Technical Tips

저항과 피아노

정 승 기
(광운대학교 전기공학과 교수)

세상이 많이 바뀌어도 변하지 않는 것들이 있게 마련이다. 이십 몇년 전 어두침침한 학부 전기공학 실험실에서 맨 처음 주어졌던 과제는 저항의 색깔코드를 외우는 일이었다.

"흑갈빨주노녹파보회백..."

공부를 열심히 하지 않았던 탓이었겠지만, 당시 이 색깔코드를 실제로 써먹을 일이 별로 없었기 때문에 실제 저항에 나타나는 코드의 조합이 사실 몇 가지 되지 않는다는 사실을 알아채는 데는 상당한 시간이 걸렸던 것 같다. 지금의 대학 실험은 내용과 질에 있어서 그때와 비교되지 않을 정도로 많이 변하였으나 대부분의 전기공학 실험은 여전히 이 색깔코드를 외우는 일로 시작하고 있을 것이다.

변치 않는다는 것은 그만큼 기본적이고 또 그만큼 중요하다는 뜻이 아닐까. 모든 공업표준에는 나름대로의 이유가 있게 마련인데 실험실에서 일상적으로 마주치게 되는 저항값들이 왜 그렇게 띄엄띄엄 만들어지는지에 대해 생각해 보는 것도 사소하지만 의미 있는 일일 수 있을 것이다.

실험실에서 흔히 사용하는 20% 저항은 아래와 같이 불과 여섯 가지 종류에 불과하다.

$$10\times10^x,\ 15\times10^x,\ 22\times10^x,\ 33\times10^x,\ 47\times10^x,\ 68\times10^x$$

따라서 색깔코드의 조합도 갈흑, 빨빨 등 여섯 가지에 불과하다. 왜 좀 더 자세히 구분하지 않았을까? 그리고 그 간격은 왜 균등하지 않은 것일까?

공칭값

먼저 위의 저항값들은 "공칭값(nominal value)"라는 점을 이해해야 한다. "공칭(公稱)"이란 문자 그대로 공식적인 칭호를 뜻한다. 어떤 의미에서 공칭값은 '이름'이지 '수치'가 아니라고 할 수 있다. 물론 그 이름은 실제 저항의 대략적인 값을 나타내고 있다는 것을 전제로 하고 있다. 예를 들어 150 오옴이라고 불리우는 저항을 테스터로 측정해 보면 항상 150 오옴에 가까운 수치가 나타난다. 그러나 한가지 분명한 사실은, 그 수치가 정확하게 150 오옴을 가리키지는 않을 것이라는 점이다.

다른 예를 들자면, 어떤 사람의 키가 175cm라고 할 때 과연 그 사람의 키는 정말 175cm일까? 사람의 키는 머리 모양에 따라 달라질 수도 있고 키를 잴 때 어떤 자세를 하고 있는지, 혹은 아침에 키를 쟀는지 저녁에 쟀는지에 따라 달라질 수도 있다. 좀 더 정확히 키가 175.23cm라 한다 해서 상황이 달라지지는 않는다. 다시 말해서 우리가 말하는 수치란 어떤 대상의 속성을 나타내는 표상일 뿐이지 실체는 아닌 것이다.

그렇다고 해서 "내 키는 정말 얼마인 것인가!"라고 외치며 머리카락을 움켜잡고 고민에 빠질 필요는 없을 것이다. 간호원이 검진표에 175cm라고 적었다면 다음부터 "내 키는 175cm입니다"라고 다른 사람에게 얘기할 수 있다. 즉 검진표에 적힌 수치는 내 키에 대한 일종의 공칭값이 되는 것이다.

