 축약후의  $[\partial F_D/\partial S]$  행렬을 나타낸다.

### 비구동 발전기

비구동 발전기의 외부토크는 0이며, 식(22)의 세 번째 행은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = -z_{55}^{-1} \left[ a_{51} \frac{\partial e_{TR}}{\partial s} + a_{52} \frac{\partial e_{TI}}{\partial s} + a_{53} \frac{\partial e_R}{\partial s} + a_{54} \frac{\partial e_I}{\partial s} - \frac{\partial F_{DSub}(3)}{\partial s} \right] \quad (23)$$

식(23)에서  $\partial F_{DSub}(3)/\partial S$ 는  $[\partial F_{DSub}/\partial S]$  행렬의 세 번째 행의 요소를 나타낸다. 식(22)의 첫 번째 행과 두 번째 행의 상태변수  $\partial \omega/\partial S$ 를 식(23)으로 치환한 후의 발전기 내부전압에 대한 편미분 식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial e_R}{\partial s} \\ \frac{\partial e_I}{\partial s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix}^{-1} \times \left\{ \begin{bmatrix} Y_{31} & Y_{32} \\ Y_{41} & Y_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{TR}}{\partial s} \\ \frac{\partial e_{TI}}{\partial s} \end{bmatrix} - \left[ \frac{\partial F_{DSub}}{\partial s} \right] \right\} \quad (24)$$

식(24)에서  $\partial F_{DSub}'/\partial S$ 는 식(22)의 첫 번째 행과 두 번째 행의  $\partial \omega/\partial S$  변수를 식(23)으로 치환 계산한 후의  $[\partial F_{DSub}/\partial S]$  행렬을 나타낸다

### 구동 발전기

구동발전기의 경우 외부토크의 고유치에 대한 일차 편미분 식은 식(14)와 같으며, 발전기 내부전압의 일차 편미분 식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial e_R}{\partial s} \\ \frac{\partial e_I}{\partial s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_{33}' & z_{34}' \\ z_{43}' & z_{44}' \end{bmatrix}^{-1} \times \left\{ \begin{bmatrix} \omega_D z_{35}' \\ \omega_D z_{45}' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{31}' & z_{32}' \\ z_{41}' & z_{42}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial e_{TR}}{\partial s} \\ \frac{\partial e_{TI}}{\partial s} \end{bmatrix} - \left[ \frac{\partial F_{DSub}'}{\partial s} \right] \right\} \quad (25)$$

비구동 발전기와 구동 발전기에서의 발전기 내부전압의 고유치에 대한 편미분 식인 식(24)와 식(25)를 계통방정식의 고유치에 대한 일차 편미분 식인 식(16)에 대입하면 발전기 단자전압의 고유치에 대한 일차 편미분 값을 구할 수 있다. 또한 발전기 단자전압의 일차 편미분 값을 식(24)와 식(25)에 다시 대입하면 발전기 내부전압의 일차 편미분 값을 구할 수 있게 된다.

## 3.2 외부토크의 고유치에 대한 이차 편미분 식

### 3.2.1 계통방정식

식(2)에서 계통방정식의 고유치에 대한 이차 편미분 식은 다음과 같다.

$$[A_{TT}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_{TR}}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 e_{TI}}{\partial s^2} \end{bmatrix} + [R_{TC}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_R''}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 e_I''}{\partial s^2} \end{bmatrix} = 0 \quad (26)$$

### 3.2.2 발전기 동적방정식

식(3)의 발전기 동적방정식에서 고유치에 대한 이차 편미분 식은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_D}{\partial s^2} \end{bmatrix} [X] + 2 \left[ \frac{\partial A_D}{\partial s} \right] \left[ \frac{\partial X}{\partial s} \right] + [A_D] \left[ \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right] = \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right] \quad (27)$$

