Commun. Korean Math. Soc. 17 (2002), No. 1, pp. 1–14

초청논문

실정함수의 근분포에 관한 최근 결과들

기하서, 김영원

요약문. Some recent results on the distribution of zeros of real entire functions are surveyed.

제 1 절 머리말

1930 년에 발표된 논문 "초월방정식에 대한 Fourier의 업적과 관련된 몇몇 문제들"에서 Pólya는 초월함수의 근분포에 관하여 세 개의 '가설적 정리'를 제시하였는데, 이들은 모두 1822 년에 출판된 Fourier의 저서 "열이론"에 실린 어떤 대담한 논법에 관련된 것이다 [19]. 이 논문에 따르면, Fourier는 그 당시까지 다항식에 대해서만 증명되었던 de Gua의 정리를 어떤 초월함수에 적용하여 그 함수가 실근만 가짐을 증명하려고 하였다. Pólya의 가설적 정리들은 그 대담한 논법의 정당성 여부를 놓고 Fourier와 Poisson 사이에 여러 해에 걸쳐서 있었던 논의와 Pólya를 비롯한 몇몇 수학자들에 의해서 1920 년대에 확립된 어떤 정리에 바탕하고 있다. 특히 그 가운데 첫째 것은, 그 논의에서 Fourier가 마지막으로 주장했던 바의 주된 부분을 현대 수학의 용어로 다시 기술한 것으로서, Fourier의 논법을 완전히 정당화한다.

같은 논문에서, Pólya는 그 세 개의 가설적 정리 가운데 마지막 둘이 서로 동치임을 증명하였고, 또한 셋째 것을 부분적으로 증명하였다. 오늘날, Pólya의 첫째와 셋째 가설적 정리는 각각 Fourier-Pólya 예상과 Pólya-Wiman 예상으로 알려져 있다.

이 문제들은 고전해석학의 범주에 속한 것임에도 불구하고 극히 최근까지 미해결로 남아있었다. 1937 년까지는, Ålander, Pólya, Wiman 등에 의하여 몇몇 부분적인 결과들이 발표되었으나, 그 이후 1987 년까지 아무런 진전이 없었다. (논문 [7] 및 그 논문에 인용된 문헌 참조.) 그러나 Pólya의 연구실적목록에는 1937 년 이후에도 이 문제들의 해결

Received December 10, 2001.
2000 Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D20, 33C10.
Key words and phrases: linear operator, invariant subspace, transitive algebra.

과 관련된 노력의 흔적이 남아있다. ([4], [5], [19], [20], [21], [24] 참조.) 1987 년에서 1996 년 사이에 김영원, Craven, Csordas, Smith 등에 의하여 Pólya-Wiman 예상의 완전한 증명과 Fourier-Pólya 예상의 부분증명을 다룬 일련의 논문들이 발표되었다 [7], [8], [11], [12], [13], [14]. 최근(2000 년)에 저자들이 Fourier-Pólya 예상의 완전한 증명을 발표하여 Fourier의 논법이 정당함을 최초로 입증함으로써 그 논법에 관한 오랜 논의를 마감했다 [15].

우리는 이 논문에서 위에 언급한 두 예상 및 그와 관련된 몇몇 결과를 개관할 것이다: 우선 2 절에서 de Gua의 정리와 Fourier의 주장에 대해서 알아본 다음, 3 절에서 Pólya의 가설적 정리들이 무엇인가를 알아보고, 4 절과 5 절에서 각각 Pólya-Wiman 예상과 Fourier-Pólya 예상의 증명 및 그와 관련된 결과들을 개략하며, 끝으로 6 절에서는 이 결과들이 뜻하는 바가 무엇인가에 대해서 알아본다.

제 2 절 De Gua의 정리와 Fourier의 주장

실변수 실수값 함수 f가 열린구간 I에서 해석적이라고 하자. 그러면 $|f|$의 극대 및 극소점들의 집합은 I의 이산부분집합을 이룬다. 자명하게, 연이은 두 개의 극소점 사이에는 극대점이 정확히 한 개 있으며, 연이은 두 개의 극대점 사이에는 극소점이 정확히 한 개 있다. 따라서, $|f|$의 두 극소점 사이에 있는 극대 극소점의 개수는 거기에 있는 극소점의 개수의 두 배보다 하나 더 많다.

잠시 f 및 그의 도함수가 I에서 가지는 모든 근이 단순근이라고 가정하자. 이 경우, Fourier는 $|f|$의 극소점 가운데 f의 근이 아닌 것을 f'의 임계근(critical zero)이라고 불렀다. 즉 f'의 임계근은 f가 양의 극소값 또는 음의 극대값을 가지기 때문에 그 도함수가 0이 되는 자리이다. f의 연이은 두 근 사이에 f'의 임계근이 K 개 있다고 가정하면, 그 두 근 사이에는 f'의 근이 정확히 $2K+1$ 개 있음을 쉽게 알 수 있다. 따라서, f의 두 근 사이에 도함수의 근이 Rolle의 정리가 보장하는만큼만 있으면 거기에는 도함수의 임계근이 없으며, 만일 더 있으면 그 여분의 개수는 거기에 있는 f'의 임계근의 개수의 두 배와 일치한다.