공칭저항과 오차의 관계

공학에서는 표상과 실체의 괴리를 중간에 통계학적 확률이라는 완충지대를 두어 극복하고 있다. 다소 장황하게 표현하자면, 앞서 나열한 20% 저항들의 실제 저항값은 공칭값이 지시하는 수치의 0.8배에서 1.2배 사이에 있을 확률이 거의 100%에 가깝다.[1] 따라서 150 오옴 저항의 경우 실제 저항값은 120~180 오옴 사이에 있게 된다. 이와 같이 공칭값과 그에 대응하는 저항값의 범위를 나타내면 아래

註 1) 국제 표준에서 이 확률에 대해 구체적으로 어떤 수치를 적용하고 있는지에 대해서는 필자 역시 확실히 아는 바가 없으므로 다소 애매한 표현을 이해해 주기 바란다.

와 같다.

공칭값	저항값의 범위
10	8~12
15	12~18
22	17.6~26.4
33	26.4~39.6
47	37.6~56.4
68	54.4~81.6
100	80~120
150	120~180
…	…

위의 표에서 어떤 공칭값에 대한 범위의 상한값은 다음 단계의 공칭값에 대한 범위의 하한값과 거의 일치함을 알 수 있다. 즉 공칭값은 불연속적이지만 이들이 나타내는 실제 저항값의 범위는 연속적으로 연결되어 전 범위를 포괄하고 있다.

일반적으로 표현하자면 k번째의 공칭값을 R_k라 하고 그 다음 단계의 공칭값을 R_{k+1}이라 할 때 20% 저항의 경우 모든 저항값의 범위를 포괄할 수 있으려면 아래의 관계가 성립하여야 한다.

$$1.2R_k = 0.8R_{k+1}$$

즉

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = 1.5$$

따라서 공비가 1.5인 등비급수의 형태가 됨을 알 수 있다. 위에 보인 저항의 공칭값들은 이러한 등비급수의 관계를 대체적으로 유지하되 비교적 암기하기 용이한 단순한 수치로 정해 놓은 것이다.

그림 1은 10에서 100까지의 공칭저항값과 이에 해당하는 실제 저항값의 범위를 대수축척 (logarithmic scale) 상에서 나타내고 있다. 여기서 보다시피 공칭값 사이의 간격은 대수축척 상에서 거의 일정함을 알 수 있다. 그러나 대수축의 10에서 100까지를 정확하게 6등분하고 있는 것은 아니므로 그 간격은 다소 불규칙적이고 따라서 실제 저항값의 범위도 약간씩 겹치고 있다. 만일 정확하게 6등분이 되게 하려 한다면 공칭값 사이의 비율은 다음과 같이 되어야 할 것이다.

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} = 10^{\frac{1}{6}} = 1.468$$

이 수치는 위의 1.5와 거의 일치한다. 이로부터 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

"±20%의 오차범위를 갖는 저항이 매 10배 구간 (decade) 내에서 일정한 비율의 공칭값을 가지면서 실제 저항값의 변화 범위가 그 구간 내의 모든 저항값을 포괄할 수 있으려면 공칭값이 최소한 6개 단계로 구분되어야 한다."

이상에서 본 바와 같이 저항의 공칭값과 오차범위는 서로 무관한 것이 아니라 긴밀한 상관관계를 지니고 있다. 따라서 오차범위가 작은 저항은 그만큼 더 조밀한 공칭값을 가지고 있다. 일반적으로 오차범위가 $\pm E$%인 저항에서 실제 저항값의 범위가 연속적으로 연결되려면 인접한 공칭값 사이의 비율은 대략 다음과 같이 되어야 한다.

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} \approx \frac{100+E}{100-E}$$

그리고 이들 공칭값이 대수축척을 매 10배 구간마다 N개씩의 등간격으로 구분하고 있다면 다음의 관계가 성립되어야 한다.

