

〈 논 문 〉

유체로 채워진 삼중 원통셸의 해석적 진동 특성 평가

Evaluation of Analytical Vibration Characteristics for Triple Cylindrical Shells Filled with Fluid

지 용 관[†], 이 영신*

Yong-Kwan Ji and Young-Shin Lee

(2001년 10월 13일 접수 : 2002년 1월 14일 심사완료)

Key Words : Triple Cylindrical Shells(삼중 원통셸), Axial Mode Number(축방향모드수), Circumferential Mode Number(원주방향모드수), Velocity Potential(속도 포텐셜), Surface Loading(겉수면 하중), Fourier Series Expansion(Fourier 급수전개), Stoke's Transformation(Stokes 변환), Modal Characteristics(모드특성)

ABSTRACT

The free vibration characteristics of the triple cylindrical shells filled with fluid are investigated. The triple cylindrical shells are filled with compressible fluid. The boundary condition is clamped at both ends. Analytical method is developed to evaluate natural frequencies of triple cylindrical shells using Sanders' shell theory and Fourier series expansion by Stokes' transformation. Their results are compared with those of finite element method to verify the validation of the method developed. The modal characteristics of shells filled with fluid at region 1,2 and 3 are evaluated.

기호설명

$A_{mnj}, B_{0nj}, C_{0mj}$: 각 원통셸의 모드함수와 관련된 Fourier 계수	R_j	: 원통셸의 반경
D_{mnj}, E_{mnj}	: 유체의 모드함수와 관련된 Fourier 계수	r, z, θ	: 반경방향, 축방향, 집진방향의 좌표
E	: 원통셸의 탄성계수	t	: 시간
h	: 원통셸의 두께	u_j, v_j, w_j	: 축방향, 집진방향, 반경방향의 동적변위
L	: 원통셸의 길이	Ψ	: r, θ 에 대한 속도 포텐셜 함수
m	: 축방향 Fourier 급수 전개항	ξ	: z 에 대한 속도 포텐셜 함수
m'	: 축방향 모드수	η	: r 에 대한 속도 포텐셜 함수
n	: 원주방향 모드수	χ	: θ 에 대한 속도 포텐셜 함수
\hat{q}_j	: 겉수면하중의 모드함수	ν	: Poisson 비
		ϕ	: r, θ, z, t 에 대한 일반적인 속도 포텐셜 함수

1. 서 론

최근 석유화학산업 분야에서는 지가의 상승으로 인해 다종의 석유 및 화학약품 생산시 여러 개의 저장 탱크가 필요하며, 여러 개의 저장용기 설치시 대지의

[†] 책임저자, 정회원, 한국전력기술(주)
E-mail : rmjyk@ns.kopec.co.kr
Tel : (042) 868-4149, Fax : (042) 863-4862
* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과

고비용이 예상되므로 면적의 소요가 적은 여러 개의 격실로 된 다중 구조 형태의 원통형 식유 저장탱크가 관심의 대상이 되고 있다. 뿐만 아니라 원자력발전소의 신형 및 연구용원자로의 구조에서도 다중 원통셸(multi-cylindrical shell) 구조의 설계개념이 도입되고 있다.

원자력발전소의 원자로 용기 내부에는 여러 개의 원통셸 구조로 된 내부구조물이 설치된다. 중요한 기능을 하는 원자로는 경수나 중수 등의 냉각재로 채워져 있으며 고온 고압에 견딜 수 있도록 설계되어진다. 그리고 이 냉각수의 유희를 통하여 발생되는 유체유발하중과, 펌프의 구동으로 발생하는 펌프 맥동하중 및 외부에서 가해지는 지진하중 등이 작용한다. 이런 하중에 대한 원자로의 구조적 진전성 평가는 필수적이라 할 수 있으며, 각 하중들에 대한 구조적 진전성 평가를 위해서 스펙트럼해석, 조화진동해석,¹¹⁾ 분자관과단해석 및 지진해석등의 다양하고도 전문적인 구조해석 수행이 요구되며, 이들 해석을 위해서 고유진동해석^(2,3) 이 선행되어야 한다. 유체로 채워진 원통셸에 대한 고유진동해석은 수많은 학자들에 의해 이루어졌으며, 단일 원통셸,¹⁴⁻²⁰⁾ 이중원통셸¹⁹⁻²²⁾에 대한 연구는 많은데 비해 다중원통셸⁽¹³⁾의 연구는 거의 전무한 상태이다.

따라서 본 논문에서는 다중 원통셸 구조인 3중 원통셸의 고유진동 특성을 이론적인 해석방법으로 전개하였으며 해의 타당성을 검증하기 위해 유한요소법을 사용한 결과와 비교하였다.

2. 이론 해석

2.1 3중 원통셸의 운동방정식 및 경계조건

유체로 채워진 3중 원통셸의 고유진동 특성을 파악하기 위해 Stokes 변환을 이용한 Fourier 급수⁽³¹⁾와 Sanders의 셸이론⁽³²⁾을 적용하여 이론식을 전개하였다. 유체의 영향을 고려한 Sanders의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.⁽³⁰⁾

$$R_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + \frac{(1-\nu)}{2} \left(1 + \frac{k_j^2}{4} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial \theta^2} + R_j \left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{3(1-\nu)}{8} k_j^2 \right) \frac{\partial^3 v_j}{\partial z \partial \theta^2} - \nu R_j \frac{\partial w_j}{\partial z} + k_j R_j \frac{(1-\nu)}{2} \frac{\partial^3 w_j}{\partial z \partial \theta^2} = \frac{\rho_j R_j^2 (1-\nu^2) \partial^2 u_j}{E_j \partial t^2} \quad (1a)$$

$$R_i \left(\frac{1+\nu}{2} - \frac{3(1-\nu)}{8} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial z \partial \theta} + R_i^2 \frac{(1-\nu)}{2} \left(1 + \frac{9k_i^2}{4} \right) \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} + (1+k_i^2) \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} + \frac{(3-\nu)}{2} k_i R_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^2} = \frac{\rho_i R_i^2 (1-\nu^2) \partial^2 v_i}{E_i \partial t^2} \quad (1b)$$

$$\nu R_i \frac{\partial u_i}{\partial z} + k_i R_i \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2 u_i}{\partial z \partial \theta^2} + \frac{\partial v_i}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} - k_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} - \frac{(3-\nu) k_i R_i^2 \partial^2 v_i}{2 \partial z^2 \partial \theta} - w - k_i \left[R_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - 2R_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial \theta^4} \right] = \frac{\rho_i R_i^2 (1-\nu^2) \partial^2 w_i}{E_i \partial t^2} + \frac{R_i^2}{D_i} P_i \quad (1c)$$

수식에서 첨자 j 는 원통셸의 표시를 위해 사용하였고, 반경이 $r=0$ 에서부터 시작하여 $j=1$ 은 첫 번째 셸, $j=2$ 는 두 번째 셸, $j=3$ 은 세 번째 셸을 나타낸다. 유체의 영향은 식 (1c)에서 유체의 압력 P_j 를 포함하는 마지막 항으로 표현된다. 그리고 $k_j = h_j^2/12R_j^2$ ($j=1,2,3$)이다.

