

회전 기계 고장 진단을 위한 최근접 이웃 분류기의 기각 전략

최영일*, 박광호*, 기창두**

Rejection Scheme of Nearest Neighbor Classifier for Diagnosis of Rotating Machine Fault

Young-Il Choi*, Kwang-Ho Park* and Chang-Doo Kee**

ABSTRACT

The purpose of condition monitoring and fault diagnosis is to detect faults occurring in machinery in order to improve the level of safety in plants and reduce operational and maintenance costs. The recognition performance is important not only to gain a high recognition rate but also to minimize the diagnosis failures error rate by using effective rejection module. We examined the problem of performance evaluation for the rejection scheme considering the accuracy of individual classes in order to increase the recognition performance. We use the Smith's method among the previous studies related to rejection method. Nearest neighbor classifier is used for classifying the machine conditions from the vibration signals. The experiment results for the performance evaluation of rejection show the modified optimum rejection method is superior to others.

Key Words : Pattern Recognition(통계적 패턴 인식), Nearest Neighbor Classifier(최근접 이웃 분류기), Rejection Scheme(기각전략), Recognition Rate(인식률), Error Rate(오차율), Reject Rate(기각률), Rotating Machine(회전기계)

1. 서론

최근 발전 플랜트 및 화학 플랜트의 대형화와 자동화에 따른 설비의 안정적 운전이 요구되고 있다. 대부분 사고는 주로 회전기계에서 발생하고 있으며 많은 연구자들이 관심을 갖고 플랜트 시스템의 신뢰성 및 가동률 향상을 위해 기계 설비의 안전 운전과 예방 보존기술의 향상을 위해 많은 연구를 하고 있다. 그 중에서 진동 신호 모니터링은 회전 기계의 상태를 해석하는 가장 유용한 수

단이다.⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ 패턴 인식 기법에 의한 회전 기계 결함 분류는 진동 신호로부터 정량적인 특징 값을 얻어 내는 '특징 추출 과정'과 이미 회전 기계의 상태를 알고 있는 상태에서 취득한 패턴들을 이용하여 학습 지식 자료를 구성하는 '학습 과정'과 얻어진 학습 정보를 바탕으로 결함을 분류하는 '판단 과정'으로 나눌 수 있다.

패턴 인식 기법을 이용한 회전기계의 고장 진단⁽⁴⁾⁽⁸⁾에서 인식 성능은 인식률(Recognition Rate)과 오차율(Error Rate)에 의하여 평가 된다. 그러나

* 2001년 6월 8일 접수
** 전남대학교 대학원 기계공학과
** 전남대학교 기계공학과

대부분의 연구는 인식률에 기반하고 있으며, 이러한 인식률은 입력 패턴에 대한 정인식된 패턴의 비율로 정의된다. 그러므로 고장 진단과 같은 시스템에서는 오인식에 따른 손실을 감안한다면 인식률 향상과 더불어 오차율을 줄이는 연구가 뉘따라야 할 것이다⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾. 주 고장 진단을 수행하는 과정에서 발생할 수 있는 잘못된 판정을 줄일 수 있어야 한다. 따라서 오인식된 패턴을 효과적으로 기각할 수 있는 전략이 필요하며 인식 시스템에서의 오차율은 기각률에 따라 대응하며 변하는데 ‘어떻게 기각하였는가’ 또는 ‘얼마나 기각하였는가’에 따라 오차율이 변한다. 그러므로 효율적인 인식 성능을 얻기 위해 인식기의 결과에 효과적인 기각 방법이 필요하다.

본 연구에서는 기각을 수행하기 위해 고장 상태를 알고 있는 회전기계의 진동 신호 취득을 통해 최근접 이웃 분류기를 이용하여 패턴 분류를 한다. 최근접 이웃 분류기에서 나온 거리 정보와 분류 결과를 이용하여 기각을 수행한 후 기각의 성능을 평가하고 기각에 따른 오차의 추이를 통하여 신뢰성 있는 기각 전략을 세안하고자 한다.