우리는 다음과 같이 중복도를 고려하여 극대 극소점의 개수를 셈으로써, 위의 결과를 f 또는 그 도함수가 중근을 가지는 경우로 확장한다. 한 점에서 f가 중복도 m인 근을 가질 때, 우리는 그 점에 $|f|$의 극소점이 m 개, 극대점이 $m-1$ 개 있다고 한다; 그러나 실제로는 그 점에서 $|f|$가 극소값 0을 가질 뿐이다. 이제 f의 근이 아닌 한 점 a에서 도함수가 중복도 m인 근을 가진다고 가정하자. 즉 $f(a) \neq 0$, $f'(a) = \cdots = f^{(m)}(a) = 0$ 및 $f^{(m+1)}(a) \neq 0$을 가정하자. 우선 m이 짝수인 경우, 이 점은 $|f|$의 극대점도 극소점도 아니지만, 우리는 a에 극소점과 극대점이 각각 $m/2$ 개씩 있다고 한다. m이 홀수인 경우, $f(a)f^{(m+1)}(a) > 0$이면 a가 $|f|$의

극소점이고, $f(a)f^{(m+1)}(a) < 0$이면 a가 $|f|$의 극대점이다. 우리는 a에 $|f|$의 극소점과 극대점이 전자의 경우 각각 $(m+1)/2$, $(m-1)/2$ 개, 후자의 경우 각각 $(m-1)/2$, $(m+1)/2$ 개 있다고 한다. 이제부터는 한 점에 f'의 임계근이 K 개 있다는 말을 '그 점에 f의 근은 없지만 $|f|$의 극소점이 K 개 있다'는 뜻으로 받아들인다; 또한 모든 근은 중복도를 고려하여 센다. 이렇게 해도 여전히, f의 두 근 사이에서 도함수는 Rolle의 정리가 보장하는 것보다 거기에 있는 임계근의 두 배만큼 근을 더 가진다.

$n = 2, 3, \ldots$에 대해서도 $f^{(n)}$을 $f^{(n-1)}$의 도함수로 봄으로써 $f^{(n)}$의 임계근을 정의한다. 구간 I에 속한 한 점이 주어졌을 때, $n = 1, 2, \ldots$에 대하여 f의 n 번째 도함수가 그 점에서 가지는 임계근의 개수를 모두 합한 것을 f가 그 점에서 가지는 임계점의 개수라고 하며, I에 속하는 모든 점에 대하여 그 점에서 f가 가지는 임계점의 개수를 모두 합한 것을 f가 I에서 가지는 임계점의 개수라고 한다. 보기를 들면, $\cosh x$는 0에서 무수히 많은 임계점을 가지며 그 밖의 점에서는 임계점을 가지지 않는다; 또한 $\cos x$는 어디에서도 임계점을 가지지 않는다. 여기서 $\cosh x$는 무수히 많은 허근을 가지며 $\cos x$는 허근을 가지지 않음을 눈여겨 보기 바란다.

이제 P가 실계수 다항식이라고 하자. N과 N'을 각각 P와 P'의 실근의 개수라 하고 K를 P'의 임계근의 개수라 하면, $|x| \to \infty$에 따른 $|P(x)|$의 극한이 무한대라는 사실로부터, $N' = N - 1 + 2K$를 얻는다. J와 J'을 각각 P와 P'의 허근쌍의 개수라 하면, 미분함에 따라 차수가 하나 낮아지므로, $N' + 2J' = N + 2J - 1$. 따라서 $J' = J - K$가 성립한다. 즉 실계수 다항식을 한 번 미분하면 허근쌍이 도함수의 임계근만큼 줄어든다. 실계수 다항식을 계속 미분하면 언젠가는 가지고 있던 허근을 다 잃어버리므로, 우리는 다음과 같은 de Gua의 정리를 얻는다.

정리 2.1 (de Gua). *실계수 다항식은 정확히 임계점만큼 허근쌍을 가진다.*

Pólya에 따르면 [19], Fourier는 그의 저서 "열이론"에서 함수 $J_0(2\sqrt{x})$가 임계점을 가지지 않음을 보인 다음, 여기서 J_0는 Bessel 함수이다, 이 함수가 실근만 가진다고 바로 결론을 내렸다. 이에 대해서 Cauchy는 "그런 대수적 법칙(de Gua의 정리)을 초월방정식에 적용하는 데에는 많은 어려움이 따른다"고 우려를 표시했으며, Poisson은 "어떤 함수에 대하여 de Gua의 정리가 성립하기 위해서는 그 함수를 충분히 미분했을 때 실근만 가진다는 가정이 필요하다"고 주장했다. De Gua의 정리의 증명을 생각해 보면, 이 주장은 상당한 설득력을 가지고 있다. 그러나 함수 $e^x - 1$은 허근을 무수히 많이 가지고 있지만 임계점은 가지고 있지 않으며, 또한 $\cosh x$에 대하여 de Gau의 정리가 성립하지만 이 함수는 아무리 미분해도 언제나 무수히 많은 허근을 가진다. 이들 사이에

여러 해에 걸쳐서 있었던 논의에서 Fourier가 마지막으로 주장했던 것을 현대수학의 용어로 기술하면 다음과 같다:

Fourier의 주장. *실정함수 f가 일차인수들의 유한 또는 무한곱으로 표현될 수 있으면, f는 정확히 임계점만큼 허근쌍을 가진다.*

여기서 실정함수란 실축에서 실수값만 취하는 정함수(entire function)를 뜻한다. 이 주장에 대하여는 아직까지 증명도 반례도 발표되지 않은 것으로 보인다. 함수 $J_0(2\sqrt{x})$의 증가지수(order)가 1/2이므로, 한참 뒤인 1893 년에 증명된 Hadamard의 인수분해정리에 따르면, 이 함수는 절대수렴하는 '일차인수들의 무한곱'으로 표현된다. (증가지수의 정의는 3 절에 주어져 있다.) 따라서 Fourier의 주장이 옳다면 $J_0(2\sqrt{x})$의 근에 관한 그의 논의가 정당하다.