양단이 고정된 원통셸에 대한 기하학적 경계조건과 힘의 경계조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_j(0) = v_j(0) = w_j(0) = \frac{\partial w_j(0)}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0 \quad (2a)$$

$$u_j(L) = v_j(L) = w_j(L) = \frac{\partial w_j(L)}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=L \quad (2b)$$

$$N_{zj}(0) = N_{\theta j}(0) = Q_{zj}(0) = M_{zj}(0) = 0 \quad \text{at } z=0 \quad (2c)$$

$$N_{zj}(L) = N_{\theta j}(L) = Q_{zj}(L) = M_{zj}(L) = 0 \quad \text{at } z=L \quad (2d)$$

원통셸의 임의의 단면에 작용하는 하중과 변위사이의 관계는 다음과 같다.

$$N_{zj} = D_j \left[\frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\nu}{R_j} \frac{\partial v_j}{\partial \theta} + \frac{\nu}{R_j} w_j \right] \quad (3a)$$

$$N_{\theta j} = \frac{D_j (1-\nu)}{2} \left[\frac{1}{R_j} \left(1 - \frac{3k_j}{4} \right) \frac{\partial u_j}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{9k_j}{4} \right) \frac{\partial v_j}{\partial z} - 3k_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial z \partial \theta} \right] \quad (3b)$$

$$Q_{zj} = K_j \left[\frac{(1-\nu) \partial^2 u_j}{2R_j \partial \theta^2} + \frac{(3-\nu) \partial^2 v_j}{2R_j \partial z \partial \theta} - \frac{(2-\nu) \partial^3 w_j}{R_j \partial z \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \right] \quad (3c)$$

$$M_{zj} = K_j \left[\frac{\nu}{R_j^2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 w_j}{\partial z^2} \right] \quad (3d)$$

여기서 $N_{zj}, N_{\theta j}, M_{zj}$ 는 원통셸의 단위길이당 막인장력, 막전단력, 횡단단력, 굽힘모멘트를 각각 나타내며,

이하중의 작용방향은 Fig. 1에서 보여준다. 그리고, $D_j = Eh_j / (1 - \nu^2)$, $K_j = Eh_j^3 / 12(1 - \nu^2)$ $j = 1, 2, 3$ 을 나타낸다.

2.2 모드함수

3중 원통형의 고유진동에 관한 동적변위 들은 축방향의 모드함수와 원주방향의 모드함수 및 시간에 대한 조화함수의 곱으로 나타낼 수 있으며 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u(\theta, z, t) \\ v(\theta, z, t) \\ w(\theta, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}(\theta, z) \\ \hat{v}(\theta, z) \\ \hat{w}(\theta, z) \end{bmatrix} \exp(i\alpha t) \quad (4)$$

여기서 $\hat{u}_j(\theta, z)$, $\hat{v}_j(\theta, z)$, $\hat{w}_j(\theta, z)$ 는 각각 원통형 쉘의 축방향, 접선방향, 그리고 반경방향 변위를 나타내는 모드함수 이고, $i = \sqrt{-1}$ 이며, ω 는 유체와 연성된 원통형 구조물의 고유진동수이다. 이 모드함수는 서로가 직교를 이루는 축방향 Fourier 급수의 선형조합으로 표현할 수 있으며 다음 식과 같다.

$$\hat{u}_j(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{jn} \sin\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos n\theta \quad (5a)$$

$$\hat{v}_j(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{jn} + \sum_{m=1}^{\infty} B_{jnm} \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \right] \sin n\theta \quad (5b)$$

$$\hat{w}_j(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_{jn} + \sum_{m=1}^{\infty} C_{jnm} \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \right] \cos n\theta \quad (5c)$$

모드함수의 미분은 참고문헌 (3)에서 사용한 Stokes' transformation 을 이용한 Fourier 급수 전개법을 이용하여다.

2.3 압축성 유체의 운동방정식

비점성이고 압축성인 유체의 운동은 속도 포텐셜 (velocity potential)로 나타낼 수 있고 다음의 Helmholtz 식을 만족한다.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (6)$$

여기서 c 는 유체내에서의 음속으로 $(B/\rho_0)^{1/2}$ 와 동일한 값을 갖는다. B 는 유체의 체적탄성계수이고 ρ_0 는 유체의 밀도이다. 유체의 일반적인 속도포텐셜 ϕ 는 변수분리가 가능하고 속도포텐셜의 모드함수는 식

(7)과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(r, \theta, z, t) = i\omega \hat{\phi}(r, \theta, z) \exp(i\alpha t) \quad (7)$$

식 (6)에 식 (7)을 대입하면 식 (8)이 되고

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial z^2} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{\phi} \quad (8)$$

변수분리를 이용하여 정리하면 다음과 같은 베셀 (Bessel) 함수의 형태로 표현된다.

$$r^2 \eta'' + r \eta' + r^2 \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \eta = 0 \quad (9)$$

여기서, 식 (9)로 유도되기 위해 $\xi(z) = \bar{a} \cos(m\pi z/L)$, $\psi(r, \theta) = \eta(r) \chi(\theta)$ $\chi(\theta) = \bar{b} \cos n\theta$ 로 놓고 2변 변수 분리하였다. 식 (9)의 일반해는 다음과 같이 된다.

$$\eta(r) = \bar{a} D_n(\alpha_n r) + \bar{a} E_n(\alpha_n r) \quad (10)$$

$\frac{m\pi}{L} < \frac{\omega}{c}$ 일 경우,

$$D_n(\alpha_n r) = J_n(\alpha_n r), \quad E_n(\alpha_n r) = Y_n(\alpha_n r) \text{ 이 되고}$$

$\frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{c}$ 일 경우,

$$D_n(\alpha_n r) = I_n(\alpha_n r), \quad E_n(\alpha_n r) = K_n(\alpha_n r) \text{ 이 된다.}$$

이것을 속도 포텐셜로 나타내면 다음과 같다.

$$\hat{\phi}_j(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} D_{jnm} D_n(\alpha_n r) \\ + E_{jnm} E_n(\alpha_n r) \end{matrix} \right] \cos\left(\frac{m\pi}{L} z\right) \cos n\theta \quad (11)$$

여기서 $\alpha_n = \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]}$ J_n 는 n 차 제 1종 베셀 함수이고, I_n 는 n 차 제1종 수정 베셀함수이다. 그리고 Y_n 는 n 차 제2종 베셀함수이고, K_n 는 n 차 제 2종 수정 베셀함수이다.

원통형은 상단과 하단이 강체표면으로 딱혀 있다고 가정하고 쉘 두께는 얇은 쉘 ($h_j \geq 0$)로 가정하여 수식을 전개하였다. 유체와 원통형은 분리되어 운동하는 것이 아니라, 외력을 받을시 함께 운동하므로 유체와 원통 쉘이 접하는 접수면에서 쉘의 반경방향 속도와 유체의 반경방향의 속도가 동일해야 한다. Fig. 1에서 보여준 바와 같이 쉘과 쉘사이 에 물이 채워지는 경우를 3개의 영역으로 구분하였으며 다음과 같다.