2. 기각의 개념 및 기각 방법

2.1 기각의 개념

패턴 분류 문제에 대한 결정 이론은 각 클래스의 수준에서 최적의 인식 시스템을 설계하는 것이다. 즉 인식 시스템은 패턴 공간상에서 최적의 클래스를 결정하는 것이며 일반적으로 인식 과정은 전처리 단계와 분류 단계로 나뉘어진다. 본 절에서는 분류 단계의 기각에 한정하여 살펴보자 한다. 패턴 벡터를 v , 관별 함수를 $d(v)$ 라 할 때, 패턴 인식 시스템의 차례 단계는 다음과 같다.

- 관별함수 $d(v)$ 을 계산한다.
- $d(v)$ 의 최대 값을 탐색한다.
- 기각 여부를 결정한다.

모든 패턴 인식 시스템은 일정한 비율의 오인식을 갖는데 이는 패턴이 발생하는 과정에서 다양한 왜곡 현상이나 잡음에 의해 인식의 판정이 모호해지기 때문이다. 이러한 구분하기 어려운 패턴을 인식하지 않는 것으로 처리하기 위해서 기각의 개념을 도입하는 것이다.

패턴 인식 시스템에서 뛰어난 분류 능력을 갖는 판별 함수를 개발하여 인식 성능을 높일 수도 있지만 효과적인 기각 함수를 개발하여 효율적인 인식 성능을 높일 수도 있다. 궁극적으로 두 방법 모두 인식기의 신뢰도를 향상하는 것을 목표로 한다. 여기서 기각이란 인식기가 패턴을 클래스 중 하나로 분류하는데 충분한 확신이 없으면 결정을 잠정적으로 거절한다는 것이다. 즉 이것은 입력 패턴이 어떤 클래스에도 속하지 않는다고 결정하는 것으로 입력 패턴을 기각하는 경우는 크게 두 가지로 구분할 수 있다. 첫 번째 분류하고자 하는 클래스를 중 하나에 속하는 입력 패턴을 임의의 클래스로 분류하기 위한 신뢰수준이 낮은 경우에 그 패턴을 기각할 수 있고, 두 번째 입력 패턴이 분류하고자 하는 클래스 중 어디에도 속하지 않는 경우로 이 또한 입력 패턴의 신뢰수준이 낮아 기각할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 첫 번째 경우인 신뢰수준을 기반으로 한 기각방법으로 한정하여 살펴본다.

2.2 기각 방법

Smith⁽¹⁾는 필기체 숫자 인식을 위해 최근접 이웃 분류기로부터 얻은 거리 정보와 분류 결과를 이용하여 기각을 수행한 바 있다. 본 연구에서는 Smith의 제안방법을 사용하였으며 내용을 간략히 기술하면 아래와 같다.

임의의 입력 패턴에 대하여 훈련 패턴과 가장 가까운 거리를 고려하였는데, 이를 k-NN 신뢰 척도(Confidence Measure I)라 하고 아래 식(1)과 같다.

$$\text{Confidence Measure I} = 1 - \frac{D_1}{K} \quad (1)$$

이때 D_1 은 입력의 특징 패턴과 기준 특징 패턴의 가장 가까운 거리이고, K 는 상수로 최대 거리보다 더 큰 값으로 한다. 이 신뢰 척도가 좋은 기준이라면 정인식된 패턴들의 분포는 오인식된 패턴들의 분포보다 높은 신뢰값 주변에 분포한다.

