

Vortex-in-Cell법에 있어 랜덤워크법에 의한 점성효과

노 기 덕*

(2000년 12월 29일 접수, 2001년 11월 20일 심사완료)

Viscous Effect by Random Walk Method in VIC Method

Ki Deok Ro

Key Words: Fluid Dynamics(유체역학), Numerical Analysis(수치해석), Viscous Flow(점성류)
Vortex Method(와법), Random Walk(랜덤워크)

Abstract

A method for simulating flow of extremely low Reynolds number in a vortex-in-cell (VIC) was studied. The viscous diffusion was represented by the random walk method. The validity of this method was proven by applying it to the flows passing over a fence placed vertically at an extremely low Reynolds number. The effects of parameters of the VIC method on the random walk method, such as the number of point vortices, the mesh density and the time increment, were investigated by numerical analysis using a one-dimensional diffusion equation. Changes in the relative error of vorticity depending on those parameters were clarified.

1. 서 론

와법의 일종인 Vortex-in-Cell(VIC)법^(1,2,3)은 유동장내로 많은 볼텍스를 방출해서 그 운동을 추적해 가는 점에 있어서는 이산와법(discrete vortex method)과 같지만 볼텍스를 서로간에 유도되는 속도로 이동시키지 않고, 유동장내에 격자를 형성하여 격자점에 주어진 와도(vorticity)로부터 유도속도를 구하여 볼텍스를 이동시키는 점에서 양자는 다르다. 이 방법은 계산 시간이 짧고, 특이성이 적다는 점에서 이산와법보다 뛰어나지만 이것에 관한 연구는 박리를 동반하는 고 레이놀즈 수 영역에 머물고 있다.

이산와법에서는 점성효과를 나타내기 위해 Chorin⁽⁴⁾은 분자의 브라운 운동에 대응시켜, 정규

난수를 각 볼텍스의 위치좌표에 부가시키는 랜덤워크법(random walk method)을, Leonard⁽¹⁾는 와핵반경을 점성확산에 관한 엄밀해에 따라 성장시키는 소위 핵확산법(core-spreading method)을, Ogami⁽⁵⁾ 등은 와도방정식의 점성확산항을 변경해서 유속과 같은 차원을 가진 항으로 분리, 이것을 확산속도로서 볼텍스의 유도속도에 더하는 확산속도법(diffusion velocity method)을 제안했다.

또한 Degond 등⁽⁶⁾은 유동장내에 한 개의 볼텍스를 기준으로 주위의 볼텍스와 강도를 서로 교환하도록 하여 확산방정식을 만족시키는 입자강도교환법(particle strength exchange method)을 제안했고, Shankar 등⁽⁷⁾은 와도재분배법(vorticity redistribution method)을 시도했는데 이 방법은 각 볼텍스 순환의 일부를 주위의 볼텍스로 이동시킨다는 점에서는 입자강도교환법과 유사하나, 와도를 재배치 않는다는 점에서 양자는 다르다.

상술한 바와 같이 와법에서 유체의 점성확산을 나타내기 위해 다양한 방법들이 제안되어 사용되고 있으나, 이 중에서 랜덤워크법은 확산방정식

* 회원, 경상대학교 수송기계공학부·해양산업연구소
E-mail : rokid@gshp.gsnu.ac.kr
TEL : (055)640-3123 FAX : (055)640-3128

의 도입 없이 난수만을 이용하는 극히 간단한 방법이며, 3차원으로의 적용⁽⁶⁾도 매우 쉽고, 타 분야의 적용범위도 넓은 일반적인 방법이다.

최근 Tsutahara 등⁽⁹⁾은 랜덤워크법에 의한 점성확산을 이용하여, 고 레이놀즈 수 뿐만 아니라 저 레이놀즈 수의 흐름에 있어서도 VIC법을 적용할 수 있는 가능성을 보였다. 그러나 레이놀즈 수가 1보다 매우 작은 영역(이하 극저 레이놀즈 수 영역으로 정의한다)까지는 도달하지 않고, 계산 파라미터에 의한 점성확산의 영향은 조사되지 않았다.