- 영역 1(region 1): $0 \leq r \leq R_1$
- 영역 2(region 2): $R_1 \leq r \leq R_2$
- 영역 3(region 3): $R_2 \leq r \leq R_3$

먼저 영역 1 에 대한 유체와 셀의 경계조건은

$$r = 0, \quad \phi_1 = \infty \quad (12a)$$

$$r = R_1, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(R_1, \theta, z, t) = \frac{\partial w_1}{\partial r}(\theta, z, t) \quad (12b)$$

이 되며 이것은 식 (12c)와 같이 쓸 수 있다.

$$r = R_1, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(R_1, \theta, z) = \hat{w}_1(\theta, z) \quad (12c)$$

영역 2 에 대한 경계조건도 영역 1에서 처럼 하면 다음과 같다.

$$r = R_1; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial r}(R_1, \theta, z) = \hat{w}_1(\theta, z) \quad (13a)$$

$$r = R_2; \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial r}(R_2, \theta, z) = \hat{w}_2(\theta, z) \quad (13b)$$

영역 3 에서도 영역 2와 같은 방법으로 하면 식 (18)이 유도된다.

$$r = R_2; \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial r}(R_2, \theta, z) = \hat{w}_2(\theta, z) \quad (14a)$$

$$r = R_3; \quad \frac{\partial \phi_3}{\partial r}(R_3, \theta, z) = \hat{w}_3(\theta, z) \quad (14b)$$

위의 경계조건을 적용하여 D_{mnj} , E_{mnj} 과 C_{mnj} 에 관계식으로 나타낼 수 있다. 식 (11)에 유체의 경계조건을 대입하면 다음과 같이 된다.

(1) 영역 1 에서는

i) $r = 0$ 에서, $E_{m01} = 0$

ii) $r = R_1$ 에서는 식 (12c)를 적용하여 정리하면

$$\begin{aligned} C_{m01} &= \alpha_m D_{m1}'(\alpha_m R_1) D_{m01} \\ D_{m01} &= \frac{1}{\alpha_m D_n'(\alpha_m R_1)} D_{m01} \end{aligned} \quad (15)$$

(2) 영역 2에서도 영역 1에서와 같은 방법으로 하면 된다.

$$\begin{aligned} C_{m02} &= \alpha_m [D_{m02}'(\alpha_m R_1) + E_{m02}'(\alpha_m R_1)] \\ C_{m02} &= \alpha_m [D_{m02}'(\alpha_m R_2) + E_{m02}'(\alpha_m R_2)] \\ \begin{bmatrix} D_{m02} \\ E_{m02} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\alpha_m H_{12}} \begin{bmatrix} E_n'(\alpha_m R_2) & -E_n'(\alpha_m R_1) \\ -D_n'(\alpha_m R_2) & D_n'(\alpha_m R_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m01} \\ C_{m02} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

$$H_{12} = D_n'(\alpha_m R_1) E_n'(\alpha_m R_2) - E_n'(\alpha_m R_1) D_n'(\alpha_m R_2)$$

(3) 영역 3에서도 같은 방법으로 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{m03} &= \alpha_m [D_{m03}'(\alpha_m R_2) + E_{m03}'(\alpha_m R_2)] \\ C_{m03} &= \alpha_m [D_{m03}'(\alpha_m R_3) + E_{m03}'(\alpha_m R_3)] \\ \begin{bmatrix} D_{m03} \\ E_{m03} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\alpha_m H_{23}} \begin{bmatrix} E_n'(\alpha_m R_3) & -E_n'(\alpha_m R_2) \\ -D_n'(\alpha_m R_3) & D_n'(\alpha_m R_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{m02} \\ C_{m03} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서,

$$H_{23} = D_n'(\alpha_m R_2) E_n'(\alpha_m R_3) - E_n'(\alpha_m R_2) D_n'(\alpha_m R_3)$$

2.4 원통셀의 접수면 하중(surface loading)

유체와 접촉하는 원통셀의 접수면에 작용하는 유체 압력은 식 (18)과 같이 나타낼 수 있으며 다음과 같이 계산된다.

$$P_j = (r, \theta, z, t) = -\rho_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = \rho_0 \omega^2 \hat{\phi}_j(r, \theta, z) \exp(i\omega t) \quad (18)$$

각 셀의 접수면 하중은 다음과 같이 정의한다.

$$q_j(\theta, z, t) = \hat{q}_j(\theta, z) \exp(i\omega t) \quad (19)$$

여기서 $\hat{q}_j(\theta, z)$ 는 접수면하중에 대한 모드함수이다.

(1) 원통셀 1에서의 접수면 하중

$$\begin{aligned} q_1(\theta, z) &= \frac{R_1^2}{D} [\hat{p}_1(R_1, \theta, z) - \hat{p}_1(R_1, \theta, z)] \\ &= \frac{\rho_0 \omega^2 R_1^2}{D} [\hat{\phi}_1(R_1, \theta, z) - \hat{\phi}_1(R_1, \theta, z)] \end{aligned} \quad (20a)$$

식 (11)에서 $\hat{\phi}_1(R_1, \theta, z)$ 와 $\hat{\phi}_1(R_1, \theta, z)$ 를 식 (20a)에 대입하면 다음과 같다.

$$\hat{q}_1(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ D_n(\alpha_m R_1) \begin{bmatrix} \frac{E_n'(\alpha_m R_1)}{\alpha_m H_{12}} \\ -\frac{D_n'(\alpha_m R_1)}{D_n'(\alpha_m R_1)} C_{m01} + C_{m02} \end{bmatrix} \right\} \left\{ -E_n(\alpha_m R_1) E_{m01} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\rho_s \omega^2 R_1^2}{D} \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \\ & = \frac{\rho_s \omega^2 R_1^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E_{11} C_{m1}}{\alpha_s H_{12} D'(\alpha_s R_1)} + E_{12} C_{m2} \right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\text{여기서, } E_{11} = \frac{-\Sigma_{11} D'(\alpha_s R_1)}{\alpha_s H_{12} D'(\alpha_s R_1)}, \quad E_{12} = \frac{\Sigma_{11}}{\alpha_s H_{12}}$$

$$\Sigma_{11} = D_s(\alpha_s R_1) E'_s(\alpha_s R_1) - D'_s(\alpha_s R_1) E_s(\alpha_s R_1)$$

식 (20b)를 다시 정리하면, 셀 1에 작용하는 접수면 하중은 다음과 같이 요약된다.

$$\hat{q}_1(\theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{m1} C_{m1}}{\alpha_s H_{12}} + G_{m1} C_{m1} \right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \quad (21)$$

