

무인 자동차의 코너링에 관한 수학적 모델링

이수종*, 정원지**

Mathematical Modeling for Cornering of Unmanned Vehicle

Soo-Jong Lee*, Won-Jee Chung**

Abstract

Unmanned vehicles have to decide their velocities suitable for the paths which should be generated by the vehicles themselves, based on the kinematic and dynamic aspects of vehicles. For this purpose, this paper is to propose a mathematical modeling of turning trace for the cornering of an unmanned vehicle by using normal-tangent coordinates as well as extracting the characteristics of behavior for car drivers in cornering. In the proposed modeling, the limitations of velocity can be determined based on the knowledge that the handling of drivers means the control of radius of curvature. The proposed modeling can reduce computational load and generate turning angles and velocities suitable for the cornering of unmanned vehicles.

Key Words : Cornering(코너링), Turn Range(회전영역), Radius of Curvature(곡률 반경), N-T Coordinates(법선좌표계)

1. 서론

무인 자동차가 코너링(cornering)을 성공적으로 수행하기 위해서는 크게 세 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫째, 기하학적으로 무인자동차의 회전각도량의 선택과 이것을 이루어 내기 위한 회전 영역의 계산이다. 둘째, 제어적인 측면으로 고속으로 움직이는 무인자동차의 기하학적인 궤적설계가 실시간으로 연산처리가 되어야 한다. 셋째, 무인 자동차가 도출한 궤적설계와 제어가 동력학적인 입장에서 전복한계속도를 넘어서지 않도록 회전속도를 산출해야한다. 위

세 가지는 각자가 독립적인 것이 아니라, 무인자동차가 코너링을 하는 순간에 있어서 유기적으로 고려되어야 한다.

그러나 이와 같은 공학이 겪는 어려움에도 불구하고 실제적으로 운전하는 자동차 운전자들은 다양한 각도의 회전과 속도의 선택, 그리고 예기치 못한 전방 물체의 등장에 대한 대체 능력은 거의 완벽에 가깝다.

따라서 본 논문은 지금까지의 동력학적인 회전 모델링⁽¹⁻⁵⁾을 탈피하여서 실제적으로 운전하는 운전자의 입장에서 운전자의 사고와 행동을 추적하여서 결정되는 회전량과 회전속도의 관계를 동력학적인 모델링을 하고, 실제로 이것

* 시크릿뱅크
(정원지 wichung@sarrim.changwon.ac.kr)
** 창원대학교 기계설계공학과

을 바탕으로 하여 프로그램을 만들고 실험하여 적용해 보았다.

2. 수학적 모델링

무인자동차의 차량의 운동은 Fig. 1에서 볼 수 있듯 Roll, Pitch, Yaw 운동의 복합적인 요소로 나타나 진다. 그리고 이에 대한 해석을 위해서, 대부분 9개의 자유도⁶⁾를 가지고 해석을 한다. 무인자동차 해석의 가장 중요한 요인은, 각각의 자유도와 상호 관계해석이 해당 궤적에 대한 구속조건을 만족시켜야 한다는 것이다.

본 논문의 주제는 그러한 궤적 설계에 있어서 실질적인 운전자의 인식과정을 동력학적으로 모델링하는 방법을 논하는 것이다. 이를 위하여 무인 자동차의 코너링을 2차원 평면운동으로 가정하는 과정을 거친다. 그러면서도 외부로부터 결정된 기하학적인 구속 조건을 만족시키도록 하는 것이다.

2.1 운전자가 코너링을 수행하는 과정

운전자는 길의 모양이나 앞의 물체와의 거리에 의해서 차의 방향과 속도를 선택한다. 예를 들어, 운전자가 자신이 회전하고자 하는 방향을 알고 있다고 하자. 이것을 수행하기 위해 운전자는 핸들을 돌리고, 차체의 회전력에 의해 몸의