그래서 본 연구에서는 점성력에 대해 관성력이 무시될 수 있는 극저 레이놀즈 수 영역에 VIC법의 적용가능 여부를 검토함과 동시에, 이러한 계산에 있어 예상되는 각 파라미터에 의한 점성확산의 오차를 상세하게 평가한다.

구체적으로 전자에 대해서는 극저 레이놀즈 수에서의 펜스(fence)를 지나는 유동장의 계산에 랜덤워크법을 도입한 VIC법을 적용해서 가시화 실험결과와 비교검토하고, 후자에 대해서는 수치실험을 통해서 와도의 분포에 대해 일차원 와도방정식에 의한 엄밀해와 랜덤워크법에 의한 근사해가 볼텍스의 개수, 격자의 간격 및 타임스텝에 따라 어떻게 변화하는가를 조사한다.

2. 수직평판을 지나는 극저 레이놀즈 수의 흐름

2.1 계산방법

먼저 계산 모델을 Fig. 1에 나타낸다. 일정류 U 중에 길이 $(L_1 + L_2)$ 의 평면벽이 있고, 그 평면벽 중앙에 수직 방향으로 길이 h 인 평판이 설치되어 있는 경우를 생각한다. 이때 평면벽 상, 하에서의 흐름은 서로 대칭이므로 실제로는 평면벽의 상측 즉 그림에서 점선으로 둘러싸여진 부분만을 계산 영역으로 한다. 계산조건으로써 이 영역 좌, 우측의 경계는 일정류, 상측의 경계는 무한 거리로 하고, L_3 과 L_4 는 미끄럼 벽으로 간주하여 볼텍스가 발생하지 않는 것으로 한다. 즉 Fig. 1의 점성부분은 일정류의 조건을 이용한다. 그리고 평면벽 L_1 및 L_2 부분과 수직평판 h 의 앞뒤 벽면은 미끄럼 없는 조건을 이용하

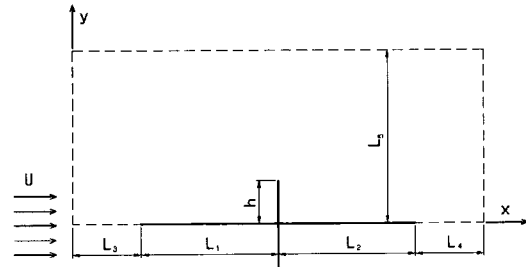


Fig. 1 Computational model

는데 여기서 볼텍스가 발생하는 것으로 한다. 구체적으로 볼텍스는 각 벽면 상의 각 격자선 중간에서 σ 만큼 떨어진 곳으로부터 타임스텝 Δt 마다 방출시킨다. 방출한 볼텍스의 강도는 압력구배로부터 다음과 같이 구해진다. 미끄럼 없는 벽면에서는 속도 및 그 시간미분이 0이므로, Navier-Stokes 방정식으로부터

$$\begin{aligned} \nabla p &= \frac{1}{Re} \Delta V \\ &= \frac{1}{Re} [\nabla(\nabla \cdot V) - \nabla \times \nabla \times V] \\ &= -\frac{1}{Re} \nabla \times \omega \end{aligned} \quad (1)$$

가 얻어진다. 즉

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (3)$$

이다. 여기서 V 는 속도벡터, Re 는 레이놀즈 수, ω 는 z 방향의 와도를 나타낸다. 식 (2), (3)의 우변은 물리적으로 각각 수평벽 및 수직벽에 있어 단위시간, 벽면의 단위길이로부터 방출하는 볼텍스의 순환을 의미한다. 그래서 평면벽 및 수직벽 상의 각 격자선에 있어 x 방향 또는 y 방향의 압력증가를 δp_i 라고 하면, 방출되는 볼텍스의 순환 Γ_{si} 는 다음과 같이 표시된다.