여기서,

$$\Gamma_{m1} = \left(\frac{\rho_s C}{\rho h \omega} \right) \left[\frac{J_s(\alpha_s R_1 / C) Y'_s(\alpha_s R_1 / C) - Y_s(\alpha_s R_1 / C) J'_s(\alpha_s R_1 / C)}{J'_s(\alpha_s R_1 / C) Y'_s(\alpha_s R_1 / C) - Y'_s(\alpha_s R_1 / C) J_s(\alpha_s R_1 / C)} \right] \times \frac{J'_s(\alpha_s R_1 / C)}{J_s(\alpha_s R_1 / C)} \Omega_1$$

$$G_{m1} = \frac{\rho_s C}{\rho h \omega} \frac{J_s(\alpha_s R_1 / C) Y'_s(\alpha_s R_1 / C) - Y_s(\alpha_s R_1 / C) J'_s(\alpha_s R_1 / C)}{J'_s(\alpha_s R_1 / C) Y'_s(\alpha_s R_1 / C) - Y'_s(\alpha_s R_1 / C) J_s(\alpha_s R_1 / C)} \Omega_1$$

$$(i) \quad \frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{C}$$

$$\Gamma_{m1} = -\frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_1) K'_s(\alpha_s R_1) - K_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1)] Y'_s(\alpha_s R_1)}{[I'_s(\alpha_s R_1) K'_s(\alpha_s R_1) - K'_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1)] Y'_s(\alpha_s R_1)} \Omega_1$$

$$G_{m1} = \frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_1) K'_s(\alpha_s R_1) - K_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1)]}{[I'_s(\alpha_s R_1) K'_s(\alpha_s R_1) - K'_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1)]} \Omega_1$$

$$(ii) \quad \frac{m\pi}{L} < \frac{\omega}{C}$$

$$\Gamma_{m1} = -\frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1) - Y_s(\alpha_s R_1) J'_s(\alpha_s R_1)] Y'_s(\alpha_s R_1)}{[I'_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1) - Y'_s(\alpha_s R_1) J_s(\alpha_s R_1)] Y'_s(\alpha_s R_1)} \Omega_1$$

$$G_{m1} = \frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1) - Y_s(\alpha_s R_1) J'_s(\alpha_s R_1)]}{[I'_s(\alpha_s R_1) Y'_s(\alpha_s R_1) - Y'_s(\alpha_s R_1) J_s(\alpha_s R_1)]} \Omega_1$$

$$\Omega_j = \frac{\rho R_j^2 (1 - \nu^2)}{E} \omega^2 \quad j = 1, 2, 3.$$

(2) 셀 2에서의 접수면 하중

$$\hat{q}_2(\theta, z) = \frac{R_2^2}{D} [\hat{p}_2(R_2, \theta, z) - \hat{p}_1(R_2, \theta, z)] \quad (22a)$$

$$\hat{p}_2(R_2, \theta, z) - \hat{p}_1(R_2, \theta, z) = \rho_s \omega^2 [\hat{\phi}_2(R_2, \theta, z) - \hat{\phi}_1(R_2, \theta, z)]$$

셀 1에서와 같은 방법으로 셀 2에 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \hat{q}_2(\theta, z) &= \frac{\rho_s \omega^2 R_2^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E_{21} C_{m1} + E_{22} C_{m2}}{\alpha_s H_{12} D'(\alpha_s R_2)} + E_{23} C_{m3} \right) \\ & \times \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \end{aligned} \quad (22b)$$

여기서,

$$E_{21} = \frac{\Sigma_{22}}{\alpha_s H_{12}}, \quad E_{22} = \frac{\Sigma_{22} H_{21}}{\alpha_s H_{12} H_{21}}, \quad E_{23} = \frac{\Sigma_{22}}{\alpha_s H_{23}}$$

$$\Sigma_{22} = D_s(\alpha_s R_2) E'_s(\alpha_s R_2) - E_s(\alpha_s R_2) D'_s(\alpha_s R_2)$$

$$H_{21} = D'_s(\alpha_s R_2) E'_s(\alpha_s R_2) - E_s(\alpha_s R_2) D'_s(\alpha_s R_2)$$

셀 2에 작용하는 접수면 하중은 다음과 같이 요약된다.

$$\hat{q}_2(\theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{m2} C_{m1} + G_{m2} C_{m2}}{\alpha_s H_{12}} + T_{m2} C_{m1} \right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \quad (23)$$

여기서

$$\Gamma_{m2} = \frac{\rho_s C}{\rho h \omega} \frac{[J_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y_s(\alpha_s R_2 / C) J'_s(\alpha_s R_2 / C)]}{[J'_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y'_s(\alpha_s R_2 / C) J_s(\alpha_s R_2 / C)]} \Omega_2$$

$$T_{m2} = \frac{\rho_s C}{\rho h \omega} \frac{J_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y_s(\alpha_s R_2 / C) J'_s(\alpha_s R_2 / C)}{[J'_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y'_s(\alpha_s R_2 / C) J_s(\alpha_s R_2 / C)]} \Omega_2$$

$$G_{m2} = \frac{\rho_s C}{\rho h \omega} \frac{[J_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y_s(\alpha_s R_2 / C) J'_s(\alpha_s R_2 / C)]}{[J'_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y'_s(\alpha_s R_2 / C) J_s(\alpha_s R_2 / C)]} \times \frac{J'_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y'_s(\alpha_s R_2 / C) J_s(\alpha_s R_2 / C)}{[J'_s(\alpha_s R_2 / C) Y'_s(\alpha_s R_2 / C) - Y'_s(\alpha_s R_2 / C) J_s(\alpha_s R_2 / C)]} \Omega_2$$

$$(i) \quad \frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{C}$$

$$\Gamma_{m2} = \frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]}{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]} \Omega_2$$

$$T_{m2} = \frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]}{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]} \Omega_2$$

$$G_{m2} = \frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[I_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]}{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]} \times \frac{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]}{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]} \Omega_2$$

$$\times \frac{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]}{[I'_s(\alpha_s R_2) K'_s(\alpha_s R_2) - K'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2)]} \Omega_2$$

$$(ii) \quad \frac{m\pi}{L} < \frac{\omega}{C}$$

$$\Gamma_{m2} = \frac{\rho_s}{\rho h \alpha_s} \frac{[J_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2) - Y_s(\alpha_s R_2) J'_s(\alpha_s R_2)]}{[J'_s(\alpha_s R_2) Y'_s(\alpha_s R_2) - Y'_s(\alpha_s R_2) J_s(\alpha_s R_2)]} \Omega_2$$

$$T_{m\pm} = \frac{\rho_c}{\rho h \alpha_n} \frac{[J_n(\alpha_n R) Y_n'(\alpha_n R) - Y_n(\alpha_n R) J_n'(\alpha_n R)]}{[J_n'(\alpha_n R) Y_n(\alpha_n R) - Y_n'(\alpha_n R) J_n(\alpha_n R)]} \Omega,$$

$$G_{m\pm} = \frac{\rho_c}{\rho h \alpha_n} \frac{[J_n(\alpha_n R) Y_n'(\alpha_n R) - Y_n(\alpha_n R) J_n'(\alpha_n R)]}{\rho h \alpha_n [J_n'(\alpha_n R) Y_n(\alpha_n R) - Y_n'(\alpha_n R) J_n(\alpha_n R)]} \Omega,$$

$$G_{m\pm} = \frac{\rho_c}{\rho h \alpha_n} \frac{[J_n(\alpha_n R) Y_n'(\alpha_n R) - Y_n(\alpha_n R) J_n'(\alpha_n R)]}{\rho h \alpha_n [J_n'(\alpha_n R) Y_n(\alpha_n R) - Y_n'(\alpha_n R) J_n(\alpha_n R)]}$$

$$T_{m\pm} = \frac{\rho_c}{\rho h \alpha_n} \frac{[J_n'(\alpha_n R) Y_n(\alpha_n R) - J_n(\alpha_n R) Y_n'(alpha_n R)]}{\rho h \alpha_n [J_n'(\alpha_n R) Y_n(\alpha_n R) - Y_n'(\alpha_n R) J_n(\alpha_n R)]} \Omega,$$