임의 패턴에 대하여 가장 가까운 거리와 더불어 그 다음으로 가까운 거리도 큰 영향을 미친다. Smith는 이 두 거리의 비율 고려하였는데, 이를 ratio 신뢰 척도(Confidence Measure II)라 하고 식(2)과 같다.

$$\text{Confidence Measure II} = 1 - \frac{D_1}{D_2} \quad (2)$$

이때 D_1 은 입력 패턴과 가장 가까운 거리이고, D_2 는 D_1 이 속한 클래스와는 다르면서 그 다음으로 가까운 거리이다. ratio 신뢰 척도를 이용할 때 정인식된 패턴들과 오인식된 패턴들과의 분포는 k-NN 신뢰 척도를 이용한 분포보다 잘 분리된다. 이는 거리의 ratio 신뢰척도를 이용한 기각 방법이 더 좋은 성능을 나타낼 수 있다. 이와 같은 사실을 근거로 하여 입력 패턴과 다른 클래스의 이웃 하는 패턴들과 가까운 거리 정도를 이용하는 정보가 신뢰 척도를 계산하는데 더 좋은 영향을 준다. 이를 고려하여 개선한 최적 신뢰 척도(Confidence Measure III)를 식(3)으로 정의한다.

Confidence Measure III

$$= 1 - \omega \frac{D_1}{K} - \sum_{i=1}^5 x_i \frac{D_1}{D_i} + \sum_{i=2}^6 y_i \frac{D_1}{D_i} \quad (3)$$

이때 ω , x_i , y_i ($i = 2, \dots, 5$), y_i ($i = 2, \dots, 6$)는 가중치로서 이는 기울기를 이용하는 최급 하강법 (gradient decent method)에 의해 최적화 하였다⁽¹¹⁾. 위 신뢰척도의 각 항을 설명하면 다음과 같다.

- $\frac{D_1}{K}$: k-NN 신뢰 척도
- $\sum_{i=1}^5 x_i \frac{D_1}{D_i}$: 입력 패턴과의 가장 가까운 패턴의 거리와 다른 클래스에서 그 다음으로 가까운 패턴 다섯 개의 거리 비의 합

- $\sum_{i=2}^6 y_i \frac{D_1}{D_i}$: 입력 패턴과의 가장 가까운 패턴의 거리와 같은 클래스(즉 가장 가까운 패턴이 속한 클래스)에서 그 다음으로 가까운 패턴 다섯 개의 거리 비의 합

임의의 입력 패턴에 대하여 Smith의 세 가지 방법의 신뢰 척도를 계산하였을 때, 이 값이 미리 정해 놓은 기준치 θ 보다 크면 선택 후보를 입력 패턴에 대한 인식 결과로 받아들이고, 작으면 기각한다. 일반적으로 기준치 θ 는 Bayes 정리에 의하여 전체 훈련 집합으로부터 추정된다⁽¹²⁾.

3. 특징 추출

3.1 특징 추출

진동 신호를 곧바로 패턴 분류기의 입력으로 사용할 수 없으므로 특징 벡터를 추출하여 분류기의 입력으로 사용한다. 본 연구에서는 회전 기계 고장 진단에 일반적으로 사용되는 시간 영역 특징과 주파수 영역 특징을 이용하여 고장 진단을 시도하였다⁽⁴⁾. 회전 기계 진단을 위해 사용되는 6 개의 특징 벡터는 아래와 같으며 특징 추출의 과정을 Fig. 1에 보여준다. 진동 신호 $x(t)$ 를 N 개의 샘플 링수로 이산화한 후 신호에 대한 평균을 아래 식(4)로 구할 수 있다.

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4)$$

$$\bullet \text{Mean value} : C_1 = m \quad (5)$$

$$\bullet \text{Variance value} : C_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - C_1)^2 \quad (6)$$

$$\bullet \text{Skewness value} : C_3 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - C_1)^3}{\sigma^3} \quad (7)$$

$$\bullet \text{Kurtosis value} : C_4 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - C_1)^4}{\sigma^4} \quad (8)$$