$$\text{평면벽에서는, } \Gamma_{si} = -\delta p_i \Delta t \quad (4)$$

$$\Gamma_{si} = \delta p_i \Delta t \quad (5)$$

한편 계산순서는 다음과 같다. 먼저 계산영역을 다수의 미소격자로 나눈다. 이때 격자선은 평면벽 및 수직평판과 맞춘다. 초기조건으로서 각 격자점에 상술한 경계조건 및 볼텍스를 배치한다. 그리고 볼텍스의 순환 Γ_{si} 로부터 그 둘레 4개의 격자점에서의 와도를 구한다. 이때 각 격자점에서의 와도는 면적 역배분의 형태로 계산한다. 그리고 Poisson 방정식을 풀어 이 와도로부터 격자점에서의 유동함수를 구한다. 또한 유동함수로부터 방출된 볼텍스의 속도 및 새로이 방출된 볼텍스의 순환이 계산 가능하다.

다시 유동장에 존재하는 볼텍스의 순환으로부터 격자점의 와도를 구하는 그런 수순을 반복한다. 한편 유동함수로부터 구한 i 번째 볼텍스속도의 x, y 성분을 u_i, v_i 라고 하면 타임스텝 Δt 에 있어 그 볼텍스의 이동은 다음과 같다.

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + u_i \Delta t + \Delta R_1 \quad (6)$$

$$y_i(t + \Delta t) = y_i(t) + v_i \Delta t + \Delta R_2 \quad (7)$$

여기서 $\Delta R_1, \Delta R_2$ 는 점성효과를 나타내기 위해 램덤워크법으로 구한 미소거리이다. 이항은 각각 독립한 평균치 0, 분산 $2\nu \Delta t$ 의 정규난수이다.

2.2 결과 및 고찰

계산조건은 다음과 같다. 일정류 $U = 1.0$, 수직평판의 높이 $h = 1.0$, Fig. 1에서의 $L_1 = L_2 = 5h, L_3 = L_4 = 15h, L_5 = 20h$, 각 격자의 크기 $\Delta x = \Delta y = h/5$, 벽면으로부터 볼텍스 발생위치까지의 미소거리 $\sigma = 0.003h$, 타임스텝 $\Delta t = 1.56 \times 10^{-6}$ 이다.

Fig. 2는 각각 320, 480, 640스텝에서의 유선이다. 일정류는 좌측에서 우측으로 흐르고 있고, 수직평판의 길이를 대표 길이로 할 경우 레이놀즈 수 $Re = 0.014$ 이다. 그림 중의 (a)는 아직 초기 단계로 수직평판 양측 모두 볼텍스는 보이지 않고 유선은 매끄럽지만 (b), (c)에서는 수직평판

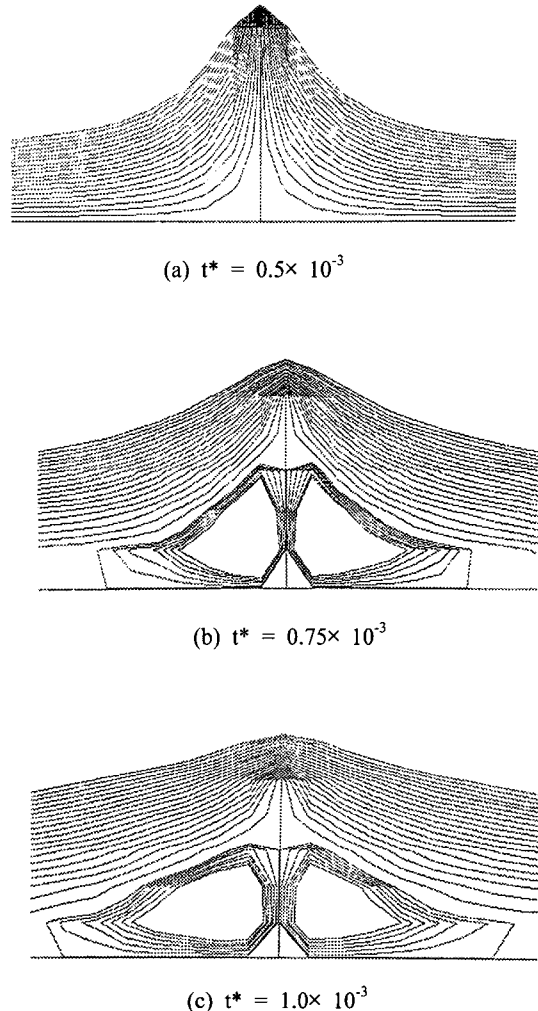
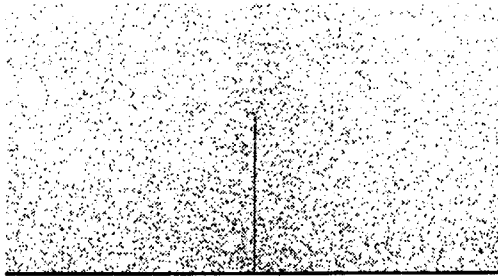