(3) 셀 3에서의 접수면 하중

셀 1과 2에서의 접수면 하중을 구하던 것과 같은 방법으로 셀 3에 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\hat{q}_3(\theta, z) = \frac{R^2}{D} [\hat{p}_3(R, \theta, z)] = \frac{\rho_c \omega^2 R^2}{D} [\hat{\phi}_3(R, \theta, z)] \quad (24a)$$

따라서 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\hat{q}_3(\theta, z) = \frac{\rho_c \omega^2 R^2}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{E_{n1} C_{m2}}{+ E_{n2} C_{m1}} \right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \quad (24b)$$

여기서, $E_{n1} = \frac{\Sigma_{n1}}{\alpha_n H_{2n}}$, $E_{n2} = -\frac{\Sigma_{n2}}{\alpha_n H_{2n}}$

$$\Sigma_{n1} = D_n(\alpha_n R) E_n'(\alpha_n R) - E_n(\alpha_n R) D_n'(\alpha_n R)$$

$$\Sigma_{n2} = D_n(\alpha_n R) E_n(\alpha_n R) - E_n(\alpha_n R) D_n(\alpha_n R)$$

셀 3에 작용하는 접수면 하중은 다음과 같이 요약된다.

$$\hat{q}_3(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{G_{m\pm} C_{m2}}{+ T_{m\pm} C_{m1}} \right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos n\theta \quad (25)$$

여기서,

$$G_{0n\pm} = \frac{\rho_c C}{\rho h \omega} \frac{[J_n(\omega R / C) Y_n'(\omega R / C) - Y_n(\omega R / C) J_n'(\omega R / C)]}{[J_n'(\omega R / C) Y_n(\omega R / C) - Y_n'(\omega R / C) J_n(\omega R / C)]} \Omega,$$

$$T_{0n\pm} = \frac{\rho_c C}{\rho h \omega} \frac{[J_n'(\omega R / C) Y_n(\omega R / C) - J_n(\omega R / C) Y_n'(\omega R / C)]}{\rho h \omega [J_n'(\omega R / C) Y_n(\omega R / C) - Y_n'(\omega R / C) J_n(\omega R / C)]} \Omega,$$

(i) $\frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{C}$

$$G_{m\pm} = \frac{\rho_c}{\rho h \alpha_n} \frac{[I_n(\alpha_n R) K_n'(\alpha_n R) - K_n(\alpha_n R) I_n'(\alpha_n R)]}{\rho h \alpha_n [I_n'(\alpha_n R) K_n(\alpha_n R) - K_n'(\alpha_n R) I_n(\alpha_n R)]} \Omega,$$

$$T_{m\pm} = \frac{\rho_c}{\rho h \alpha_n} \frac{[I_n'(\alpha_n R) K_n(\alpha_n R) - I_n(\alpha_n R) K_n'(\alpha_n R)]}{\rho h \alpha_n [I_n'(\alpha_n R) K_n(\alpha_n R) - K_n'(\alpha_n R) I_n(\alpha_n R)]} \Omega,$$

(ii) $\frac{m\pi}{L} \geq \frac{\omega}{C}$

2.5 고유진동방정식 유도

원통형 양단의 경계조건을 고려하기 위하여 모드함수로 나타낸 식 (5)에 유한 Fourier 변환(finite fourier transformation)을 취하였다. 참고문헌 (3)에서는 이것을 일명 "Stokes' transformation"이라고 하였다. 식 (21), (23) 및 (25)로 표현된 유체에 의한 하중과 원통형의 경계조건 및 Fourier 급수로 나타나는 변위 및 변위의 미분값들을 식 (1)에 대입하면 Fourier 계수 B_{0n1} , C_{0n1} , $B_{m\pm 1}$, $C_{m\pm 1}$ 에 대한 다음과 같은 행렬식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{31} & 0 & S_{41} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{12} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & S_{42} & S_{22} & S_{52} & 0 & S_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{13} & S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & S_{43} & S_{23} & S_{53} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0n1} \\ C_{0n1} \\ B_{m2} \\ C_{m2} \\ B_{m3} \\ C_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -na_{31}u_1 + a_{41}\tilde{v}_1 + na_{71}\tilde{w}_1 \\ -(a_{41} + n^2 a_{51})u_1 + a_{71}\tilde{v}_1 + n^2 a_{91}\tilde{w}_1 - a_{81}\tilde{w}_1 \\ -na_{32}u_2 + a_{42}\tilde{v}_2 + na_{72}\tilde{w}_2 \\ -(a_{42} + n^2 a_{52})u_2 + a_{72}\tilde{v}_2 + n^2 a_{92}\tilde{w}_2 - a_{82}\tilde{w}_2 \\ -na_{33}u_3 + a_{43}\tilde{v}_3 + na_{73}\tilde{w}_3 \\ -(a_{43} + n^2 a_{53})u_3 + a_{73}\tilde{v}_3 + n^2 a_{93}\tilde{w}_3 - a_{83}\tilde{w}_3 \end{bmatrix} \quad (26a)$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{41} & d_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41} & d_{61} & d_{71} & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{22} & d_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{22} & d_{42} & d_{52} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & d_{32} & d_{52} & d_{62} & 0 & 0 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{23} & d_{43} & d_{53} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_4 & d_{33} & d_{53} & d_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0n1} \\ B_{0n1} \\ C_{0n1} \\ A_{m2} \\ B_{m2} \\ C_{m2} \\ A_{m3} \\ B_{m3} \\ C_{m3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{12} & t_{13} & t_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{51} & t_{52} & t_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{61} & t_{62} & t_{63} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_{71} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i' + (-1)^i u_i' \\ \bar{v}_i' + (-1)^i \bar{v}_i' \\ \bar{w}_i' + (-1)^i \bar{w}_i' \\ \bar{w}_i' + (-1)^i \bar{w}_i' \\ u_i' + (-1)^i u_i' \\ \bar{v}_i' + (-1)^i \bar{v}_i' \\ \bar{w}_i' + (-1)^i \bar{w}_i' \\ \bar{w}_i' + (-1)^i \bar{w}_i' \\ u_i' + (-1)^i u_i' \\ \bar{v}_i' + (-1)^i \bar{v}_i' \\ \bar{w}_i' + (-1)^i \bar{w}_i' \\ \bar{w}_i' + (-1)^i \bar{w}_i' \end{bmatrix} \quad (26b)$$