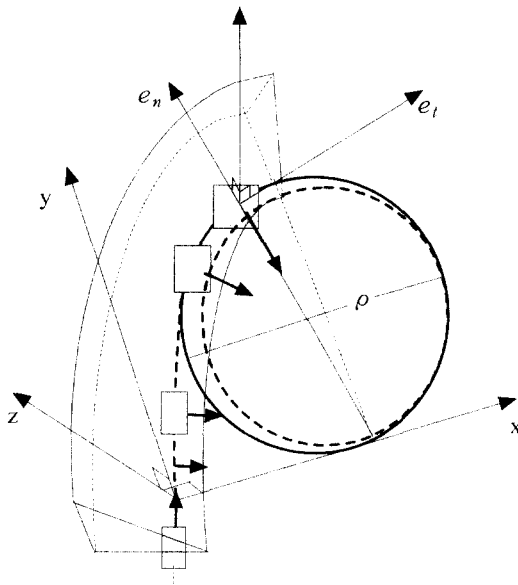


Fig. 1 Movement of vehicle

치우침을 느끼면 속도를 줄이게 된다. 다시 말해서 코너링의 우선권은 무인자동차의 속도보다도 외부조건에 있다. 이 외부 조건에는 회전량과 물체와의 거리가 있으며, 이런 구속 조건을 만족한 후에 역학적 안정성을 위한 속도 해석이 뒤따라야 한다. 이러한 과정을 무인자동차를 제어하는 입장에서 본다면,

1. 운전자의 핸들링을 매개변수 k 로 설정한다.
2. 이 매개 변수 k 에 의해서 회전하고자 하는 회전량 ($\theta(k)$)과 곡률반경 (ρ_k)를 결정하고, 이것에 의한 기하학적 궤적의 모양을 먼저 결정한다.
3. 결정된 궤적을 수행하기 위한 기하학적 함수를 선택하고, 그 후 역학해석에 의해 속도를 제어한다.

2.2 코너링에 필요한 회전영역과 회전속도

무인 자동차가 코너링을 성공적으로 수행하기 위해서는 기하적 구속 조건(회전해야 할 각도, 회전영역)을 만족해야 한다.

Fig. 2에서 볼 수 있듯이, 본 논문에서는 무인 자동차가 회전을 하는데 필요한 영역을 'Turn range ($H_{total} = H_y \times total \times H_x \times total$)'라 하고, 이것을 자동차의 회전각도의(조향 각도 (vehicle orientation)) 변화량이 영(zero)에서부터 변화하여 다시 영(zero)로 되돌아오는 데 필요한 영역으로 정의한다. 'Turn 진입속도(v_1)'는 회전을 시작할 때에 진입하는 속도로 정의하고, 'Turn 탈출속도(v_3)'는 Turn이 끝나는 시점의 속도로 정의한다. 그리고 Turn을 시작하는 시작선을 Reference Line라 한다.

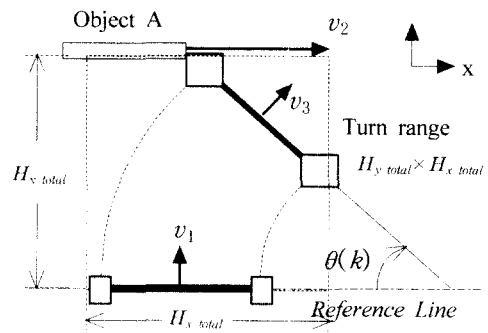


Fig. 2 Turn range of vehicle

3. 수학적 모델링의 근사화

3.1 법선 좌표계의 응용

물체가 일정한 궤적을 따라서 움직일 때, 법선 좌표계는 물체가 임의의 순간에 받는 힘의 요소를 접선 방향과 법선 방향으로 해석할 수 있도록 해준다. Fig. 3은 Fig. 2의 2차원 x-y평면으로 형성되는 곡률 반경과 가상원을 확대해서 나타낸 것이다.

식(1)은 물체가 움직여야 할 궤적 $f(x)$ 가 결정되었을 때, 힘을 받는 물체의 입장에서 해석할 수 있는 식이다.

$$a_p(x) = a_t e_t + a_n e_n = v' e_t + \frac{v^2}{\rho} e_n \quad (1)$$

주어진 궤적 함수 $f(x)$ 에 대해 곡률 반경의 길이는 식(2)와 같이 간단하게 도출된다.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{(1+f(x)')^2)^3}}{f(x)''} \\ \rho_x &= x - \frac{f(x)'}{f(x)''} - \frac{f(x)'}{f(x)''} \\ \rho_y &= \frac{1}{f(x)''} + \frac{f(x)'}{f(x)''} + f(x) \end{aligned} \quad (2)$$

그리고, 식(3)은 곡률반경에 해당하는 미소길이 변화 (ΔS)의 관계를 도출한 식이다.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta\theta \times \rho \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \times \rho \\ \sqrt{1 + f(x)'^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \times \rho \end{aligned} \quad (3)$$