제 3 절 Pólya의 가설적 정리들

우선 몇몇 전문용어가 필요하다. 정함수 f의 증가지수 ρ는 다음과 같이 정의된 값이다.

$$\rho = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r;f)}{\log r};$$

여기서 $M(r;f)$는 원 $|z| = r$에서 취한 $|f|$의 최대값이다. $0 < \rho < \infty$일 때, f의 증가계수 τ를 다음과 같이 정의한다.

$$\tau = \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log M(r;f)}{r^{\rho}}.$$

어떤 정함수의 증가율이 (ρ, τ)라는 것은 그 함수의 증가지수가 ρ보다 작거나, 아니면 증가지수가 ρ와 같고 증가계수가 τ를 넘지 않음을 뜻한다. 어떤 정함수가 0-종이라는 것은 그 함수가 z 또는 $(1 - az)$처럼 생긴 인수들의 유한 또는 무한곱으로 표현되며 그 곱이 절대수렴하는 것이다; 또한 그 함수가 1-종이라는 것은 그것이 z, e^{az}, 또는 $(1-az)e^{az}$처럼 생긴 인수들의 유한 또는 무한곱으로 표현되며 그 곱이 절대수렴하는 것이다. 잘 알려진 Hadamard의 인수분해정리에 따르면, 증가지수가 1보다 작은 함수는 0-종이며, 모든 0-종 정함수의 증가율은 $(1,0)$이다; 또한 증가지수가 2보다 작은 함수는 1-종이며, 모든 1-종 정함수의 증가율은 $(2,0)$이다. 끝으로 어떤 실정함수가 올린 1-종 또는 1*-종이라는 것은 0보다 작지 않은 실수 α와 0 또는 1-종 정함수 $g(z)$가 존재하여 그 함수가 $e^{-\alpha z^2} g(z)$의 꼴로 표현되는 것이다; 이 경우 그 함수의 증가율은 $(2, \alpha)$이다. (증가지수(order), 증가계수(type), 종(genus), Hadamard의 인수분해 정리에 대해서는 [2] 또는 [17]을 참조하기 바란다.)

Pólya의 세 가설적 정리들은 다음과 같다 [19].

A. 모든 0-종 *실정함수는 정확히 임계점만큼 허근쌍을 가진다.*

B. *허근을 유한 개만 가지는* 모든 1^*-종 *실정함수는 정확히 임계점만큼 허근쌍을 가진다.*

C. f*가 허근을 유한 개만 가지는* 1^*-종 *실정함수이면, 어떤 자연수* m*이 존재하여* $f^{(m)}, f^{(m+1)}, \ldots$ *가* 모두 *실근만 가진다.*

서론에서 언급했듯이, A와 C는 각각 Fourier-Pólya 예상과 Pólya-Wiman 예상으로 알려져 있다. 또한 Pólya는 다음 정리를 증명함으로써 B와 C가 서로 동치임을 보였다 ([19]의 정리 I).

정리 3.1. *허근을 유한 개만 가지는* 1^*-종 *실정함수의* 도함수도 역시 *그러한 함수이며, 그런 함수를 한 번 미분하면 허근쌍이 정확히* 도함수 *의 임계근만큼 줄어든다.*

여기서 Fourier-Pólya 예상과 Fourier의 주장의 차이점은 전자의 경우 그 대상을 절대수렴하는 곱으로 제한했다는 것이다. 그러나 $J_0(2\sqrt{x})$이 0-종 함수이므로, 이 제한에도 불구하고 Fourier-Pólya 예상은 그 함수의 근에 관한 Fourier의 논의를 정당화하기에 충분하다. 또한 Fourier-Pólya 예상과 Pólya-Wiman 예상의 차이점은 전자가 더 제한된 곱의 형태를 가지는 함수를 대상으로 삼았으나 허근을 무수히 많이 가질 수 있도록 허용한 반면, 후자는 더 일반적인 곱의 형태를 가지는 함수를 대상으로 삼은 대신 허근을 유한 개만 가지는 것으로 대상을 제한했다는 것이다.

다음 정리는 '실계수 다항식을 계속 미분하면 언젠가는 가지고 있던 허근을 다 잃어버린다'는 사실과 함께 Pólya-Wiman 예상의 동기를 제공한다 [23]. 또한 Levin의 책 [17]의 8 장에 이 정리의 현대적 증명이 있다.

정리 3.2 (Laguerre-Pólya-Schur). *임의로 주어진 자연수* N*과 허근을 많아야* N *개 가지는 실정함수* f*에 대하여,* f*가* 1^*-*종일 필요충분조건은 허근을 많아야* N *개 가지는 실계수 다항식들로 이루어진 함수열* $\{P_n\}$*이 존재하여 이 함수열이 복소평면의 모든 유계집합에서* f*로 평등수렴하는 것이다.*

1^*-종 함수 가운데 실근만 가지는 것들의 모임을 $\mathcal{LP}$로, 허근을 유한 개만 가지는 것들의 모임을 $\mathcal{LP}^*$로 표기하자. 위의 정리로부터 $f \in \mathcal{LP}$일 필요충분조건은 실근만 가지는 실계수 다항식들로 이루어진 함수열 $\{P_n\}$이 존재하여 이 함수열이 복소평면의 모든 유계집합에서 f로 평등수렴하는 것이고, $f \in \mathcal{LP}^*$일 필요충분조건은 어떤 실계수 다항식 P와 $\mathcal{LP}$에 속하는 함수 g가 존재하여 $f = Pg$인 것이다. 또한 정리 3.1은 이들 모임이 미분에 대하여 닫혀있음을 보여준다.