한편, 식 (3)의 변위-하중 관계식을 이용하면 원동셀 양단에서의 하중 N_{z0}, Q_{z0} 는 식 (27)과 같이 셀 양단에서의 변위와 미분값으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} N_{z0}(0, \theta) &= (q_1 u_1' + q_2 \bar{v}_1' + q_3 \bar{w}_1') \sin n\theta \\ N_{z0}(L, \theta) &= -(q_1 u_1' + q_2 \bar{v}_1' + q_3 \bar{w}_1') \sin n\theta \\ Q_{z0}(0, \theta) &= (g_1 u_1' + g_2 \bar{v}_1' + g_3 \bar{w}_1' + q_4 \bar{w}_1') \cos n\theta \\ Q_{z0}(L, \theta) &= -(g_1 u_1' + g_2 \bar{v}_1' + g_3 \bar{w}_1' + q_4 \bar{w}_1') \cos n\theta \end{aligned} \quad (27)$$

여기서, $q_i (i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, 3)$ 는 식 (3)에서 유도된 계수이며, 역으로 변위 및 변위의 미분값들에 대한 셀 양단의 경계값들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{v}_j' &= g_{1j} u_j' + g_{2j} \bar{w}_j' + g_{3j} N_{z0}'' \\ \bar{v}_j' &= g_{1j} u_j' + g_{2j} \bar{w}_j' + g_{3j} N_{z0}'' \\ \bar{w}_j' &= g_{4j} u_j' + g_{5j} \bar{v}_j' + g_{6j} N_{z0}'' + g_{7j} Q_{z0}' \\ \bar{w}_j' &= g_{4j} u_j' + g_{5j} \bar{v}_j' + g_{6j} N_{z0}'' + g_{7j} Q_{z0}' \end{aligned} \quad (28)$$

여기서, $g_{ij} (i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, 3)$ 는 식 (27)로부터 유도된 계수이다. 식 (28)을 식 (26a)과 식 (26b)에 대입하면 결국 Fourier 계수들은 \bar{v}_j, \bar{w}_j 대신, $u_j, \bar{w}_j, N_{z0}, Q_{z0}$ 의 변수들로 나타내게 된다.

$$B_{0n1} = \sum_{j=1}^3 (\beta_{1j} u_j + \beta_{2j} \bar{w}_j + \beta_{3j} N_{z0} + \beta_{4j} Q_{z0}) \quad (29a)$$

$$B_{0n2} = \sum_{j=1}^3 (\beta_{5j} u_j + \beta_{6j} \bar{w}_j + \beta_{7j} N_{z0} + \beta_{8j} Q_{z0}) \quad (29b)$$

$$B_{0n3} = \sum_{j=1}^3 (\beta_{9j} u_j + \beta_{10j} \bar{w}_j + \beta_{11j} N_{z0} + \beta_{12j} Q_{z0}) \quad (29c)$$

$$C_{0n1} = \sum_{j=1}^3 (\delta_{1j} u_j + \delta_{2j} \bar{w}_j + \delta_{3j} N_{z0} + \delta_{4j} Q_{z0}) \quad (29d)$$

$$C_{0n2} = \sum_{j=1}^3 (\delta_{5j} u_j + \delta_{6j} \bar{w}_j + \delta_{7j} N_{z0} + \delta_{8j} Q_{z0}) \quad (29e)$$

$$C_{0n3} = \sum_{j=1}^3 (\delta_{9j} u_j + \delta_{10j} \bar{w}_j + \delta_{11j} N_{z0} + \delta_{12j} Q_{z0}) \quad (29f)$$

$$\begin{bmatrix} A_{mn1} \\ B_{mn1} \\ C_{mn1} \\ A_{mn2} \\ B_{mn2} \\ C_{mn2} \\ A_{mn3} \\ B_{mn3} \\ C_{mn3} \end{bmatrix} = [\lambda_n] \begin{bmatrix} b_{11} \bar{u}_1 \\ b_{21} \bar{u}_1 + b_{31} \bar{w}_1 + b_{41} \bar{N}_{z0} \\ b_{51} \bar{u}_1 + b_{61} \bar{w}_1 + b_{71} \bar{N}_{z0} + b_{81} \bar{Q}_{z0} \\ b_{12} \bar{u}_2 \\ b_{22} \bar{u}_2 + b_{32} \bar{w}_2 + b_{42} \bar{N}_{z0} \\ b_{52} \bar{u}_2 + b_{62} \bar{w}_2 + b_{72} \bar{N}_{z0} + b_{82} \bar{Q}_{z0} \\ b_{13} \bar{u}_3 \\ b_{23} \bar{u}_3 + b_{33} \bar{w}_3 + b_{43} \bar{N}_{z0} \\ b_{53} \bar{u}_3 + b_{63} \bar{w}_3 + b_{73} \bar{N}_{z0} + b_{83} \bar{Q}_{z0} \end{bmatrix} \quad (29g)$$

편의상 식 (29)에서는 $u_j' + u_j'' = u_j, \bar{w}_j' + \bar{w}_j'' = \bar{w}_j, N_{z0}'' + N_{z0}'' = N_{z0}, Q_{z0}' + Q_{z0}'' = Q_{z0}, u_j' + (-1)^n u_j'' = u_j, \bar{w}_j' + (-1)^n \bar{w}_j'' = \bar{w}_j, N_{z0}'' + (-1)^n N_{z0}'' = \bar{N}_{z0}, Q_{z0}' + (-1)^n Q_{z0}'' = \bar{Q}_{z0}$ 로 표시했다. 식 (29)에서 $\beta_{in}, \delta_{ij} (i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, 3)$ 는 유도된 계수이며, 식 (29g)에서는 9×9 행렬로 구성된다. 모든 Fourier 계수 $\lambda_n (i, k = 1, \dots)$ 는 각 원동셀 양단에서의 변위, 변위의 미분 및 하중값으로 나타낼 수 있다.

각 원동셀의 동적변위 v_j, w_j 에 대하여 양단에서의 기하학적 경계조건을 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} w_j(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0nj} + \sum_{m=1}^3 C_{mnj}) = 0 \\ v_j(L) &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_{0nj} + \sum_{m=1}^3 B_{mnj} (-1)^n) = 0 \\ v_j(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_{0nj} + \sum_{m=1}^3 B_{mnj}) = 0 \\ w_j(L) &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_{0nj} + \sum_{m=1}^3 C_{mnj} (-1)^n) = 0 \quad (j=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (30)$$

각 원동셀에 작용하는 하중 N_{z0}, M_{z0} 에 대한 식 (3)에 Fourier 급수로 나타나는 식 (5)와 그 미분값들을 대입하면 셀 양단에서의 힘에 대한 경계조건은 다음

식으로 전개된다.