• 1X value : 동기 주파수(Hz) 진폭

• 2X value: $2 \times$ 동기주파수(Hz) 진폭

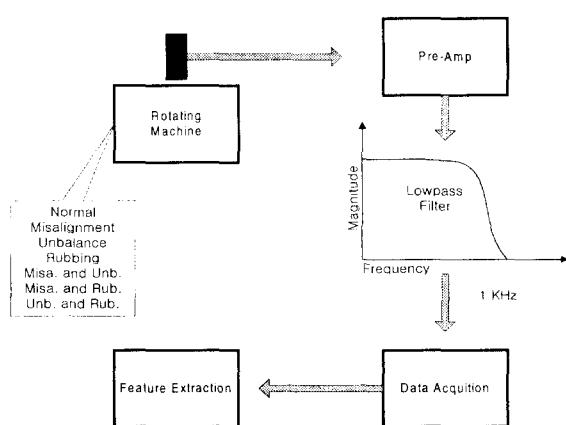


Fig. 1 Block diagram of experiment

여기서 x 는 진동 신호, m 은 평균 그리고 σ 는 표준 편차이다.

3.2 최근접 이웃 분류기

패턴 인식은 크게 통계적인 방법과 신경망을 이용한 방법으로 나눌 수 있는데 통계적인 방법은 패턴의 분포가 확률분포함수나 밀도함수 형식의 분포 형태라고 가정하는 모수적인 인식 방법과 패턴분포를 가정하는 대신에 주어진 공간에서 적접 밀도함수를 추정하거나 대상 패턴에 근접한 패턴 만을 고려하는 비모수적인 인식방법이 있다. 실제 문제에서는 패턴의 분포가 정규분포곡선 또는 임의의 모수 분포로 표현된다라고 가정할 수 없는 경우가 많다.

본 연구에서는 회전기계 고장 패턴 인식을 위해 통계적인 방법 중 비모수적인 인식 방법을 고려하였다. 고장 패턴 인식을 위하여 가장 간단하고 직관적인 접근 방법인 거리함수에 의하여 패턴을 분류하는 최근접 이웃 결정규칙⁽⁴⁾⁽⁸⁾을 채택하였다.

최근접 이웃(k-NN:Nearest Neighbor) 규칙에 관하여 간략히 기술하면 다음과 같다.

대상 패턴의 집합을 V 라 하고, 클래스의 집합을 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ 라 하며, 각 클래스 ω_i 에 대한 표준 패턴의 집합을 $T_i \subset V$ 라 한다. 이 때, 미지 패턴 $x \in V$ 에 해당 클래스를 대응시키는 사상 δ 은 다음식(9)로 표현할 수 있다.

$$\delta: V \rightarrow \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\} \quad (9)$$

이것은 식별함수에 해당하며, 인식 방법이란 바로 식별함수를 결정하는 방법이다. k-NN 에서는 다음과 같이 식별함수를 결정한다. 전체 표준 패턴 중에서 패턴 x_0 로부터 가장 가까운 거리에 있는 k 개의 패턴 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ 를 x 의 k-NN 이라 하며, k-NN 규칙은 패턴 x 의 k-NN 의 각 요소가 어느 클래스에 가장 많이 속하는가를 조사하여 최대 요소 수의 클래스를 x 의 클래스로 결정하는 규칙이다.

즉, 패턴 x 의 k-NN 중에서 클래스 ω_i 에 속하는 요소 수는 식(10)을 통해 계산한다.

$$n(i) = |\{x | x \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cap T_i\}| \quad (10)$$

$n(j) = \max\{n(1), n(2), \dots, n(k)\}$ 라고 하면, 인식 함수의 출력을 $\delta(x) = \omega_j$ 로 결정하는 식별 방법이다. k 가 1 인 경우 k-NN 을 최근접 이웃 결정 규칙이라고 하고, 간단히 NN 규칙이라고 부른다. NN 규칙이란 패턴 $x \in V$ 에 대하여, 전체 표준 패턴 $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_k$ 에서 유사함의 척도를 나타내는 거리함수 $d(x, t)$ 를 최소로 하는 패턴 t 를 t_0 라 할 때, $t_0 \in T_j$ 이면 인식함수 $\delta(x)$ 를 $\delta(x) = \omega_j$ 로 하는 규칙이다. 단 t_0 가 다수 존재 하던가 $t_0 \in T_j$ 이 되는 j 를 임의적으로 결정할 수 없을 때에는 가장 작은 j 를 선정하는 것으로 한다. 즉, 패턴 x 는 훈련집합에서 그 패턴과 가장 가까운 거리에 있는 이웃 패턴이 속해 있는 부류에 분류된다.