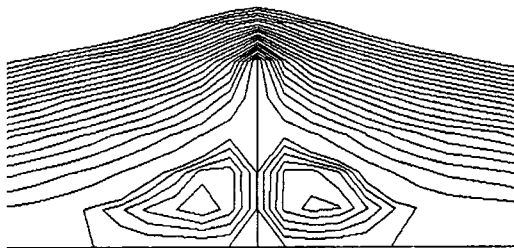
Fig. 2 Flow patterns for various time ($t^* = U \times t/h, Re = 0.014$)

양측 구석에 커다란 볼텍스가 형성되어 있다. 극저 레이놀즈 수에서의 흐름이므로 볼텍스의 이류 효과는 거의 보이지 않고 수직평판 양측의 흐름 패턴은 (a), (b), (c) 모두 거의 대칭이다.

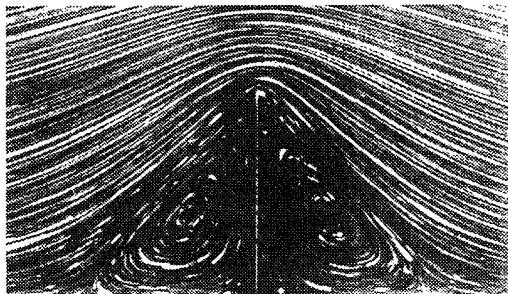
Fig. 3은 Fig. 2와 같은 조건에 있어 720스텝에서의 흐름 패턴을 나타낸다. 그림 중의 (a)는 볼텍스 분포이며, 점성확산이 격렬하여 볼텍스가 넓은 범위에 걸쳐 흩어져 있다. (b)는 유선인데 Fig. 2와 연결해서 보면 시간이 경과해도 수직평판 양측에 있는 볼텍스의 위치 및 그 크기의 변화는 거의 보이지 않는다. (c)는 (b)와 같은 레이놀즈 수에서의 種子田⁽¹⁰⁾에 의한 알루미늄 트레서



(a) Vortex distribution ($t^* = 1.125 \times 10^{-3}$)



(b) Streamlines ($t^* = 1.125 \times 10^{-3}$)



(c) Photograph

Fig. 3 Comparison of flow patterns ($t^* = U \times t/h$, $Re = 0.014$)

법을 이용한 가시화실험 결과이다. 계산결과 (b)와 가시화 결과(c)를 비교해보면 양자 모두 수직 평판 양측의 구석에 큰 볼텍스가 형성되어 있는데, 볼텍스의 중심점 위치는 다소 차이를 보이나, 전체적인 흐름패턴은 잘 일치하고 있다.