$$\begin{aligned}
 N_0(0) &= \sum \left[\left(\frac{\pi}{L} \right) \left(\frac{u'_i + u'_i}{2} \right) + \frac{v}{R_i} (nB_{..} + C_{..}) \right] = 0 \\
 N_0(L) &= \sum \left[\left(\frac{\pi}{L} \right) u'_i + (-1)^i u'_i + m A_{..} \right] + \frac{v}{R_i} (nB_{..} + C_{..}) = 0 \\
 N_1(L) &= \sum \left[\left(\frac{\pi}{L} \right) \left(\frac{u'_i + u'_i}{2} \right) + \frac{v}{R_i} (nB_{..} + C_{..}) \right] = 0 \\
 M_0(0) &= \sum \left[- \left(\frac{\pi}{L} \right) \left(\frac{w'_i + w'_i}{2} \right) + \frac{v}{R_i} n(B_{..} + nC_{..}) \right] + \\
 &\quad \sum \left[- \left(\frac{\pi}{L} \right) (w'_i + (-1)^i w'_i + m C_{..}) + \frac{v}{R_i} n(B_{..} + nC_{..}) \right] = 0 \\
 M_1(L) &= \sum \left[- \left(\frac{\pi}{L} \right) \left(\frac{w'_i + w'_i}{2} \right) + \frac{v}{R_i} n(B_{..} + nC_{..}) \right] + \\
 &\quad \sum \left[- \left(\frac{\pi}{L} \right) (w'_i + (-1)^i w'_i + m C_{..}) + \frac{v}{R_i} n(B_{..} + nC_{..}) \right] (-1) = 0
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

식 (30)과 식 (31)에 식 (29)의 Fourier 계수를 대입하면 식 (32)와 같은 선형제차방정식을 얻을 수 있다. 따라서 모든 원통셸에 대한 경계조건이 각 셸 양단의 변위, 기울기 및 하중으로 나타난다.

$$[Y](X) = 0 \tag{32}$$

여기서, $[Y] = \begin{bmatrix} D & D \\ S & W \end{bmatrix}$.

$$\{X\} = \begin{bmatrix} u'_1, u'_1, u'_1, u'_1, u'_1, u'_1, w'_1, w'_1, w'_1, w'_1, \\ N''_1, N''_1, N''_1, N''_1, N''_1, N''_1, Q'_1, Q'_1, Q'_1, Q'_1 \end{bmatrix}$$

행렬 D, C, S, W 는 수식전개로부터 구해지며, 이 행렬에 해당하는 각각의 요소들을 구할 수 있다. 원통셸이 양단에서 고정될 경우에 대하여 경계조건을 적용하면 식 (32)와 같이 되고, 각 요소들은 식 (32)의 행렬 D, C 에 해당된다. $u''_1 = u''_1 = u''_2 = u''_2 = u''_3 = u''_3$, $w''_1 = w''_1 = w''_2 = w''_2 = w''_3 = w''_3 = 0$ 이므로 행렬 D, C 중 C 에 해당하는 $c_{ik}(i=1, 2, \dots, 6; k=1, 2, \dots, 12)$ 로 구성되는 행렬식은 0이 되어야 한다. 행렬식의 요소 c_{ik} 는 Fourier 급수를 포함한다.

3. 유한요소해석

이론전개의 타당성을 입증하기 위하여 ANSYS 코드⁽¹¹⁾를 사용한 유한요소해석이 수행되었다. 모델에

Table 1 Material properties of shells and fluid

Property	Unit	Shell	Fluid
Youngs modulus	GPa	69	
Poissons ratio		0.3	
Density	kg/m ³	2700	1000
Bulk modulus of fluid	Gpa		2.2
Viscosity of fluid	kg-sec/m ²		1.131E-3

사용한 물성치는 Table 1에서 기술하였다. 3중 원통셸의 기하학적 치수는 안쪽에서부터 셸1의 평균반경, R1= 100 mm이고, 셸2의 평균반경, R2=150 mm이며, 셸3의 평균반경, R3= 200 mm이다. 원통셸의 높이 및 두께는 셸 1, 2, 3에 모두 동일하게 각각 300 mm, 2 mm이다. 원통셸에 대하여는 단성 셸요소인 SHELL63을 사용하였고, 이 요소의 자유도는 6자유도 (Ux, Uy, Uz, Rotx, Roty, Rotz)이며, 3차원 모델링하였다. 원통셸 안의 유체요소는 3차원 유체요소인 FLUID80을 사용하였다. 이 요소는 각 절점에서 3자유도 (Ux, Uy, Uz)를 갖는 8개의 절점으로 구성된다. 원통셸 안쪽에 유체는 원주방향으로 40등분, 축방향으로 15등분, 반경방향으로 4등분하였다. 원통셸에 대해서는 유체와 만나는 접수면을 커플링하여야 하기 때문에 원주방향과 축방향으로 유체의 요소와 동일한 수로 분할하였다. 모드해석 방법은 Block Lanczos method를 사용하였다.

4. 결과 및 고찰

3중 원통셸의 경우, 원통셸과 원통셸이 이루고 있는 공간은 Fig. 1과 같이 3 영역으로 나뉘어지고, 경계조건은 양단이 고정되어 있다고 가정하였다. 각 영역에 유체를 어떻게 채우느냐에 따라 여러가지 경우에 대한 고유진동 특성이 다르게 나타난다. 각 영역별로 유체를 채울 때 2가지 경우로 구별된다. 즉 유체가 모두 채워진 경우와 원형공간을 형성하는 경우로 구분된다. 영역 1, 2, 3에 유체를 채울 경우와 영역 2나 3에 또는 영역 2, 3에 유체가 채워짐으로 원형공간을 형성하는 경우로 구별할 수 있으며 전자는 동위상 모드나 역위상 모드가 나타나지 않는 반면, 후자에서는 동위상, 역위상 및 혼합 모드가 나타난다.⁽¹⁰⁾

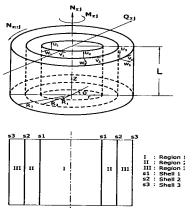


Fig. 1 Configuration of triple cylindrical shells filled with fluid

3중 원통셸에 대한 수식 전체의 정확성 및 타당성을 검증하기 위해 영역 1, 2, 3에 모두 유체가 채워져 있는 경우에 대하여 이론해와 유한요소법에 의한 결과를 비교하였다.

영역 1, 2, 3에 모두 유체가 채워진 경우, 원통셸 1, 2에 비해 원통셸 3에서 고유진동수가 낮게 나타나는 데 이것은 유체의 부가질량으로 인해 나타나는 현상이다. 또한 이 경우에 원통셸 1과 2에서는 유체의 하중이 안쪽과 바깥쪽에서 작용하게 되며, 이로 인해 유체의 부가질량이 서로 상쇄되어 마치 유체가 채워지지 않았을 때와 같은 고유진동특성이 나타나며 식 (21) 및 식 (23)에서의 유체의 접수면 하중이 이에 해당한다. 여기서는 반경을 동일하게 하여 부가질량 차이가 작아서 이와 같은 현상이 나타나지만 반경차

Table 2 Natural frequencies (Hz) for shell 3 of triple cylindrical shells filled with fluid at region 1, 2 and 3