제 4 절 Pólya-Wiman 예상 및 관련된 결과들

우선 Pólya-Wiman 예상의 증명에서 중요한 역할을 하는 Jensen 정리에 대해서 알아본다. 실축 위에 놓여있지 않은 한 복소수 a에 대하여 a와 $\bar{a}$를 잇는 선분을 지름으로 하는 닫힌 원판을 a의 Jensen 원판이라고 한다. f가 실정함수일 때, f의 모든 허근의 Jensen 원판의 합집합을 $\mathcal{J}(f)$로 표기한다. 이제 f가 1^*-종이라고 하자. 정의로부터 f는 다음과 같이 생긴 인수들의 유한 또는 무한곱의 상수배다: z, $(1-az)e^{az}$ $(a \in \mathbb{R})$, $\exp\left(-\alpha z^2 + \beta z\right)$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \in \mathbb{R})$, $(1-cz)(1-\bar{c}z)\exp(cz+\bar{c}z)$. f의 로그 도함수 f'/f는 이렇게 생긴 인수들의 로그 도함수의 합이다. 이제 각각의 로그 도함수의 허수부를 계산해 보면, 처음 세 경우는 $\operatorname{Im} z > 0$에서 0보다 작고 $\operatorname{Im} z < 0$에서 0보다 크다. 마지막 형태의 인수에 대하여 로그 도함수의 허수부를 계산해 보면 $\operatorname{Im} z \neq 0$일 때, c의 Jensen 원판의 내부에서는 $\operatorname{Im} z$와 같은 부호이며 외부에서는 다른 부호임을 알 수 있다. 따라서 $z \notin \mathcal{J}(f)$ 및 $\operatorname{Im} z \neq 0$을 가정하면 모든 인수의 로그 도함수의 허수부가 $\operatorname{Im} z > 0$에서는 0보다 작고 $\operatorname{Im} z < 0$에서는 0보다 크다. 이로부터 다음을 얻는다.

정리 4.1 (Jensen). *f가 1^*-종 함수이면, f'의 모든 허근은 $\mathcal{J}(f)$의 원소이다.*

Pólya-Wiman 예상의 증명은 대략 다음과 같은 논의에 기초한다. 자세한 논의는 [15]의 2 절 또는 [12]를 참고하기 바란다. 우선 f가 정함수이고 $f(z_0) = f'(z_1) = \cdots = f^{(n-1)}(z_{n-1}) = 0$이면, 다음이 성립함을 상기하자:

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \int_{z_1}^{\zeta_1} \cdots \int_{z_{n-1}}^{\zeta_{n-1}} f^{(n)}(\zeta_n)\, d\zeta_n \cdots d\zeta_2\, d\zeta_1 \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{4.1}$$

이제 f가 1^*-종 함수로서 허근을 유한 개만 가진다고 가정하자. 또한 모순을 얻기 위해서 f를 아무리 미분해도 언제나 허근을 가진다고 가정하자. 정리 3.1로부터 함수 $f, f', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ 들은 모두 1^*-종이며 허근을 유한 개만 가진다. n이 임의의 자연수라고 하면, 가정으로부터 $f^{(n)}$이 허근을 가지므로, Jensen 정리를 여러 번 적용하여 다음과 같은 $n+1$ 개의 복소수 $z_0, z_1, \ldots, z_n$을 얻는다: 각각의 z_j는 $f^{(j)}$의 허근이며, 또한 $j = 1, \ldots, n$에 대하여 z_j는 z_{j-1}의 Jensen 원판의 원소이다. f가 허근을 유한 개만 가지므로, 일종의 긴밀성 논법을 통하여 다음과 같은 무한수열 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$을 얻는다: 각각의 z_n은 $f^{(n)}$의 허근이며, 또한 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 z_n은 z_{n-1}의 Jensen 원판의 원소이다. 각각의 z_n이 $f^{(n)}$의 근이므로, 임의의 자연수 m, n에 대하여 $f^{(m)}$에 (4.1)을 적용하여 $|f^{(m)}(z)|$의 크기를 $|f^{(m+n)}(z)|$의 크기와 $z, z_m, \ldots z_{m+n-1}$을 이용하여 나타낼 수 있다. f의 증가율이 적당한 $\alpha \geq 0$에 대하여 $(2, \alpha)$라는 사실과 $n = 1, 2, \ldots$ 에

대하여 z_n이 z_{n-1}의 Jensen 원판의 원소라는 사실을 이용하여 m이 충분히 크면 $|z| \le 1$의 범위에서 $|f^{(m)}(z)| = 0$이 성립함을 증명할 수 있는데, 이것은 f가 다항식임을 뜻하므로 모순이다.

Pólya-Wiman 예상은 정리 3.1 및 Jensen 정리와 함께 $\mathcal{LP}^*$에 속한 함수를 계속 미분함에 따른 근분포의 점근적 변화를 기술하고 있다: 미분함에 따라 허근들이 실축으로부터 멀어지지 않고 허근의 개수는 늘어나지 않으며 그 개수가 줄어들 때마다 줄어든 허근쌍의 개수만큼 임계점이 생긴다. 그리고 언젠가는 실근만 가지게 된다. 다음 정리는 $\mathcal{LP}$에 속한 함수들도 비슷하게 행동함을 보여준다 [11]. (여러 관점에서, 같은 실근이라도 단순근이 중근보다 더 실근이라고 볼 수 있다.)