3. Random Walk method을 이용한 점성확산의 수치 실험

3.1 수치실험의 방법

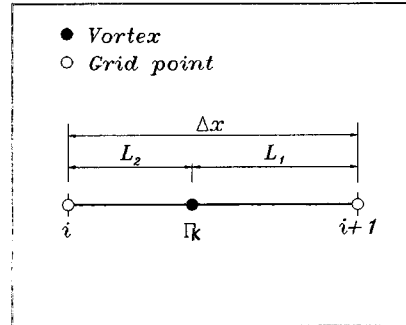


Fig. 4 Vorticity distribution

일차원 x 축상에서 유체가 점성에 의해서만 확산한다고 할 경우, 와도방정식은

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (8)$$

로 된다. 여기서 ν 는 동점성계수이다. x 축 원점에서 어느 순간 $t=0$ 에 있어 순환 $\Gamma = 1.0$ 인 볼텍스가 존재하는 경우를 생각해, 즉 $t=0$ 에서 초기조건으로서 딜러델타함수 $\omega(x, 0) = \delta(x)$ 을 사용해서 엄밀히 식 (8)을 풀면, 임의의 시각 t 에 있어 점성확산에 의한 와도 $\omega_E(x, t)$ 는 $x = x_i$ 에 있어

$$\omega_E(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu t}} e^{-x^2/2\nu t} \quad (9)$$

로 된다. 수치실험은 식 (9)의 엄밀해에 따르는 와도 ω_E 의 분포와, 이하 설명하는 랜덤워크법을 이용한 점성확산의 근사해에 의한 와도 ω_R 의 분포가 파라미터에 의해 어떻게 다른가를 조사하는 것이다. 근사해는 먼저 $t=0$ 의 시각에서 원점에 배치한, 순환 $\Gamma_k = 1.0/N$ 인 볼텍스 N 개를 타임스텝 Δt 마다 랜덤워크시켜 x 방향으로 이동시킨다. 즉 시각 t 에 있어 볼텍스 Γ_k 의 위치는 다음 식과 같이 표시된다.

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + R \quad (10)$$

여기서 R 은 평균 0, 분산 $2\nu \Delta t$ 의 정규난수

이다.

다음으로 시각 t 에서 Fig. 4에 나타낸바와 같이 격자의 분할점 i 와 $i+1$ 과의 사이에 볼텍스 Γ_k 가 있다고 하면 이 볼텍스의 좌, 우 분할점 으로의 기여는 다음과 같이 계산한다.

$$\omega_R(x_i, t) = \frac{\Gamma_k \cdot L_1}{(\Delta x)^2} \quad (11)$$

$$\omega_R(x_{i+1}, t) = \frac{\Gamma_k \cdot L_2}{(\Delta x)^2} \quad (12)$$

여기서 Δx 는 x 축상의 격자간극이다. 각 격자 셀에 있는 모든 볼텍스에 대해 식 (11), (12) 과 같이 계산해서 그 기여를 합하면 각 분할점에서 와도의 근사해가 구해진다. 한편 엄밀해(이하 이론치라 한다)에 대한 근사해(이하 계산치라 한다)의 정도를 나타내기 위해 상대오차를 이용한다. $\omega_E(i, t)$, $\omega_R(i, t)$ 를 각각 시각 t 에서 분할 점 i 에 있어 와도의 이론치 및 계산치로 잡아, 상대오차 $e_r(t)$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$e_r(t) = \frac{\sum_{i=1}^{M+1} \Delta x \cdot \varepsilon_i^2}{\sum_{i=1}^{M+1} \Delta x \cdot \omega_E^2(x_i, t)} \quad (13)$$

여기서 ε_i 는 분할점 i 에 있어 와도의 이론

치와 계산치의 차이이다.

$$\varepsilon_i = \omega_R(x_i, t) - \omega_E(x_i, t) \quad (14)$$

계산은 x 축상에 있어 ± 5 의 범위를 M 등분해서 행하였다.