Method	m'	Circumferential mode number (n)										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Analytical	1	603	550	470	370	362	340	347	422	528	619	765
	2	890	883	880	786	730	670	619	628	740	804	949
	3	1203	1257	1250	1209	1072	973	984	990	1000	1021	1126
	4	1605	1495	1573	1510	1485	1400	1351	1390	1420	1507	1600
FEM	1	561	529	451	388	348	337	362	423	518	644	799
	2	906	890	861	778	706	659	642	661	717	810	940
	3	1251	1239	1205	1148	1084	1031	998	994	1023	1087	1188
	4	1540	1511	1489	1459	1423	1390	1368	1364	1386	1436	1519
Dis.(%)	1	-7.0	-3.8	-4.0	4.9	-3.9	-0.9	4.3	0.2	-1.9	4.0	4.4
	2	1.8	0.8	-2.2	-1.0	-3.3	-1.6	3.7	5.3	-3.1	0.7	-0.9
	3	4.0	-1.4	-3.6	-5.0	1.1	6.0	1.4	0.4	2.3	6.5	5.5
	4	-4.0	1.1	-5.3	-3.4	-4.2	-0.7	1.3	-1.9	-2.4	-4.7	-5.1

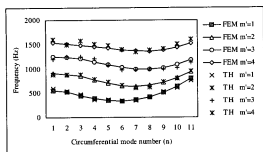
이가 클 경우 유체하중에 의한 영향으로 인한 진동모드가 발생할 것으로 판단된다. 이론과 유한요소법에 의한 해석결과를 Table 2~4에서 비교하였으며, 원통셸 3에서 최대편차는 7%가 발생하였다. 원통셸 1과 2에서 최대편차는 원통셸 2에서는 최대 8.5%, 원통

Table 3 Natural frequencies (Hz) for shell 2 of triple cylindrical shells filled with fluid at region 1, 2 and 3

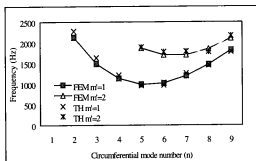
Method	m'	Circumferential mode number (n)								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Analytical	1	2277	1628	1209	965	973	1256	1460	1780	
	2				1884	1774	1789	1779	2167	
FEM	1	2131	1489	1134	987	1021	1198	1472	1818	
	2				1869	1699	1700	1847	2108	
Dis.(%)	1		-6.4	-8.5	-6.2	2.3	4.9	-4.6	0.8	2.1
	2					-0.8	-4.2	-5.0	3.8	-2.7

Table 4 Natural frequencies (Hz) for shell 1 of triple cylindrical shells filled with fluid at region 1, 2 and 3

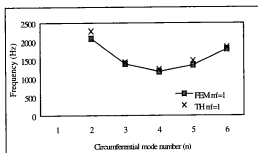
Method	m'	Circumferential mode number (n)					
		1	2	3	4	5	6
Analytical	1	2276	1436	1251	1485	1845	
FEM	1	2081	1398	1186	1364	1796	
Dis.(%)	1		-8.6	-2.6	-5.2	-8.1	-2.7



(a) Shell 3



(b) Shell 2



(c) Shell 1

Fig. 2 Natural frequencies for each shell of triple cylindrical shells filled with fluid at region 1, 2 and 3(FEM = finite element method, TH = analytical method, m' = axial mode number)

셸 1에서는 최대 8.6 %가 발생하였다. 여기서 편차(Dis.)는 식 (33)과 같이 정의하였다.

$$\text{Discrepancy} = \frac{\text{Frequency by FEM} - \text{Frequency by analytical method}}{\text{Frequency by analytical method}} \times 100(\%) \quad (33)$$

또한 전반적인 편차의 정도를 알아보기 위해 Fig.

2에서 그 결과를 도시하였으며, 이론전개에서 셸의 두께를 고려하지 않고 평균반경으로 가정된 것과, 유한요소법에 의한 해석에서 모델선정시 최적화를 위하여 고려되는 가정들로 인해 예상되는 편차를 감안하면 상당히 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

Stokes 변환을 응용한 Fourier 급수 전개법으로 유체가 채워진 3중 원통셸에 대한 고유진동 특성을 파악하기 위해 이론전개를 하였고, 이론전개에 의한 값과 유한요소법에 의한 값을 비교한 결과 서로 잘 일치하여 본 논문에서 전개한 이론해의 타당성을 확인 할 수 있었다.

3중 원통셸에 유체가 모두 채워질 경우, 안쪽 원통셸과 바깥쪽 원통셸 사이에 위치하는 중간셸의 모드 특성은 안쪽에 있는 영역의 유체의 점수면 하중과 바깥쪽의 영역에 있는 점수면 하중이 서로 상쇄되어 물이 채워지지 않은 원통셸과 같은 고유진동 특성을 나타내었다.

참고 문헌

- Ji, Y. K. and Lee, Y. S., 1999, "Dynamic Response Analyses of the Upper Guide Structure Assembly for KNGR", Annals of Nuclear Energy, Vol. 26, pp. 1457~1464, 1999.
- Markus, S., 1988, The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells, Elsevier, Amsterdam.
- Chung, H., 1981, "Free Vibration of Circular Cylindrical Shells", Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, pp. 331~350.
- Toorani, M. H. and Lakis, A. A., 2001, "Shear Deformation in Dynamic Analysis of Anisotropic Laminated Open Cylindrical Shells Filled with or Subjected to a Flowing Fluid", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 4929~4966.
- Lakis, A. A. and Sinno, M., 1992, "Free Vibration Axisymmetric and Beam-like Cylindrical Shells Partially Filled with Liquid", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.

33, pp. 235~268.

(6) Mikami, T. and Yoshimura, J., 1992, "The Collocation Method for Analyzing Free Vibration of Shells of Revolution with Either Internal or External Fluids", *Computers and Structures*, 44, pp. 343~351.

(7) Chiba, M., Yamashida, T., Sugiyama, H. and Tani, J., 1989, "Dynamic Stability of Liquid-filled Cylindrical Shells Under Periodic Shearing Forces", *Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 111, pp. 420~427.

(8) Amabili, H., 1996, "Free Vibration of Partially Filled, Horizontal Cylindrical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, pp. 757~780.

(9) Chen, S. S. and Rosenberg, G. S., 1975, "Dynamics of a Coupled Shell-fluid System", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 32, pp. 302~310.

(10) Jeong, K. H., 1998, "Natural Frequencies and Mode Shapes of Two Coaxial Cylindrical Shells Coupled with Bounded Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, pp. 105~124.

(11) 정명조 등, 1999, "유체가 채워진 환형공간을 갖는 동축 원통형 쉘의 모드해석", *ANSYS User's Conference*, Vol. 43, pp. 330~341.

(12) 박진호 등, 2001, "수중 동축원통형 구조물의 경계조건 변화에 따른 동특성 시험", *춘계학술대회 논문집, 한국소음진동공학회*, pp. 668~674.

(13) Yoshida, S. and Miyoshi, T., 1991, "Vibration Analysis of Fluid-Coupled Multi Walled Coaxial Cylindrical Tanks", *Transactions of the 11th SMIRT*, Vol. K, pp. 541~546.

(14) ANSYS, 1999, *ANSYS Structural Analysis Guide*, ANSYS, Inc., Houston.