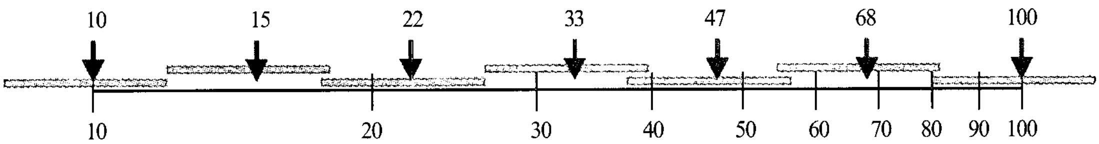

그림 1. 20% 저항의 공칭값과 실제 저항값의 범위

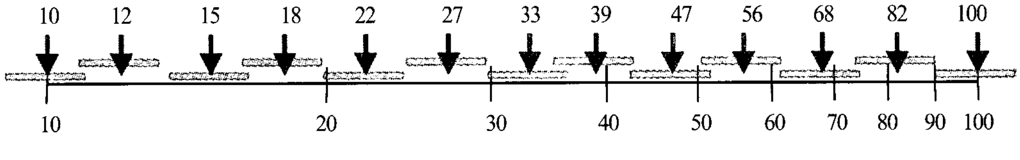

그림 2. 10% 저항의 공칭값과 실제 저항값의 범위

$$10^{\frac{1}{N}} \approx \frac{100+E}{100-E}$$

즉

$$N \approx \frac{1}{\log \frac{100+E}{100-E}}$$

위의 식에 E=20을 대입하면 $N\approx 6$가 되고 E=10을 대입하면 $N\approx 12$가 된다. 그림 2는 10% 저항에 대한 공칭값과 실제 저항값의 범위를 보여주고 있다. 그림 1과 비교해 보면 20% 저항 공칭값들은 그대로 유지되고 그 사이사이에 새로운 값들이 추가되어 있음을 알 수 있다. 즉 10에서 100까지의 대수축척을 대략 12등분하고 있다. 마찬가지로 5% 저항은 이를 다시 절반씩 나누어 24등분하는 체계를 취하고 있다. 2% 저항에 대해서는 더 잘게 나누지 않고 5% 저항에서와 같은 공칭값을 사용하며 1% 저항에서는 96등분, 그 이상의 정밀급에서는 192등분한 공칭값 체계가 국제 규약으로 통용되고 있다.[2)]

평균율

이상과 같은 대수축척은 공학에서만 나타나는 것이 아니다. 일상에서 보다 쉽게 접할 수 있는 악기들에서도 대수축척이 사용된다. 예를 들면 피아노의 각 건반은 고유한 음높이를 가지고 있는데 음높이는 음파의 진동수(주파수)에 의해 결정된다. 그림 3은 피아노의 건반과 그에 해당하는 진동수를 대수축척 상에서 보여주고 있다.

음높이의 기준은 중앙에 있는 "라"에 해당하는 건반으로 절대음계로는 "A"(우리말로는 "가")로 표현된다. 그 주파수는 국제 규약으로 440Hz로 정해져 있다. 그림에 나타낸 것과 같이 한 옥타브 위의 A에 해당하는 주파수는 880Hz, 즉 기준 주파수의 2배가 되고 한 옥타브 아래 A의 주파수는 220Hz이다. 즉 옥타브란 주파수가 2배가 되는 음간의 거리를 말한다. 따라서 두 옥타브에서 주파수의 비율은 4배, 세 옥타브에서는 8배, 하는 식이 된다.

한 옥타브 안에는 흰 건반 일곱개와 검은 건반 다섯개, 총 열두개의 건반이 있는데 각 건반의 주파수는 그림에 나타낸 것과 같이 대수축척 상에서 한 옥타브를 12등분하는 위치에 놓인다. 이는 바로 인접한 건반 사이의 주파수 비율이 $2^{1/12}$임을 의미한다. 즉

$$f_{k+1} = 2^{\frac{1}{12}} f_k$$

이 주파수의 차이는 우리 귀에 반음의 차이로 들리게 된다. 이렇게 "일정한 비율로 음간의 거리를 나누어 놓은 것"을 평균율(equal temperament)이라 하고 바하 이후 근대의 거의 모든 서양악기는 이 평균율법을 기준으로 해서 만들어져 왔다.