본 연구에서는 k-NN 규칙에서 유도된 최근접 이웃 결정규칙을 사용한다. 최근접 이웃 결정규칙은 패턴분포에 관한 정보로 식별함수를 계산하는 대신에 미리 저장해 놓은 기준 패턴과의 거리를 계산하여 가장 가까운 기준 패턴의 클래스를 미지 패턴의 클래스로 결정하는 방법으로 이를 위하여 사전에 클래스별 기준이 되는 표준 패턴을 선정하여야 한다. k-NN 규칙에서 k 를 1로 하는 최근접 이웃 분류 방법을 사용하여 분류를 행한다.

4. 회전기계 고장 진단 실험 및 기각

4.1 실험장치의 구성

본 연구의 실험장치 구성은 Fig.2에 나타내었다. 기계 장치는 디스크를 부착한 축과 속도 조정을 위한 모터로 구성된 Bently Nevada사의 RK-4 Rotor Kit를 사용하였으며 2개의 Eddy current type gap sensor에 의해 축과 베어링 사이의 상대운동에 대한 신호를 취득한다. 본 연구에서는 수평, 수직 진동을 측정하기 위하여 맵돌이 전류 형태(Eddy Current Type)의 변위센서는 x, y 축에 90°의 각도로 설치하였고 출력은 200mV/mil(7.87V/mm)이며 출력신호는 4096 Hz로 샘플링하여 A/D 변환하였다.

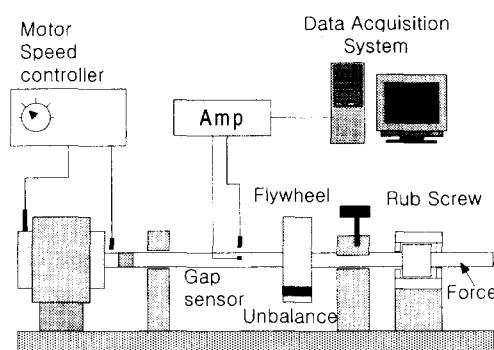


Fig. 2 Schematic diagram of experimental set up

정상 상태, 정렬불량 상태, 불평형 상태, 러빙 상태를 조합하여 7 가지 기계 상태에 고장 진단을 수행하기 위한 실험의 개략도를 Fig.3에 나타내었다.

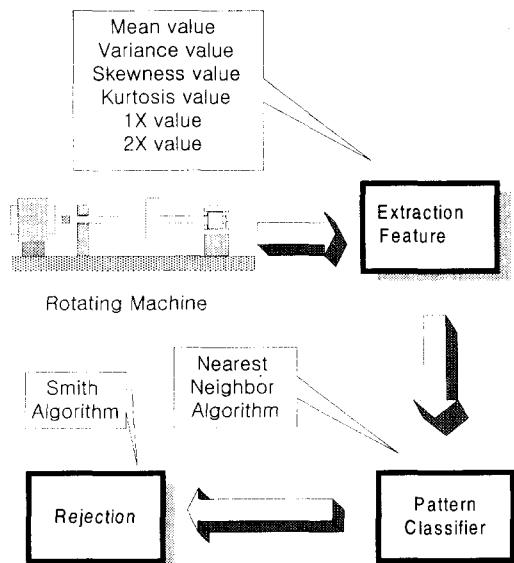


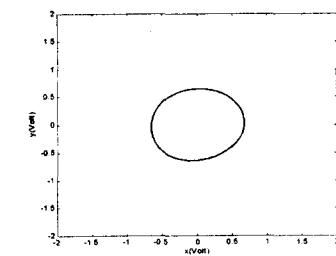
Fig. 3 Schematic diagram of experimental set up