식(27)에서 왼쪽의 첫 번째 항의  $[\partial^2 A_D/\partial S^2]$ 은 식(3)의 상태변수의 계수행렬의 고유치에 대한 이차 편미분을 나타내며, 이때 0이 아닌 9개의 행렬요소의 값은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} z_{35}'' &= - \frac{2A_R \omega_B}{(\sigma + j\Omega)^3} \\ z_{45}'' &= - \frac{2A_I \omega_B}{(\sigma + j\Omega)^3} \\ z_{55}'' &= G_{GOV}(s)'' \\ z_{65}'' &= - [2T_R G_{PSS}(s)' + (1 + ST_R) G_{PSS}(s)'] \\ z_{75}'' &= \frac{2C_3 D \omega_B I_Q}{(\sigma + j\Omega)^3} \\ z_{76}'' &= - G_{exc}(s)'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{85}'' &= \frac{2C_{5D}\omega_B I_{Q0}}{(\sigma + j\Omega)^3} \\ z_{95}'' &= -\frac{2C_{3Q}I_{D0}\omega_B}{(\sigma + j\Omega)^3} \\ z_{105}'' &= -\frac{2C_{5Q}I_{D0}\omega_B}{(\sigma + j\Omega)^3} \end{aligned} \quad (28)$$

식(27)에서 상태변수[X]의 값과  $[\partial A_D/\partial S]$ 는 앞의 식(17)과 식(18)에서 구한 것과 같다. 상태변수의 고유치에 대한 일차 편미분 값인  $[\partial X/\partial S]$ 는 식(22)로 축약하기 전의 식(21)로부터 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$\omega' = 0.0$  : 구동 발전기

$$\omega' = -Z_{55}^{-1}(a_{51}e_{TR}' + a_{52}e_{TI}' + a_{53}e_{R}' + a_{54}e_I' - F_{D5})$$

: 비구동 발전기

$$V_E' = -z_{66}^{-1}(a_{61}e_{TR}' + a_{62}e_{TI}' + a_{63}e_{R}' + a_{64}e_I' + z_{65}\omega' - F_{D6})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{FD}' &= (a_{78}a_{87} - z_{77}z_{88})^{-1} \\ &\times \left[ \begin{array}{l} -a_{78}(a_{81}e_{TR}' + a_{82}e_{TI}' + a_{83}e_{R}' + a_{84}e_I' + z_{85}\omega' - F_{D8}) \\ + z_{88}(a_{71}e_{TR}' + a_{72}e_{TI}' + a_{73}e_{R}' + a_{74}e_I' \\ + z_{75}\omega + z_{76}V_E' - F_{D5}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{SD}' &= (a_{87}a_{78} - z_{77}z_{88})^{-1} \\ &\times \left[ \begin{array}{l} -a_{87}(a_{71}e_{TR}' + a_{72}e_{TI}' + a_{73}e_{R}' + a_{74}e_I' \\ + a_{75}\omega' + z_{76}V_E' - F_{D8}) \\ + z_{77}(a_{81}e_{TR}' + a_{82}e_{TI}' + a_{83}e_{R}' + a_{84}e_I' + z_{85}\omega' - F_{D5}) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{FQ}' &= (a_{910}a_{109} - z_{99}z_{1010})^{-1} \\ &\times \left[ \begin{array}{l} -a_{910}(a_{101}e_{TR}' + a_{102}e_{TI}' + a_{103}e_{R}' + a_{104}e_I' \\ + z_{105}\omega' - F_{D8}) \\ + z_{1010}(a_{91}e_{TR}' + a_{92}e_{TI}' + a_{93}e_{R}' + a_{94}e_I' + z_{95}\omega' - F_{D1}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{SQ}' &= (a_{910}a_{109} - z_{99}z_{1010})^{-1} \\ &\times \left[ \begin{array}{l} -a_{109}(a_{91}e_{TR}' + a_{92}e_{TI}' + a_{93}e_{R}' + a_{94}e_I' + z_{95}\omega' - F_{D1}) \\ + z_{99}(a_{101}e_{TR}' + a_{102}e_{TI}' + a_{103}e_{R}' + a_{104}e_I' + z_{105}\omega' - F_{D8}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

식(29)에서  $F_{Di}$ 는 식(21)의  $[F_D]$  행렬의  $i$ 번째 행을 나타내며, " ' " 기호는 상태변수의 고유치에 대한 일차 편미분을 의미한다. 식(29)에서  $[F_D]$  행렬의 요소  $F_{Di}$ 는 식(21)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{D1} &= -(z_{35}'\omega) \\ F_{D2} &= -(z_{45}'\omega) \\ F_{D3} &= T_X' - (z_{55}'\omega) \\ F_{D4} &= -(z_{65}'\omega + z_{66}'V_E) \\ F_{D5} &= -(z_{75}'\omega + z_{76}'V_E + z_{77}'\lambda_{FD}) \\ F_{D6} &= -(z_{85}'\omega + z_{88}'\lambda_{SD}) \\ F_{D7} &= -(z_{95}'\omega + z_{99}'\lambda_{FQ}) \\ F_{D8} &= -(z_{105}'\omega + z_{1010}'\lambda_{SQ}) \end{aligned} \quad (30)$$