만약 무인 자동차가 이 궤적 함수 $f(x)$ 를 추적하여 따라 간다면, 식(2)와 (3)을 이용하여 각도 변화 함수를 계산할 수 있다. 즉, Fig. 3에서 미소 길이의 변화 ΔS 와 2차원 평면 x-y의 관계식에서 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{f(x)''}{1 + (f(x)')^2} \quad (4)$$

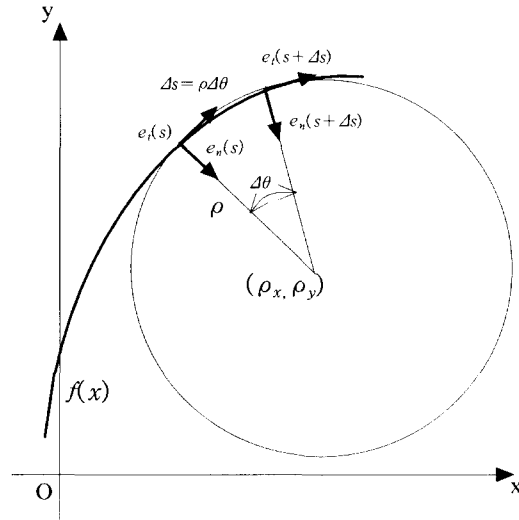


Fig. 3 2-D Review of turn range

3.2 코너링의 각도 변화 함수의 결정

무인자동차의 제어의 중심은 핸들링에 있고, 이것의 수학적 매개물은 각도 변화의 제어나 곡률반경의 제어에 있다. 이를 위해서, 접선-법선 좌표계를 기준으로 도출한 (2),(4) 번식으로 궤적 설계를 한다면, 이 식의 수학적 결과에 의해서, 항상 곡률 반경이나, 각도 변화의 불연속 성을 발생시킨다. 따라서, 운전자가 코너링을 할 때의 인식과정과 행동들을 추적하여 동력학적으로 재해석하기 위해서는 앞 절(본문 2.1)서 설명하였듯 궤적 함수 $f(x)$ 를 선택하는 것으로부터 출발하는 것이 아니라, 역으로 $\Delta S_k = \Delta\theta_k \times \rho_k$ 에서 핸들링에 관한 매개 변수 (k)를가지고, '각도 변화 함수($\Delta\theta_k$)'와 '곡률 반경 함수(ρ_k)' 관계를 설정하여 궤적함수 $f(k)$ 를 만들어야 한다.

따라서 무인 자동차 자체가 지니고 있는 변수 ' $\rho_k - \Delta\theta_k$ ' 만으로 궤적을 그릴 수 있는 좌표계를 필요로 한다. 이것을 가지고 기하적인 궤적과, 동력학적으로 재해석해 나감으로써 우리가 지향하는 목표를 이루어 낼 수 있다. 즉,

1. 코너링을 위한 회전 각도 계산.
2. 이것에 필요한 Turn range 계산.
3. 각도 변화 함수와 곡률 변화 함수를 선택하여 Fig 4와 같이 궤적을 그리며 주어진 Turn range에 맞는지를 살핀다.

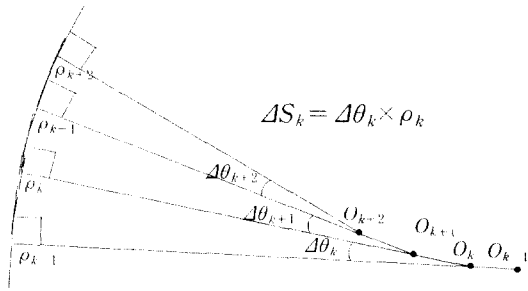


Fig. 4 $\rho_k - \Delta\theta_k$ Relation

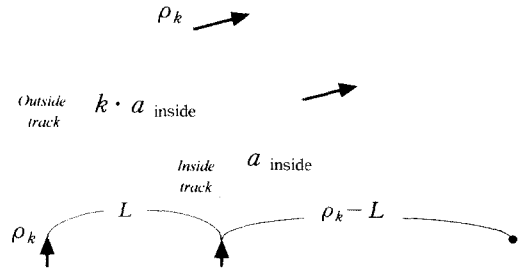


Fig. 5 Kinematic model

4. 이러한 요건이 충족된 후, 여기에 맞는 역학 계산을 하고 Turn속도를 선택한다.

4. 실험

본 논문에서는 실제적인 운전자의 코너링에 대한 인식 과정과 행동을 추적하여 이것을 모델링하는 것에 중점을 두었다. 운전자는 핸들 하나만으로 회전 궤적을 만들고, 엑셀레이터와 브레이크로 회전 궤적과 관계없이 속도를 조절한다.