3.2 수치실험의 결과 및 고찰

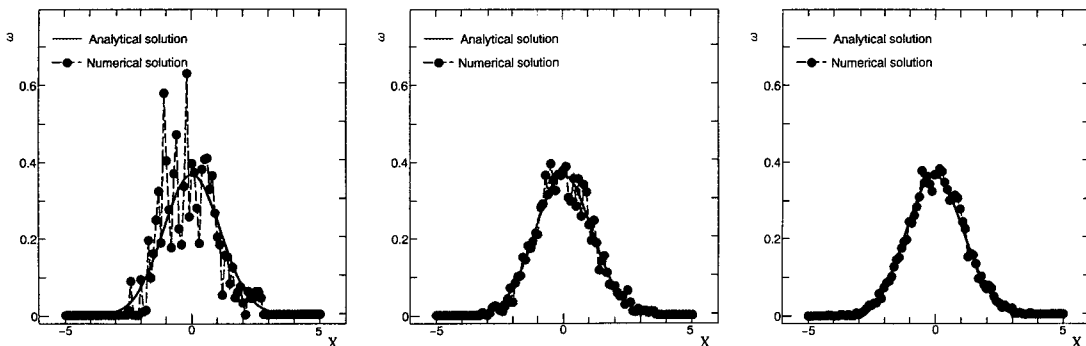
결과로서 볼텍스의 개수 N , x 축 분할수 M , 시간간극 Δt 의 변화에 따라 와도의 이론치와 계산치가 어떻게 변화하는가를 그래프로서 나타낸다. 기본적인 계산조건은 Table 1과 같다.

Fig. 5에 볼텍스 개수에 의한 와도의 이론치와 계산치의 분포를 나타낸다. 그림 중에 실선은 이론치를, ●은 계산치를 나타낸다. (a), (b), (c)의 그림은 분할 수를 $M=100$ 으로 고정해 원점에 투입하는 볼텍스의 개수를 각각 100, 1000, 5000개로 한 경우이다. 그림에 나타낸바와 같이 볼텍스가 많을수록 이론치와 계산치의 차는 적다.

Fig. 6에 볼텍스 개수에 따른 상대오차의 변화를 나타낸다. 그림 중의 횡축은 볼텍스의 개수, 종축은 식 (13)에 정의한 상대오차의 시간평균으로, 양쪽모두 대수메모리를 취한다. 상대오차는 볼텍스 수가 증가함에 따라 단순히 감소한다. 통계적으로 볼텍스 수가 많으면 많을수록 계산치는이론치에 수렴한다. 그러나 실제 시뮬레이션에서

Table 1 Computational condition

Δt	Δx	ν	Max time step
0.3	0.5	0.5	20



(a) $N = 100$ (Vortices)

(b) $N = 1000$ (Vortices)

(c) $N = 5000$ (Vortices)

Fig. 5 Comparison of vorticity for vortices(Divisions $M=100$)

는 계산에 요구되는 정도 또는 컴퓨터의 계산능력에 따라 어느 오더(order)까지 그 수를 제한하지 않으면 안된다.

Fig. 7에 분할수에 의한 와도의 이론치와 계산치의 분포를 나타낸다. 그림 중에 ○은 이론치를, ●은 계산치를 나타내며 ●이 숨겨져있는 점은 양자가 일치하고 있는 것을 의미한다. (a), (b), (c)의 그림은 원점에 투입한 볼텍스의 수를 100개로 고정하고, x축의 분할수를 각각 4, 8, 100개로 할 경우이다. 그림에 나타낸 바와 같이 이론치와 계산치와의 차는 분할수 $M=8$ 의 경우가 $M=4$, $M=100$ 의 경우보다 작게 나타나 있다. 이러한 경향을 상세히 검토하기 위해 더욱 넓은 범위에 걸쳐 계산하여 그 결과를 분할수와 상대오차의 변화로서 Fig. 8에 나타낸다. 그림 중에 3개의 곡선은 각각 볼텍스 수가 100, 1000, 5000개의 경우이다. 그림에 나타낸 바와 같이 볼텍스 수와 관계 없이 같은 경향으로 상대오차는 분할수 M 가 많