또한 우변의  $[\partial^2 F/\partial S^2]$  행렬은 다음과 같다.

$$\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \right] = [0 \ 0 \ T_X'' \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (31)$$

식(28)과 식(29)의  $[\partial A_D/\partial S]$  행렬값 그리고 상태변수 [X]의 값을 식(27)에 대입하여 우변으로 정리하면 다음과 같다.

$$[A_D] \left[ \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} \right] = \left[ \frac{\partial^2 F_D}{\partial S^2} \right] \quad (32)$$

식(32)에서  $A_D$  행렬은 식(3), 식(21)에서와 같으며 앞에서와 같은 방법으로 5개의 변수로 구성된 3개의 방정식으로 된다.

$$\begin{bmatrix} z_{31}' & z_{32}' & z_{33}' & z_{34}' & z_{35}' \\ z_{41}' & z_{42}' & z_{43}' & z_{44}' & z_{45}' \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & z_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial^2 e_{TR}/\partial^2 S \\ \partial^2 e_{TI}/\partial^2 S \\ \partial^2 e_R/\partial^2 S \\ \partial^2 e_I/\partial^2 S \\ \partial^2 \omega/\partial^2 S \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial^2 F_{DSub}}{\partial S^2} \right] \quad (33)$$

식(33)에서  $[\partial^2 F_{DSub}/\partial S^2]$ 은 축약후의  $[\partial^2 F_D/\partial S^2]$  행렬을 나타낸다.

### 비구동 발전기

비구동 발전기의 외부토크는 0이며, 따라서 식(33)에서 세 번째 행의 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial S^2} &= -z_{55}^{-1} \left[ a_{51} \frac{\partial^2 e_{TR}}{\partial S^2} + a_{52} \frac{\partial^2 e_{TI}}{\partial S^2} + a_{53} \frac{\partial^2 e_R}{\partial S^2} \right. \\ &\quad \left. + a_{54} \frac{\partial^2 e_I}{\partial S^2} - \frac{\partial^2 F_{DSub}(3)}{\partial S^2} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

식(34)에서  $\partial^2 F_{DSub}(3)/\partial S^2$ 는  $[\partial^2 F_{DSub}/\partial S^2]$  행렬의 세 번째 행의 요소를 나타낸다. 식(33)의 첫 번째 행과 두 번째 행의 상태변수  $\partial^2 \omega/\partial S^2$ 을 식(34)로 치환한 후의 발전기 내부전압의 고유치에 대한 이차 편미분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_R}{\partial S^2} \\ \frac{\partial^2 e_I}{\partial S^2} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix}^{-1} \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} Y_{31} & Y_{32} \\ Y_{41} & Y_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_{TR}}{\partial S^2} \\ \frac{\partial^2 e_{TI}}{\partial S^2} \end{bmatrix} - \left[ \frac{\partial^2 F_{DSub}}{\partial S^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

식(35)에서  $\partial^2 F_{DSub}/\partial S^2$ 는 식(33)의 첫 번째 행과 두 번째 행의  $\partial \omega/\partial S$  변수를 식(34)로 치환 계산한 후의  $[\partial^2 F_{DSub}/\partial S^2]$  행렬을 나타낸다.

### 구동 발전기

구동 발전기의 경우 외부토크의 고유치에 대한 이차 편미분 식은 식(15)와 같으며, 발전기 내부전압의 이차 편미분 방정식은 식(33)의 첫 번째 행과 두 번째 행으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_R}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 e_I}{\partial s^2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_{33} & z_{34} \\ z_{43} & z_{44} \end{bmatrix}^{-1} \times \left\{ \begin{bmatrix} \omega_D z_{35} \\ \omega_D z_{45} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} \\ z_{41} & z_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 e_{TR}}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2 e_{TI}}{\partial s^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F_{DSub}}{\partial s^2} \end{bmatrix} \right\} \quad (36)$$

비구동 발전기와 구동 발전기에서의 발전기 내부전압의 고유치에 대한 이차 편미분 방정식인 식(35)와 식(36)을 계통방정식의 고유치에 대한 이차 편미분 식인 식(26)에 대입하면 발전기 단자전압의 이차 편미분 값을 구할 수 있다. 또한 발전기 단자전압의 이차 편미분 값을 식(35)와 식(36)에 다시 대입하여 발전기 내부전압의 고유치에 대한 이차 편미분 값을 구할 수 있게 된다.