본 논문에서는 2자유도를 가진 자율 이동 로봇으로 Turn 궤적을 그리는 것과 회전 속도를 자율적으로 선택하는 것에 중점을 두고 실험하였다.

4.1 곡률 반경 함수의 결정

코너링에 관한 기하학적 궤적을 결정하는 방식은 각도 변화와 곡률 반경의 변화를 하나의 변수로 묶어서 표현하여, 물체의, '회전 궤적 식'을 만들어 내는 것이다.

접선-법선 좌표계에서 임의의 한 순간에 나타나는 곡률 반경을 가지고 오고, 자동차 양 바퀴 사이의 길이를 L로 두자. Fig. 5에서 양쪽 바퀴 궤적의 비가 정해지면 가상 중심의 크기가 결정되는 것을 알 수 있다. 이 양 바퀴의 기하학적인 길이의 비와 곡률 반경과의 관계식은 다음과 같다.(양 바퀴의 간격을 L로 놓고, 곡률 반경을 ρ_k , 안쪽 궤적의 길이를 a_{inside} , 그리고, 안과 밖의 궤적 비를 k로 놓았을 때.)

1. 바깥쪽 궤적의 경우, $a_{outside} = k \cdot a_{inside}$ 에서

$$k \cdot a_{inside} = \rho_k \cdot \Delta\theta \quad (5)$$

2. 안쪽 궤적의 경우,

$$a_{inside} = (\rho_k - L) \cdot \Delta\theta \quad (6)$$

3. 위 1, 2.의 결과를 가지고 안쪽 궤적과 바깥쪽 궤적을 하나로 묶어서 표현하면, $(\rho_k - L) \cdot \Delta\theta = \rho_k \cdot \Delta\theta / k$ 이다.

이 식을 정리하면,

$$\rho_k = \frac{L \cdot k}{k - 1} \quad (7)$$

운전자가 핸들로서 자동차를 제어한다는 것은 Fig. 5에서와 같이, 곡률 반경의 길이와 안과 바깥쪽의 바퀴가 그리는 궤적의 길이가 핸들 하나만으로 결정됨을 의미한다. 식 (7)에서 k는 운전자의 핸들 조작을 나타낸다. 따라서, ρ_k 가 변수 k 하나에 관한 함수 $\rho(k)$ 가 된다. (여기서 ρ_k 는 바깥쪽 바퀴의 곡률 반경을 의미한다.) 이 곡률 반경은 우리가 제어하고자 하는 물체가 코너링을 할 때 역학적 해석에 중요한 단서를 제공해 준다. 그러나 회전량의 기하학적인 특성을 만족시키지는 못한다. 그러므로 이 k변수와 각도 $\Delta\theta$ 사이의 관계식을 도출해야 할 것이다.

4.2 코너링의 각도의 변화와 호의 관계

Fig. 6에서 바깥쪽 바퀴 궤적의 길이 a_{out} (arc, 호)는 다음과 같이 표현되어 진다.

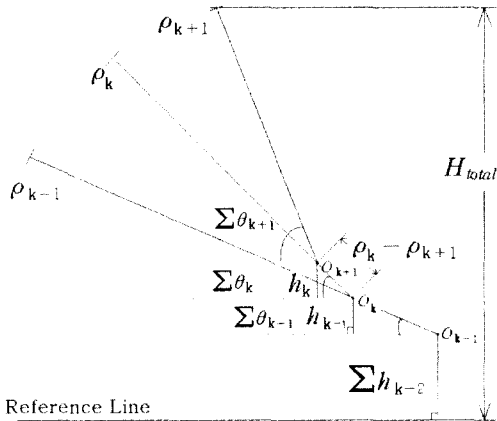
$$\begin{aligned} a_{out}(\text{arc, 호}) &= \rho(k) \times \Delta\theta_{\text{radian}} \\ &= L \frac{\pi}{180} \times \frac{k}{k-1} \times \Delta\theta_{\text{degree}} \end{aligned} \quad (8)$$

이 식에서 $\Delta\theta_{\text{degree}}$ 의 변화를 k에 관한 함수로 선택한다면, 우리는 호의 길이와 각도의 변화, 그리고 곡률 반경

이 세 가지를 하나의 변수로 묶어 낼 수 있게 된다. Fig. 6은 시간의 변화에 따른 곡률 반경과 각도 변화의 관계를 기하학적으로 도식화한 것이다. 즉 운전자가 핸들 k_k 을 선택하였을 때의 곡률 반경은 ρ_k 이고, 이것으로 결정되는 회전량은 $\angle \rho_{k-1} o_k \rho_k$ 즉, θ_k 이며, 이 때의 바깥쪽 바퀴의 길이는 $\Delta\theta_k \cdot \rho_k$ 이다.