을수록 한 번 최소치를 향해서 급격히 감소하고, 그 후는 반대로 완만하게 증가해 간다. 즉 근사하는 볼텍스 개수에 따라 그 값은 약간 다르지만 상대오차가 최소로 되는 분할수가 존재한다. 이 그림으로부터는 볼텍스 수가 100개인 경우는 8분할, 1000개인 경우는 10분할, 5000개인 경우는 18분할에서 상대오차가 최소이다. 이러한 현상이 생기는 것은 분할수가 너무 적으면 볼텍스 순환으로부터 와도의 분배를 행할 때 평활화 효과로 이론치와 차이가 생기고, 분할수가 너무 많으면 볼텍스가 존재하지 않는 또는 밀도가 적은 구간이 발생하기 때문이다. 이 사실에서 VIC법에 랜덤워크법을 도입해서 유동장을 계산할 때, 점성항이 지배적인 극저 레이놀즈 수의 경우, 격자를 너무 작게 하면 도리어 오차가 크게 뒀을 알 수 있다. 그러나 고 레이놀즈 수의 경우는 관성항이 지배적이기 때문, 차분법과 같이 높은 계산정도를 얻는데는 물체근방 또는 후류측에는 격자를

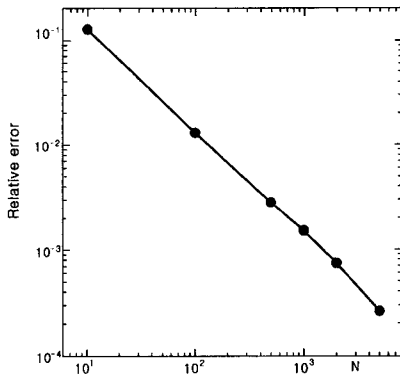


Fig. 6 Relative errors for various vortices

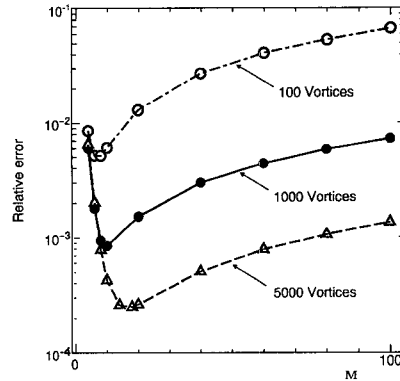


Fig. 8 Relative errors for various divisions

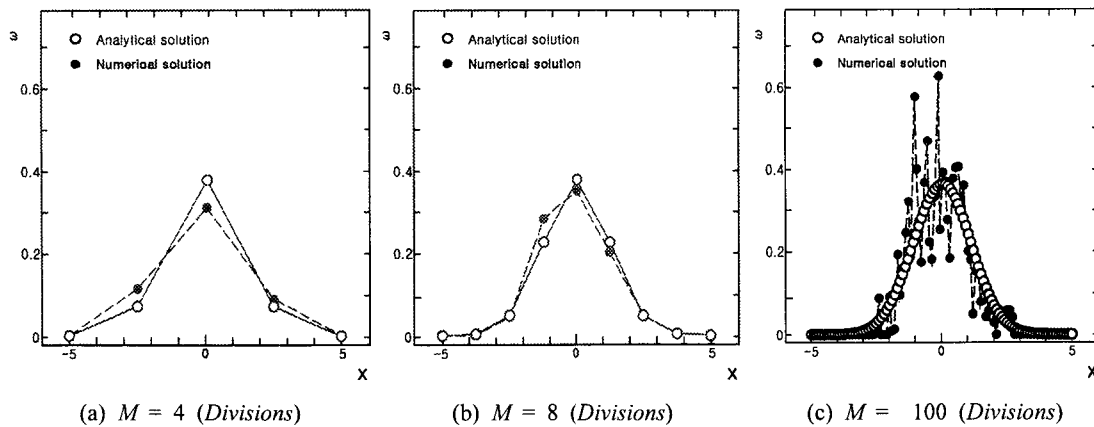


Fig. 7 Comparison of vorticity for divisions(Vortices $N=100$)

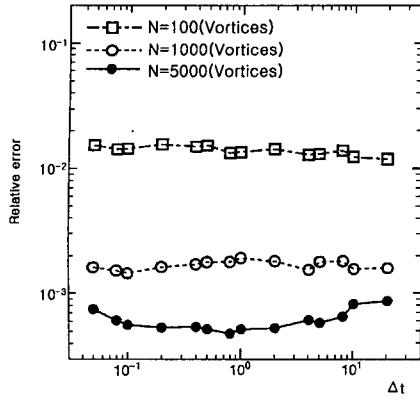


Fig. 9 Relative errors for various time steps

잘게 취할 필요가 있고, 그 때에는 볼텍스 개수를 증가시킬 필요가 있다.