정리 4.2. *모임 $\mathcal{LP}$에 속한 함수 f가 초월함수이면, 임의로 주어진 양수 A에 대해서 자연수 N이 존재하여 $n \ge N$이면 $f^{(n)}$이 구간 $(-A\sqrt{n}, A\sqrt{n})$에서 단순근만 가진다. 만일 f의 종가지수가 $\rho(\le 2)$보다 작으면, 구간 $(-A\sqrt{n}, A\sqrt{n})$을 $(-An^{1/rho}, An^{1/rho})$으로 대체할 수 있다.*

$\mathcal{LP}$ 또는 $\mathcal{LP}^*$와 비슷한 방법으로 정의된 함수모임에 대하여도 나름대로의 Pólya-Wiman 예상이 성립한다. 우선 $\mathcal{LP}_+$를 양의 실근만 가지는 실계수 다항식들로 이루어진 함수열로 임의의 유계집합에서 평등근사할 수 있는 함수들의 모임이라고 하면, 이 모임에 속한 모든 함수는 적당한 실수 $\beta \ge 0$과 0 이상인 실근만 가지는 0-종 실정함수 g에 대하여 $e^{-\beta z}g(z)$의 꼴로 표현될 수 있으며 그 역도 성립한다. 이제 $\mathcal{LP}_+^*$를 $\mathcal{LP}_+$에 속한 함수와 실계수 다항식의 곱으로 표현될 수 있는 함수들의 모임이라고 하면, 이들도 역시 미분에 대하여 닫혀 있으며, 또한 다음 정리가 성립한다 [11].

정리 4.3. *$f \in \mathcal{LP}_+^*$이면 충분히 큰 모든 자연수 n에 대해서 $f^{(n)} \in \mathcal{LP}_+$가 성립한다.*

$\Delta \ge 0$에 대하여 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \le \Delta$에서만 근을 가지는 1*-종 함수들의 모임을 $\mathcal{LP}^\Delta$로 표기하면, 다음과 같은 일반화된 Laguerre-Pólya-Schur 정리가 성립한다 ([17]의 8 장):

정리 4.4. *$f \in \mathcal{LP}^\Delta$일 필요충분조건은 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \le \Delta$에서만 근을 가지는 실계수 다항식들로 이루어진 함수열 $\{P_n\}$이 존재하여 이 함수열이 복소평면의 모든 유계집합에서 f로 평등수렴하는 것이다.*

이 정리와 Gauss-Lucas 정리의 결과로 우리는 $\mathcal{LP}^\Delta$가 미분에 대해서 닫혀있음을 안다. 위에서 소개한 Pólya-Wiman 예상의 증명에서와 같은 방법으로 우리는 다음과 같은 일반화된 Pólya-Wiman 예상을 증명할 수 있다.

정리 4.5 (일반화된 Pólya-Wiman 예상). $\Delta \geq 0$이라 하자. f가 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \Delta$의 바깥에서 근을 유한 개만 가지는 1*-종 실정함수이면, 어떤 자연수 m이 존재하여 $f^{(m)}, f^{(m+1)}, \ldots$의 근은 모두 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \Delta$에 존재한다.

또한 다음과 같은 국소적 형태의 Pólya-Wiman 예상과 정리 3.1이 성립한다 [13], [14].

정리 4.6 (국소적 Pólya-Wiman 예상). $\rho \leq 2$라 하자. 증가율 $(\rho, 0)$인 1*-종 실정함수 f의 근이 어떤 양수 Δ에 대하여 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \Delta$에만 분포하면, 임의의 양수 A에 대해서 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$이면 $f^{(n)}$은 영역 $|\mathrm{Re}\, z| \leq An^{1/rho}$에서 실근만 가진다.

정리 4.7. f가 1*-종 함수이고, E가 $\mathcal{J}(f)$의 한 연결단위라고 하자. $2J$와 $2J'$을 각각 f와 그 도함수가 E에서 가지는 허근의 개수라 하고, K를 f의 도함수가 E에서 가지는 임계근의 개수라고 하면, $J - J' = K$가 성립한다.

정리 4.6이 모든 1*-종 실정함수에 대하여 성립하는가의 여부는 아직 밝혀지지 않은 것으로 보인다. 또한 $\mathcal{LP}^{\Delta}$에 속한 모든 함수가 정확히 임계점만큼 허근쌍을 가지는 것처럼 보이는데, 이에 대하여도 아직까지 증명 또는 반례가 발표되지 않았다.

자연수 n과 정함수 f에 대하여 $f^{(n)}$을 $D^n f$로 표기하면, Pólya-Wiman 예상을 특별한 미분작용소인 D의 반복에 관한 명제로 볼 수 있다. 논문 [6]은 다항식 또는 정함수 f에 대하여 $f(D)$의 형태를 가진 미분작용소의 반복이 실정함수의 근분포에 미치는 영향에 관한 것이다. 이런 종류의 미분작용소 가운데 특히 $\exp\left(-\lambda D^2\right)$은 여러 사람의 주목을 받아왔다 [3], [6], [16], [18]. 이 작용소에 관한 최근 결과는 다음과 같다. [16]

정리 4.8. $f(z)$가 증가율 $(2, \alpha)$인 1*-종 정함수라고 하자. 또한 $\Delta \geq 0$, $\lambda > 0$ 및 $\lambda\alpha < 1/4$을 가정하자. $f(z)$의 모든 근이 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \Delta$에 분포하면, 함수 $e^{-\lambda D^2} f(z)$도 역시 1*-종이며 이 함수의 모든 근은 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{\max\{\Delta^2 - 2\lambda, 0\}}$에 분포한다. 만일 $\Delta^2 < 2\lambda$이면, 함수 $e^{-\lambda D^2} f(z)$의 모든 근은 단순 실근이다.

정리 4.9. $f(z)$가 증가율 $(2, \alpha)$인 1*-종 정함수라고 하자. 또한 $\Delta \geq 0$, $\lambda > 0$ 및 $\lambda\alpha < 1/4$을 가정하자. 임의의 양수 ϵ에 대해서 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \Delta + \epsilon$의 외부에 함수 $f(z)$의 근이 유한 개만 있으면, 함수 $e^{-\lambda D^2} f(z)$도 역시 1*-종이며, 임의의 양수 ϵ에 대해서 영역 $|\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{\max\{\Delta^2 - 2\lambda, 0\}} + \epsilon$의 외부에 이 함수의 근이 유한 개만 있다. 만일

$\Delta^2 < 2\lambda$이면, 이 함수의 근은 유한 개를 제외하고 모두 단순 실근이다.