3.1절과 3.2절의 단자전압과 내부전압의 일차, 이차 편미분식을 외부토크의 고유치에 대한 일차, 이차 편미분 식인 식(14), (15)에 대입하면 식(12)와 같은 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 고유치 반복계산식을 변환하게 된다.

4. 사례연구

New England 계통은 10대의 발전기와 39모선 그리고 46선로로 구성된 계통이다. 계통의 규모가 크지 않아서 전체적인 해석이 가능하며, 대형계통의 동적특성을 가지고 있는 계통이라 할 수 있다. 그림 3에 New England 계통의 계통도를 나타내었다.

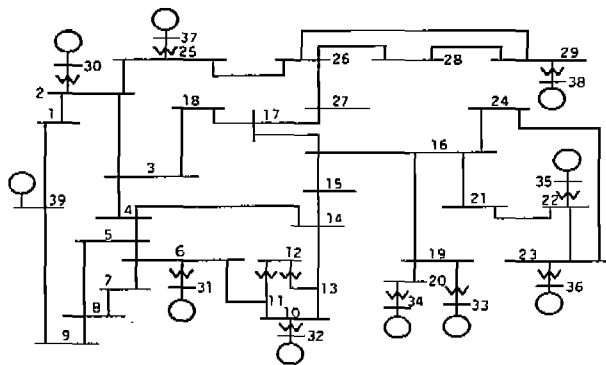


그림 3 New England 계통의 구조도  
Fig. 3 Diagram of New England System

반복계산에서의 고유치 초기값과 외부토크를 인가할 발전기를 선정하기 위하여 참고문헌[7]에서 제시한 방법을 사용하였다. 상대행렬의 부분행렬로부터 구한 9개의 전기기계적 진동모드의 초기값을 표 1에 나타내었다.

표 1 New England 계통의 부분행렬 고유치 계산결과  
Table 1 Eigenvalue analysis of sub-matrix in New England System

진동 모드	고유치		주파수
	실수부	허수부	
1	-0.0424076	4.1689224	0.6635
2	-0.0740309	9.8433663	1.5666
3	-0.0621902	9.6511656	1.5360
4	-0.0910078	9.2854848	1.4778
5	-0.0775798	5.9616015	0.9488
6	-0.0652231	6.5415650	1.0411
7	-0.0579864	8.1348070	1.2946
8	-0.0751864	7.9815310	1.2703
9	-0.0680086	7.2384584	1.1520

표 1의 고유치 초기값을 AESOPS 알고리즘과 2차 뉴튼랩슨법에 의한 고유치 해석시 초기값으로 사용하였다. 이때 고유벡터로부터 고유치에 대한 각 발전기의 참여인수를 계산하여 가장 큰 값을 갖는 발전기의 회전자에 해당 고유치의 함수로 표현되는 외부토크로 주입하였다. 고유치 계산은 원래의 AESOPS 알고리즘의 반복계산식을 사용한 경우와 2차 뉴튼랩슨법을 사용한 경우의 해석결과와 반복회수를 표 3에 나타내었다. 이때 반복계산에서의 허용오차는 10<sup>-5</sup>으로 하였다.

표 2 New England 계통의 고유치 계산결과 비교  
Table 2 Comparison of eigenvalues in two analysis algorithms

진동 모드	AESOPS 알고리즘				2차 뉴튼랩슨법			
	계산 시간	고유치		계산 시간	고유치			
	반복 회수	실수부	허수부	반복 회수	실수부	허수부		
1	0.464 sec	-0.298461	3.883876	0.412 sec	-0.298462	3.883887		
2		-0.600389	9.465404		-0.600387	9.465407		
3		-0.518362	8.747099		-0.518360	8.747094		
4		-0.535319	9.152181		-0.535320	9.152177		
5		-0.260391	5.996785		-0.260394	5.996785		
6		-0.287335	6.482605		-0.287341	6.482604		
7		-0.000114	6.990226		-0.000108	6.990222		
8		-0.403788	7.918330		-0.403789	7.928331		
9		-0.317945	7.152439		-0.317944	7.152441		