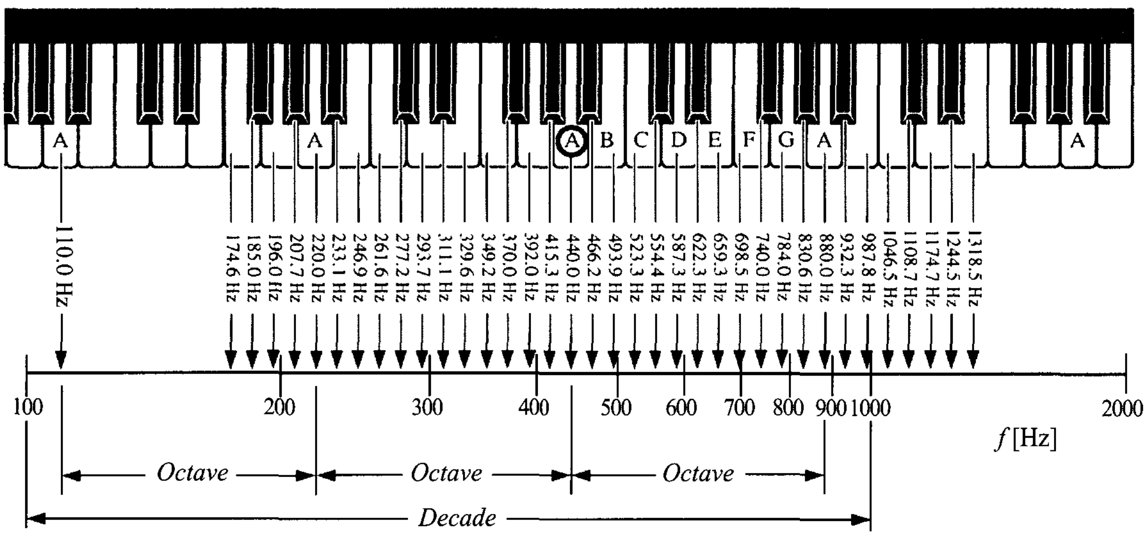

그림 3. 피아노 건반의 음높이

註 2) 저항의 오차범위에 따른 공칭값을 나열한 표는 일반적인 전기전자 핸드북 등에서 쉽게 찾을 수 있다. 혹은 다음의 사이트를 참조하기 바란다: http://www. elexp.com/t_eia.htm

바이얼린의 경우 네 개의 현이 있는데 맨 아래에서부터 G, D, A, E의 기본 음높이를 가지고 있다. 그림 3과 비교해 보면 각 현과 다음 현 사이는 대수축상에서 일곱 개의 반음에 해당하는 일정한 거리를 가지고 있음을 알 수 있다. 즉 인접한 두 현 사이의 기본 진동수 비율은 $2^{7/12}=1.498 \fallingdotseq 1.5$가 된다. 음악용어로 이러한 음정(음간의 거리)을 완전 5도 음정이라 한다. 피타고라스가 두 음이 잘 어울리려면 현의 진동수 간에 단순한 정수비가 성립되어야 한다는 사실을 발견하였는데 이 완전 5도 음정에 해당하는 비율은 3:2, 즉 1.5이다.[3] 평균율에서 그 수치가 정확하게 1.5가 되지 않는다는 사실은 평균율이 음정을 나타내는 하나의 근사적인 방법이라는 것을 의미한다. 실제로 평균율은 음정을 단순한 정수비(2:1, 3:2, 4:3, 9:8, 10:9 등)로 나타내는 순정율(pure temperament)을 근사화시킨 것으로 조바꿈을 자유롭게 하기 위한 실용적인 목적으로 고안된 것이다.