여기서 정리 4.9는 1950 년 이후 미해결로 남아있던 de Bruijn의 질문([3]의 p. 199, 205)에 대한 긍정적인 해답을 제공한다.

제 5 절 Fourier-Pólya 예상 및 관련된 결과들

f가 0-종 실정함수라고 하자. 만일 f가 허근을 유한 개만 가진다면, Pólya-Wiman 예상과 정리 3.1로부터 f는 정확히 임계점만큼 허근쌍을 가질 것이다. 따라서 Fourier-P'olya 예상을 증명하기 위해서는 허근을 무수히 많이 가지는 0-종 실정함수가 임계점도 무수히 많이 가짐을 보이기만 하면 된다. 그러나 현재까지 알려진 Fourier-P'olya 예상의 증명([15]의 3, 4 절)은 상당히 복잡하다. 여기서는 완전한 증명을 소개하는 대신에 그것의 축소모형이라고 할 수 있는 부분증명 즉 "허근을 무수히 많이 가지는 0-종 실정함수는 임계점도 가짐"의 증명을 소개한다.

f가 허근을 무수히 많이 가지는 0-종 실정함수라고 하자. 논문 [15]의 3 절에 증명되어 있는 다음 두 정리로부터 f가 실근을 가지지 않는다고 가정해도 된다.

정리 5.1. *실정함수들로 이루어진 함수열 $\{f_n\}$가 임계점을 최소한 K 개 가지는 실정함수 f로 모든 유계집합에서 평등수렴하면, 충분히 큰 모든 n에 대해서 f_n도 최소한 K 개의 임계점을 가진다.*

정리 5.2. *P가 실근만 가지는 실계수 다항식이고 f가 최소한 K 개의 임계점을 가지는 실정함수이면, Pf도 최소한 K 개의 임계점을 가진다.*

이제 f가 실근은 가지지 않고 허근만 무수히 많이 가진다고 가정하면, f는 초월함수이며 모든 x에 대해서 $f(x) \neq 0$이다. 모순을 얻기 위해서 f가 임계점을 가지지 않는다고 가정하자. 만일 f의 도함수가 실근을 두 개 이상 가지면, 모든 실수 x에 대해서 $f(x) \neq 0$이므로, 그 가운데 최소한 하나는 임계근이다. 따라서 f의 도함수는 실근을 가지지 않거나 아니면 정확히 한 개 가진다. 후자의 경우 그 실근은 $|f|$의 극대점이므로 f는 실축에서 유계일 수 밖에 없는데, 그러면 (f의 증가율이 $(1, 0)$이므로) Phragmén-Lindelöf 정리([2]의 정리 1.4.3)로부터 이 함수는 상수함수가 되어 모순이다. 따라서 f의 도함수는 실근을 가지지 않는다. 같은 논의를 되풀이하면, 모든 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $f^{(n)}$가 실근을 가지지 않는다. 여기서 우리는 모든 실수 x와 모든 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 에 대해서 $f(x) > 0$이라고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 이런 함수를 절대단조(absolutely monotone) 함수라고 하는데, $a, b > 0$일 때 ae^{bx}가 그런 함

수이다. 잘 알려진 Bernstein-Widder 정리([26]의 3.9.2)에 따르면, 모든 절대단조 함수는 이런 함수들의 합이다:

정리 5.2 (Bernstein-Widder). *구간* $(-\infty, 0]$*에 정의된 함수* f*가 구간* $(-\infty, 0)$*에서 절대단조이면, 구간* $[0, \infty)$*에 정의된 유계 단조증가 함수* F*가 존재하여 다음이 성립한다:*

$$f(x) = \int_0^\infty e^{tx} dF(t). \tag{5.1}$$

정함수 f가 (5.1)의 형태로 표현되면, 이 함수의 증가율은 $(1,0)$이 될 수 없다. (자세한 논의는 [15]의 pp. 59-60을 참조하기 바란다.) 이것은 f의 증가율이 $(1,0)$이라는 사실에 모순이다. 따라서 f는 임계점을 가진다.

이제는 Fourier-Pólya 예상의 확장에 대해서 알아보기로 하자. 실정함수 $\cos x$, $\sin x$, $\cosh x$, $\sinh x$, Ξx 등은 일차인수들의 무한곱으로 표현되기는 하지만, 그 곱이 절대수렴하지 않기 때문에 0-종이 아니다. 그러나 이들은 모두 증가지수가 1인 홀 또는 짝함수이기 때문에, 적당한 0-종 정함수 f에 대하여 $zf(z^2)$ 또는 $f(z^2)$의 형태로 표현될 수 있다. 다음 정리는 이러한 함수들에 대해서도 de Gua의 정리가 성립함을 보여준다. 이 정리는 [15]에 있는 정리 4.3의 특수한 경우이다.

정리 5.3. $f(z)$*가 0-종 실정함수이면,* $zf(z^2)$ *및* $f(z^2)$*도 정확히 임계근만큼 허근쌍을 가진다.*

이 정리의 증명([15]의 pp. 63–65) 역시 복잡하다. 여기서도 마찬가지로 완전한 증명의 축소모형에 해당하는 "문제의 함수가 허근을 가지면 임계근도 가짐"의 증명을 소개한다. $f(z)$가 0-종 실정함수라 하고, $g(z) = f(z^2)$으로 두자. 또한 $g(z)$가 허근을 가진다고 가정하자. 정리 5.2로부터 $g(z)$가 임계점을 가지면 $zg(z)$도 임계점을 가진다. 따라서 $g(z)$가 임계점을 가짐을 보이면 충분하다.