표 2에서 고유치 해석결과는 AESOPS 알고리즘의 고유치 반복계산식을 사용한 결과와 2차 뉴튼랩슨법을 사용한 결과가 정확히 일치하는 것을 알 수 있다. 반복회수는 AESOPS 알고리즘을 사용한 경우에 비해서 2차 뉴튼랩슨법을 사용한 경우의 반복회수가 크게 감소한 것을 알 수 있다. 9개의 진동모드를

구하는데 AESOPS 알고리즘을 사용한 경우는 전체 116회의 반복계산이 소요된 반면에 2차 뉴튼랩슨법을 사용한 경우는 전체 58회의 반복계산이 소요되어 반복회수가 1/2로 감소한 것을 알 수 있다. 고유치 해석에 소요되는 계산시간은 0.464 sec에서 0.412 sec로 2차 뉴튼랩슨법을 사용한 경우가 약간 감소하였으며, 이는 2차 뉴튼랩슨법을 사용한 경우는 고유치 해석과정에서의 반복계산회수는 크게 감소하는 반면에, 외부토크의 일차, 이차 편미분 값을 구하기 위한 추가의 계산과정이 필요하게 되어, 전체 계산시간은 약간 감소한 것으로 판단된다.

5. 결 론

AESOPS 알고리즘의 고유치 계산과정에서 종래에 경험적이 고도 직관적인 방법에 의해 구성하였던 반복계산식을 비선형 수치해석법인 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 변환하였다. 이때 고유치 반복계산과정의 2차 뉴튼랩슨법 형태로의 정식화에 필요한 외부토크와 단자전압 그리고 내부전압의 고유치에 대한 1차, 2차 편미분 식은 기존의 AESOPS 알고리즘에서 직접 유도하였다. 따라서, 반복계산에 의한 전기기계적 진동모드의 계산이라는 기존의 AESOPS 알고리즘의 장점은 그대로 살리면서, 단지 몇 개의 추가적인 계산단계에 의해서 직관적이 고도 경험적인 방법에 의해 구성되었던 기존 알고리즘의 고유치 반복계산식을 2차 뉴튼랩슨법의 형태로 변환하는 것이 가능하게 되었다. 사례연구 결과 AESOPS 알고리즘을 사용한 고유치 해석결과와 본 논문에서 제시한 2차 뉴튼랩슨법 형태의 고유치 반복계산에 의해 구한 해석결과가 정확히 일치하면서도, 반복회수와 계산시간면에서 본 논문에서 제시한 방법이 보다 효율적임을 알 수 있었다.

이 논문은 2002년도 군산대학교 두뇌한국21사업에 의하여 일부 지원되었음

참 고 문 헌

[1] R. T. Byerly, D. E. Sherman, and B. J. Bennon, "Phase II : frequency domain analysis of low frequency oscillations in large electric power systems", Vol. 1, 2, 3, 4, and 5, Research Project 744-1, Electric Power Research Institute, Palo Alto, California, April, 1982.

[2] EPRI, Small Signal Stability Analysis Program Package. Version. 3.0, Vol. 1, Final Report, Prepared by Ontario Hydro, Feb. 1993.

[3] N. Martin, "Efficient Eigenvalue and Frequency Response Methods Applied to Power System Small Signal Stability Studies", IEEE Transactions on Power Systems. Vol. 1, No. 1, Feb. 1986.

[4] N. Martin, H. Pinto, L. Lima, "Efficient Method for Finding Transfer Function Zeros of Power Systems, IEEE Transactions on Power Systems", Vol. 7, No. 3, Aug. 1992.

[5] P. W. Sauer, C. Rajagopalan and M. A. Pai, "An explanation and generalization of the AESOPS and PEALS algorithms", IEEE 1990 Winter Meeting, Paper No. 90 WM 293-4 PWRS, Atlanta, Georgia, 1990.

[6] D. M. Lam, H. Yee, B. Campbell, "An efficient improvements of the AESOPS algorithm for power system eigenvalue calculation", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 9, No. 4, pp.1880-1885, November 1994.

[7] 김덕영, 권세혁, "AESOPS 알고리즘의 고유치 반복계산식과 고유치 초기값 선정의 효율적인 개선에 관한 연구", 대한전기학회 논문지, 제 48권 11호, pp. 1394-1400, 1999. 11.

저 자 소 개



**김 덕 영(金 德 泳)**  
 1964년 11월 22일 생. 1988년 고려대 전기공학과 졸업. 1990년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1996년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1996년~현재 군산대학교 전자정보공학부 조교수  
 Tel : (063) 469-4746  
 E-mail : dykim@kunsan.ac.kr