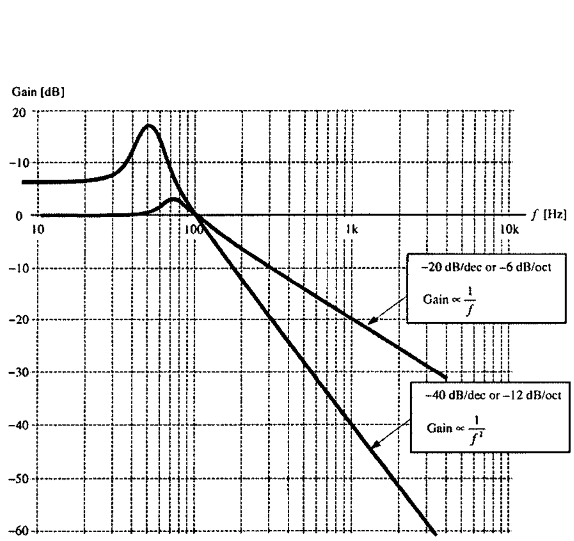

그림 4. 보드선도

Decade와 octave

앞서 설명한 저항의 공칭값 설정과 악기의 평균율은 대수축척을 일정한 비율로 등분하고 있다는 데에서 공통점을 지니고 있다. 그러나 수치로 표현되어야 하는 저항값의 경우에는 10진법 표현과 부합되도록 10배에 해당하는 대수축상에서의 간격, 즉 decade를 기준으로 하고 있는 반면 굳이 수치로 나타낼 필요가 없이 청각으로 직접 느낄 수 있는 악기의 음높이는 사람의 귀에 같은 음계로 들리는 2배에 해당하는 대수축상에서의 간격, 즉 octave를 기준으로 하고 있다는 점에서 차이가 있다. Decade와 octave는 그림 3에 나타내었듯이 일정한 비례관계를 가지고 있으며 다음의 식으로 표현된다.

$$1[\mathrm{dec}] = \frac{1}{\log 2}[\mathrm{oct}] \approx 3.32[\mathrm{oct}]$$

어떤 시스템의 주파수 응답특성을 그림 4와 같이 보드선도로 나타낼 때 시스템의 이득이 주파수에 반비례하는 영역에서는 그 특성을 -20 dB/dec(20log(1/10)에 해당)라 표현한다. 이는 주파수가 10배 될 때마다 이득이 1/10이 됨을 의미한다. 같은 내용을 주파수가 2배 될 때마다 이득이 1/2이 되는 것으로 표현하면 -6 dB/oct(20log(1/2)에 해당)로 쓸 수 있다. 실제로 오래된 제어공학 책에는 이런 표현법을 종종 발견할 수 있고 경우에 따라 유용한 표현방식으로 활용할 수 있다.

피아노의 뚜껑을 열었을 때 거기에 보이는 희고 검은 건반들이 대수좌표축의 눈금으로 보인다고 하면 별로 재미 없는 사람이란 이야기를 들을 것이다. 그러나 그 뒤에 감추어진 여러 가지 사연들을 이해하는 것은 우리가 사용하는 공학적 언어가 일반적인 언어와 특별히 구분되는, 동떨어진 것이 아니며 자연의 섭리를 보다 효율적으로 표현하면서 불완전한 인간의 지각능력과 조화시키고자 하는 노력의 결과라는 것을 이해하는 단서가 될 수 있을 것이다.

註 3) 기타의 경우에는 6개의 현이 E-A-D-G-B-E로 두 개의 옥타브에 걸쳐 있다. 따라서 24개의 반음이 각각의 현 사이에 5-5-5-4-5로 배분되어 있다. 여기서 5개의 반음(완전4도)에 해당하는 음정은 $2^{5/12}=1.334 \fallingdotseq 4:3$의 진동수 비율을, 4개의 반음(장3도)에 해당하는 음정은 $2^{4/12}=1.259 \fallingdotseq 5:4$의 진동수 비율을 갖는다. 현악기의 진동수 비율이 이와 같이 단순한 정수비에 가깝게 정착된 것은 아마도 고대로부터 음에 관한 연구가 현악기에서 출발하였기 때문일 것이다.