각 상태별 실험 방법을 살펴보면 다음과 같다. 정상 상태는 회전체에 결함 조건을 적용하지 않고 진동 신호를 취득하였고 정렬불량 상태는 축에 횡방향의 인위적인 힘을 가함으로써 축 중심선이 일치하지 않도록 하였다. 불평형 상태는 축에 부착된 디스크에 불평형 질량을 추가하고 진동신호를 살펴보았다. 러빙 상태는 러빙 나사(Rub Screw)를

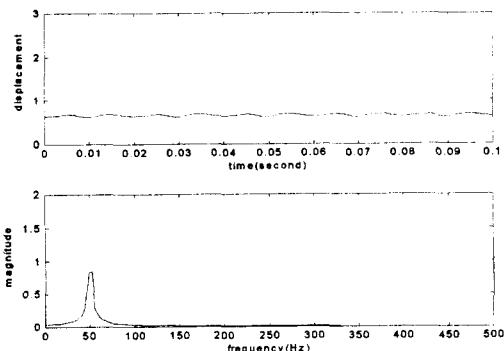
이용하여 하우징에 있는 구멍에 러빙 나사를 돌려 진동 신호를 취득하였다.

- 정상 상태
- 정렬불량 상태
- 불평형 상태
- 러빙 상태
- 정렬불량과 불평형 상태
- 정렬불량과 러빙 상태
- 불평형과 러빙 상태

수평 수직 방향의 진동을 4096 Hz로 각각의 상태에 대해 600개의 데이터를 샘플링하여 100개는 분류기의 훈련을 위하여 나머지 500개는 테스트를 위하여 사용하였다. 수평 수직 방향의 진동 신호에서 앞 절에서 기술한 6개의 특징벡터를 추출하였으며 Fig.4는 정상상태에서의 진동신호와 오비의 패턴을 보여준다. 최근접 이웃 분류기에 700개(각각 100개)의 고장 패턴을 가지고 훈련을 시켰고 다시 3500개(각각 100개)의 패턴을 이용하여 고장 진단을 수행하였다. 진단 결과는 Table 1에 나타내었으며 92.4%의 인식률을 얻었고 7.6%의 오차율을 얻었다.



(a) Orbit pattern of normal state



(b) Time and FFT plot of normal state
Fig. 4 Vibration signal of normal state

Table 1 Result of recognition

Condition	Recognition (%)
normal	99.2
misalignment	97.4
unbalance	97.6
rubbing	96.4
misalignment& unbalance	82.4
misalignment & rubbing	88.0
unbalance & rubbing	86.0
total	92.4