$f(z)$의 Maclaurin 전개가 다음과 같다고 하자.

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \quad a_k \neq 0.$$

그러면 $g(z)$의 Maclaurin 전개는 다음과 같다.

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^{2n}.$$

$a_k \neq 0$이므로, 만일 어떤 $n \geq k$에 대해서 $a_n a_{n+1} \geq 0$이 성립한다면 $g(z)$가 원점에서 임계점을 가질 것이다. 따라서 우리는 모든 $n \geq k$에

대해서 $a_n a_{n+1} \leq 0$이 성립한다고 가정해도 된다. 그러면 0은 $f(z)$의 임계점이 될 수 없고 모든 $m = 0, 1, 2,$와 $x < 0$에 대해서 $f^{(m)}(z) \neq 0$이 성립한다. 특별히 $f(z)$의 모든 임계점은 0보다 크고, $f(z)$는 음의 실근을 가지지 않는다. 이제 c가 $g(z)$의 한 허근이라고 하면 c^2은 $f(z)$의 한 근인데 $f(z)$가 음의 실근을 가지지 않으므로 이것은 $f(z)$의 허근이다. $f(z)$가 0-종 실정함수이므로, Fourier-Pólya 예상으로부터 $f(z)$의 임계점이 존재한다. 그것을 a라 하면, 앞의 논의로부터 $a > 0$이다.

$m = 0, 1, \ldots$에 대해서 $g_m(z) = f^{(m)}(z^2)$로 두자. 그러면 우리의 목표는 $g_0(z)$가 임계점을 가짐을 보이는 것이다. 정리 5.2와 등식 $g'_m(z) = 2zf^{(m+1)}(z^2) = 2zg_{m+1}(z)$로부터, $g_{m+1}(z)$가 임계점을 가지면 $g_m(z)$도 임계점을 가진다. 따라서 어떤 m에 대하여 $g_m(z)$가 임계점을 보이면 되겠다.

a는 $f(z)$의 임계점이므로, 어떤 m에 대하여 $|f^{(m)}(x)|$가 $x = a$에서 0보다 큰 극소값을 가질 것이다. 또한 $a > 0$이다. 함수 x^2가 $x > 0$인 범위에서 단조증가하므로, $|g_m(x)|$는 $x = \sqrt{a}$에서 0보다 큰 극소값을 가진다. 따라서 $g_m(x)$가 임계점을 가진다.

논문 [13]와 [14]에도 0-종은 아니지만 적당한 조건을 만족하는 실정함수에 대해서 de Gua의 정리가 성립한다는 결과가 실려있다.

이제 f가 실정함수이기는 하지만 1*-종은 아니라고 가정하자. 또한 f가 실근만 가진다고 가정하자. 자명하게, f가 임계점을 가지는 경우는 f에 대해서 de Gua의 정리가 성립하지 않는다. 이제 f가 임계점을 가지지 않는다고 가정하면, f의 모든 차수의 도함수들도 임계점을 가지지 않는다. 그러나 이 경우 적당한 자연수 n이 존재하여 $f^{(n)}$이 허근을 가짐이 알려져 있다. ([9], [10] 및 [25] 참조) 그러면 $f^{(n)}$에 대하여 de Gua의 정리가 거짓이다. 이런 까닭에서, Fourier-Pólya 예상을 1*-종이 아닌 실정함수로까지 확장하는 일은 의미 없는 것으로 보인다.

제 6 절 맺음말

Fourier-Pólya 예상이 뜻하는 바는 다음과 같다: 주어진 실정함수가 특정 조건을 만족하면, 실축에서 그 함수의 행동을 관찰하는 것만으로도 그 함수가 가지는 허근의 개수를 정확히 알 수 있다. 여기서 중요한 것은 우선 이 결과가 대단히 제한된 부류에 속하는 함수에 대해서만 성립하며 또한 허근의 개수 이외에 어떤 정보도 제공하지 않는다는 것이다. 즉 대단히 제한된 대상에 대해서 대단히 제한된 정보만을 제공한다.

1887 년에 태어난 Pólya는 1912 년부터 70 년도 넘는 세월을 통하여 200 편이 넘는 논문을 발표하였다 [1]. 그의 논문집은 모두 4 권으로 되어 있는데 그 가운데 둘째 권은 “Location of zeros”라는 제목으로 되어 있으며 함수의 근분포에 관련된 논문 37 편을 담고 있다 [22]. 그 논문들은 주로 실정함수의 근분포에 관한 것이며 주어진 실정함수가 실근

만 가질 조건에 초점을 맞추고 있다. 또한 이 논문들은 정확히 한 편을 제외하고는 그가 가장 왕성한 활동을 보이던 시절에 발표되었다: 1968 년에 발표된 한 편을 제외하면 모두 1913 년에서 1943 년 사이에 발표되었다. 그가 이렇게 실근만 가지는 실정함수에 관심을 가졌던 까닭은, 그 자신이 직접 밝히고 있듯이 그 주제가 리만 가설 즉 리만의 Ξ-함수가 실근만 가질 것이라는 예상과 관련되어 있기 때문이다. ([22]의 p. 166, 237, 241, 243, 265 참조) 그는 실정함수가 실근만 가질 조건을 충분히 확보함으로써 리만 가설에 접근할 수 있으리라고 기대했다.

그가 왕성한 활동을 보이던 20 세기 초반에 그를 비롯한 여러 수학자들이 실정함수가 실근만 가질 몇몇 조건을 확립하는 데 성공하였고, 그 결과를 응용하여 실제로 여러 부류에 속하는 함수들이 실근만 가짐을 증명하였다. 그러나 대부분의 경우 그 방법은 주어진 대상 함수를 실근만 가지는 실계수 다항식들로 이루어진 함수열을 이용하여 근사하는 것이었으며, 이 방법 이외에는 어떤 체계적인 것도 개발된 바 없었던 것으로 보인다. 그러나 Fourier-Pólya 예상은 초월함수에 바로 적용되며, 또한 그 적용대상을 쉽게 구별할 수 있는 일반정리(general theorem)이다.