Fig. 9에 타임스텝에 따른 상대오차의 변화를 나타낸다. 그림 중의 3개의 곡선은 각각 볼텍스의 개수가 100, 1000, 5000개의 경우이다. 어느 타임스텝에 있어서도 볼텍스 수가 많은 쪽이 상대오차가 적다. 또한 3개의 곡선 모두 평평하며 상대오차는 타임스텝 Δt 의해서 거의 변화가 없다. 본 수치실험에서는 볼텍스는 점성확산에 의해서만 이동하는 것으로 가정하고 있다. 그러나 실제 VIC법에 의한 수치시뮬레이션에서는 식 (6), (7)의 우변 제 2항과 같은 관성항이 있고, 타임스텝 Δt 를 크게 하면 이 항에 의한 오차가 크게 됨으로 Δt 를 어느 오더(order) 이내로 억제해야 한다.

4. 결론

Vortex-in-Cell법을 이용한 수직평판을 지나는 흐름의 시뮬레이션에서 극저 레이놀즈 수에 있어 랜덤워크법을 적용한 점성확산의 근사가 유효함을 확인할 수 있었다. 계속해서 일차원 수치실험을 통하여 랜덤워크법을 이용해서 수치실험을 행한 경우, 이론치에 대한 계산치의 상대오차가 계산 파라미터에 따라 어떻게 변화하는가를 검토했다. 그 결과 와도의 상대오차는 도입하는 볼텍스의 개수가 많을수록 작게 되고, 그 개수가 일정한 경우에는 상대오차가 최소치로 되는 분할수가 존재함을, 또한 와도의 상대오차는, 점성확산에 관한 한, 타임스텝에 따라서는 거의 변화가 없음을

확인했다.

후 기

이 논문은 2002년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Leonard, A., 1980, "Vortex Method for Flow Simulation," *J. Comp. Phys.*, Vol. 37, pp.289~335.
- (2) Smith, P. A. and Stansby, P. K., 1988, "Impulsively Started Flow Around a Circular Cylinder by the Vortex Method," *J. Fluid Mech.*, Vol. 194, pp. 45~77.
- (3) Sarpkaya, T., 1989, "Computational Methods with Vortices," *J. Fluids Eng., ASME*, Vol. 111, pp. 5~52.
- (4) Chorin, A.J., 1973, "Numerical Study of Slightly Viscous Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 57, pp. 785~796.
- (5) Ogami, Y. and Akamatsu, T., 1991, "Viscous Flow Simulation Using the Discrete Vortex Method - the Diffusion Velocity Method," *Computers and Fluids*, Vol. 19, Pt. 3, pp. 433~441.
- (6) Degond, P. and Mas-Gallic, S., 1989, "The Weighted Particle Method for Convection - Diffusion Equations, Part I: the Case of an Isotropic Viscosity, Part II: The Anisotropic Case," *Math. Comp.*, Vol. 53, pp. 485~526.
- (7) Shankar, S. and Van Dommelen, L., 1996, "A New Diffusion Procedure for Vortex Methods," *J. Comp. Phys.*, Vol. 127, pp. 88~109.
- (8) Ro, K. D. and Tsutahara, M., 1997, "Numerical Analysis of Unsteady Flow in the Weis-Fogh Mechanism by the 3D Discrete Vortex Method," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 119, pp. 96~102.
- (9) Tsutahara, M., Wang, Z. and Kimura, T., 1994, "Flows past a Rotating Circular Cylinder by the VIC Method," *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci.*, Vol. 42, No.481, pp. 50~58.
- (10) 種子田定俊, 1988, 画像から學ぶ流体力學, 朝倉書店.