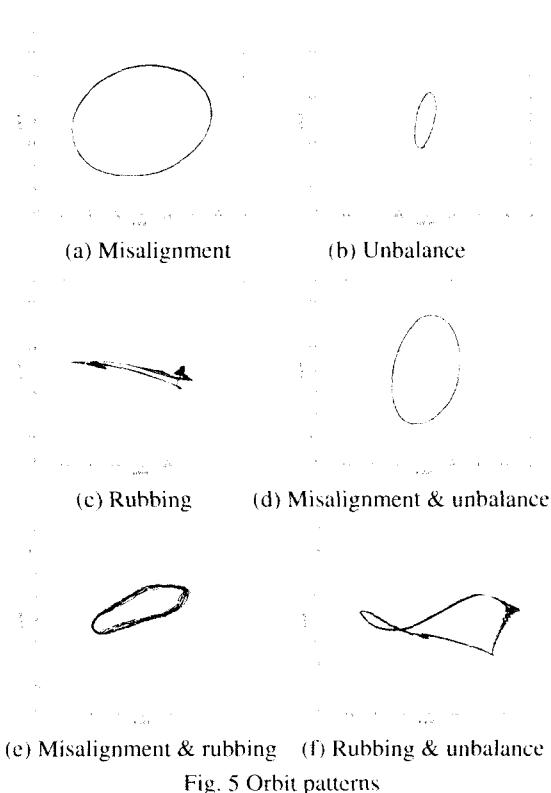


Fig. 5 Orbit patterns

Fig.5에서 알 수 있듯이 오벳의 패턴을 주의 깊게 관찰함으로써 회전체의 상태를 판정할 수 있다. 회전체 상태별로 오벳 형태를 비교해 보면 정상 상태보다 불평형 상태일 때 타원형을 보이며 정상 상태보다 반경이 작아짐을 알 수 있다. 그리고 정렬불량일 때는 정상 상태보다 반원의 반경이 커짐을 확인할 수 있다. 러빙이 존재하면 8자 모

양의 패턴을 갖으며 미세한 진동이 발생한다. 그리고 두세 개의 고장 상태가 섞인 경우는 각각의 특성이 겹쳐 나타난다. 최근집 이후 분류기에서 언은 거리정보와 인식결과를 이용하여 Smith가 제안한 세 가지 방법을 이용하여 기각을 수행하였다. 첫번째 방법의 기각에 대한 오차의 추이는 Fig. 6과 같은 결과를 보였다. 이는 패턴들 사이에서 가장 가까운 거리만을 이용하여 기각을 수행하였기 때문에 상대적인 거리의 비를 이용한 ratio 신뢰척도나 최적 신뢰척도에 비하여 비효과적 것으로 나타났다. Fig.7과 Fig.8은 거리의 비를 이용한 ratio 신뢰 척도의 기각 방법과 개선된 최적 기각 척도를 이용한 결과를 보여준다. Smith가 제안한 방법 중 최적 신뢰척도를 이용한 기각 방법이 가장 효과적인 것으로 나타났으며 입력 패턴과 다른 클래스의 이웃하는 패턴들과 가까운 거리 정도를 이용하는 정보가 신뢰 척도를 계산하는데 더 좋은 결과를 준다는 것을 알 수 있다.

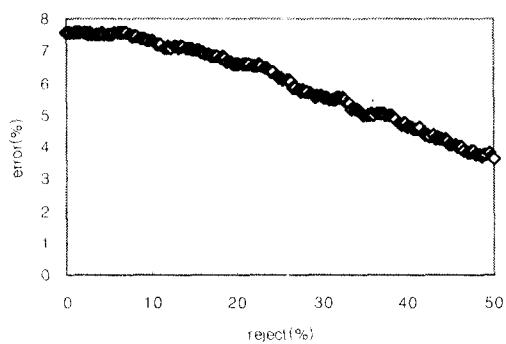


Fig. 6 Reject-error curve (confidence measure I)

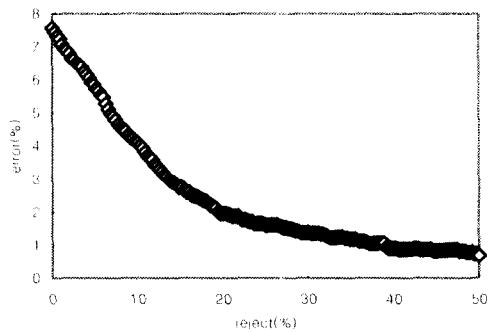


Fig. 7 Reject-error curve (confidence measure II)

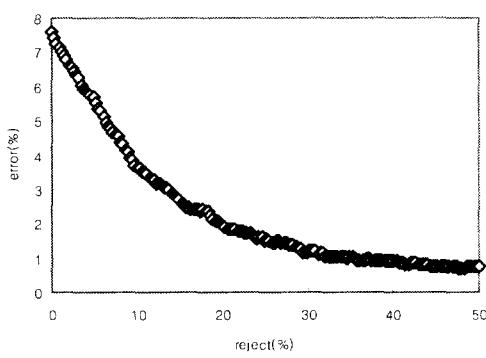


Fig. 8 Reject-error curve (confidence measure III)