Fourier-Pólya 예상은 몇 가지 장점을 가지고 있다. 우선 주어진 함수를 실축에서만 관찰해도 그 함수가 가지는 허근의 개수를 정확히 알 수 있다. 또한 가우스는 적어도 다항식의 경우에 de Gua의 정리가 허근의 개수 이외에는 어떤 정보도 제공하지 않을 것으로 예상했다 ([27]의 pp. 133–134). 이 예상이 일반적으로 참이라면, 허근의 개수에만 관심이 있을 때 Fourier-Pólya 예상은 더 쉬운 길을 제공한다: 만일 우리가 (리만 가설처럼) 주어진 함수가 실근만 가진다는 명제의 증명을 시도한다면, 우리는 허근의 개수만 고려해야 된다. 또한 실정함수가 실근만 가질 조건을 충분히 확보함으로써 리만 가설에 접근할 수 있으리라는 Pólya의 관점에서 볼 때, Fourier-Pólya 예상은 그 적용 대상이 대단히 제한되어 있음에도 불구하고 리만의 Ξ-함수에 적용할 수 있다는 것도 이 결과의 큰 장점이다: Ξ-함수를 넉넉하게 품는 부류에 대한 일반정리는 그 넉넉함이 크면 클수록 Ξ-함수에 적용하기 어려운 법인데, 정리 5.3의 증명을 보면 Ξ-함수는 상당히 아슬아슬하게 그 부류에 속해있음을 알 수 있다.

논문 [15]의 5 절에서 볼 수 있듯이 Fourier-Pólya 예상의 적용기법은 아직까지 충분히 개발되어 있지 않다. 이것은 극히 최근에야 이 예상이 증명되었기 때문이기도 하다. 이러한 맥락에서 이제는 Fourier-Pólya 예상의 적용기법을 개발할 때가 되었다고 생각한다.

참고 문헌

[1] G. K. Alexanderson, *The Random Walk of George Pólya*, MAA, Washington DC, 2000.

[2] R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.

[3] N. G. de Bruijn, *The roots of trigonometric integrals*, Duke Math. J. **17** (1950), 197–226.

[4] R. P. Boas and G. Pólya, *Generalizations of completely convex functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. **27** (1941), 323–325.

[5] ———, *Influence of signs of the derivatives of a function on its analytic character*, Duke Math. J. **9** (1942), 406–424.

[6] T. Craven and G. Csordas, *Differential operators of infinite order and the distribution of zeros of entire functions*, J. Math. Anal. Appl. **186** (1994), 799–820.

[7] T. Craven, G. Csordas, and W. Smith, *The zeros of derivatives of entire functions and the Pólya–Wiman conjecture*, Ann. of Math. **125** (1987), no. 2, 405–431.

[8] ———, *Zeros of derivatives of entire functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 323–326.

[9] S. Hellerstein and J. Williamson, *Derivatives of entire functions and a question of Pólya*, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 227–249.

[10] ———, *Derivatives of entire functions and a question of Pólya II*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 497–503.

[11] Y. O. Kim, *A proof of the Pólya–Wiman conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 1045–1052.

[12] ———, *On a theorem of Craven, Csordas and Smith*, Complex Variables **22** (1993), 207–209.

[13] ———, *Critical points of real entire functions and a conjecture of Pólya*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 819–830.

[14] ———, *Critical points of real entire functions whose zeros are distributed in an infinite strip*, J. Math. Anal. Appl. **204** (1996), 472–481.

[15] H. Ki and Y.-O. Kim, *On the number of nonreal zeros of real entire functions and the Fourier-Pólya conjecture*, Duke Math. J. **104** (2000), 45–73.

[16] ———, *De Bruijn's question on the zeros of Fourier transforms*, preprint.

[17] B. Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Transl. Math. Mono., Amer. Math. Soc., Providence, R.I. **5** (1964).

[18] C. M. Newman, *Fourier transforms with only real zeros*, Proc. Amer. Math. Soc. **61** (1976), 245–251.

[19] ———, *Some problems connected with Fourier's work on transcendental equations*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **1** (1930), 21–34.

[20] ———, *On functions whose derivatives do not vanish in a given interval*, Proc. Nat. Acad. Sci. **27** (1941), 216–217.

[21] ———, *On the zeros of derivatives of a function and its analytic character*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 178–191.

[22] ———, *Collected Papers. Vol. II. Location of Zeros* (ed. R. P. Boas), MIT Press, Cambridge, 1974.

[23] G. Pólya and J. Schur, *Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen*, Crelle's Journal für die reine u. agew. Mathematik **144** (1914), 89–113.

[24] G. Pólya and N. Wiener, *On the oscillation of the derivatives of a periodic function*, Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), 245–256.

[25] T. Sheil–Small, *On the zeros of the derivatives of real entire functions and Wiman's conjecture*, Ann. of Math. **129** (1989), 179–193.

[26] A. F. Timan, *Theory of Approximation of Functions of a Real Variable*, Dover Publ., New York, 1994.

[27] Sz. Nagy, *Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen*, Crelle's Journal für die reine u. agew. Mathematik **170** (1934), 133–147.

기하서
연세대학교 이과대학 수학과
서울시 서대문구 신촌동 134
E-mail: haseo@yonsei.ac.kr

김영원
세종대학교 응용수학과
서울시 광진구 군자동 98
E-mail: kimyo@sejong.ac.kr