5. 결론

회전기계에 대한 고장 진단은 주로 인식률의 관점에서 많은 연구가 되었다. 그러나 오인식에 의해 발생할 수 있는 손실을 감안한다면 인식률 향상과 함께 오차율을 줄이는 연구가 필요하다. 그러므로 오인식된 패턴의 기각을 고려한다면 진단의 오차를 줄일 수 있어 신뢰성 있는 진단이 이루어질 것이다. 본 논문은 회전기계 고장 진단에서 신뢰성을 확보하기 위하여 기각의 개념을 도입하였으며, 먼저 회전기계의 진동 신호를 측정하여 데이터베이스를 만들고 최근접 이웃 분류기를 이용하여 고장 진단을 실현하였다. 최근접 이웃 분류기에서 얻은 거리정보와 분류 결과를 이용하여 Smith가 제안한 기각 방법을 적용하였으며, 기각률에 따른 오차의 추이를 관찰함으로써 최적 신뢰도에 의한 기각방법이 가장 효과적인 것으로 나타났다. 이러한 결과를 바탕으로 회전기계의 진단을 위한 다양한 특징에 대하여 상태 분류기와 기각 전략을 통해 높은 인식률과 진단의 신뢰성을 동시에 확보할 수 있을 것으로 사료된다.

후기

본 연구는 전남대학교 BK21 사업단의 연구비 지원에 의하여 수행되었으며 이에 감사 드립니다.

참고문헌

- S. J. Smith and M. O. Bourgoing, "Handwritten Character Classification using Nearest Neighbor in Large Database," *IEEE Trans. on PAMI*, Vol. 16, No. 9, pp. 915-919, 1994.
- H. Mizutani, "Discriminative Learning for Minimum Error and Minimum Reject Classification," proceedings of the 14th International Conference on Pattern Recognition, Kawasaki, Japan, Vol. 1, pp. 136-140, 1998.
- M. Gofarelli and D. Mario, "On the Error-reject Trade-off in Biometric Verification Systems," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 19, No. 7, pp. 786-796, 1997.
- W. Gersch, T. Brotherton and S. Braun, "Nearest Neighbor-Time Series Analysis Classification of Faults in Rotating Machinery," *Transactions of the ASME*, Vol. 105, pp. 178-184, 1983.
- J. T. Renwick, "Vibration Analysis - A Proven Technique as a Predictive Maintenance Tool," *IEEE Trans. on Industry Applications*, Vol. 21, pp. 324-332, 1985.
- J. Mathew and J. Alfredson, "The Condition Monitoring of Rolling Element Bearings Using Vibration Analysis," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 106, pp. 447-453, 1996.
- C. K. Mechebske and J. Mathew, "Fault Detection and Diagnosis in Low Speed Rolling Element Bearings Part II: The Use of Nearest Neighbour Classification," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 6, No. 4, pp. 309-316, 1992.
- 김창구, 박광호, 기창우, "회전기계 고장 진단에 적용한 인공신경망과 통계적 패턴인식 기법의 비교 연구," *한국정밀공학회지*, 제 16 권 제 12 호, pp. 119-125, 1999.
- 이정철, "고정도 스펙트럼 해석법에 의한 회전기계의 이상진단에 관한 연구," *한양 대학교 대학원 박사학위논문*, 1995.
- 배용채, "터빈이상 진동의 자동 진단 시스템에 관한 연구," *전남 대학교 대학원 박사학위논문*, 1995.
- Singiresu Rao, *Engineering Optimization*, Wiley Inter-science, 1996.
- Morton Nadler and Eric P. Smith, *Pattern Recognition Engineering*, Wiley Inter-science, 1993.