4.3 회전 영역의 결정

코너링을 실제적으로 제어하기 위해서는 또 다른 구속 조건 즉, 주어진 환경 내에서 위에서 설명한 일련의 과정을 수행하여야 한다. Fig. 1에서 예기치 못한 임의의 물체가 나타났다면, 제일 먼저 무인 자동차는 속도량과 회전량을 결정해야 하는데, 이것을 판단하는 기준이 바로 H_{total} 를 구하는 일이라 할 수 있다.



4.4 회전 영역의 계산방법

Turn-Range를 구하기 위해서는 먼저 가상 중심(o_k)의 움직임을 추적하여 그 높이(h_k)를 구하고 곡률 반경과의 관계를 구한 후, 바깥쪽 바퀴의 높이를 구한다. 기준선에서부터 가상 중심이 변할 때, 외부 바퀴의 궤적의 높이 H_{total} 를 계산함으로써 회전 영역을 간단히 구할 수 있다. Fig. 6에서 핸들이 연속적으로 변할 때, 식 (9)은 가상중심의 높이 h_k 의 변화를 보여 준다.

$$h_k = (\rho_k - \rho_{k+1}) \sin \sum \Delta\theta_k \tag{9}$$

4.5 실제 90 Turn 궤적 실험

각도 변화의 함수 $\Delta\theta_{deg}$ 로 선택했을 때, 90° Turn을 위해서, 소요되는 바깥쪽 바퀴의 길이와 물체가 받는 최대 원심력을 계산하여 보자, (단, 이해를 돕기 위해서 $k=1,2,3, \dots, n$ 정수의 변화로 단순화하였다.)

Table 1은 각도 함수 $\Delta\theta_{deg} = (k-1)^2$ 로 했을 때의 곡률 반경 함수($\rho(k) = \frac{L \cdot k}{k-1}$)과 길이 변화를 나타낸 것으로, 각도 함수 θ_{deg} 가 주어졌을 때, 바깥쪽 호의 길이는 식 (5)에 의해서 k 에 관한 함수로 선택된다. 이것은 Fig. 3에서의 곡률 반경이 결정되었을 때의 길이 $\Delta s = \rho \Delta\theta$ 를 나타낸다. 즉, $\Delta s = a_{outside track} = L \frac{\pi}{180} \times k(k-1)$ 인데, 이 정보를 이용함으로써 우리는 무인 자동차가 회전하는 데 소요되는 총 거리를 바깥쪽 바퀴 궤적의 길이를 합한 식(10)을 이용함으로써 계산될 수 있다.

$$\sum \rho(k) \times \Delta\theta(k)_{radian} = \sum L \frac{\pi}{180} \times k(k-1) \tag{10}$$

Table 1에서 변수 $k=6$ 일 때, $\Delta\theta=25$ 이어야 하지만, 이 미 차량은 90도 회전이라는 정보를 가지고 있으므로, 이 차량의 운동은 45도를 기준으로 대칭이게 된다(이러한 회전은 Turn 진입 속도와 탈출 속도를 같게 할 수 있다). 따라서, 변수 $k=6$ 일 때 15도 회전만을 하면 45도를 이루어 낸다. Fig. 6에서는 k 상수가 변할 때의 곡률 반경의 변화를 기하학적으로 설명한다.

Table 1 Results of K-function

k	2	3	4	5	6
$\Delta\theta_{deg}$	1	4	9	16	15
$\sum \Delta\theta_{deg}$	1	5	14	30	45
$\rho(k)$	$2L/1$	$3L/2$	$4L/3$	$5L/4$	$6L/5$
$a_{outside track}$	$L \frac{\pi}{90}$	$L \frac{\pi}{30}$	$L \frac{\pi}{15}$	$L \frac{\pi}{9}$	$L \frac{\pi}{6}$

위와 같은 회전의 역학적인 계산은 동력학적인 근사화에 의해서 법선 좌표계의 공식인 식 (1)을 사용하고, 변수 k 가 바뀌는 경우에서의 곡률 반경의 변화와 힘의 불연속적인 경우는 무시한다. 여기서, 회전량의 기하학적 모양과 속도를 결정하여, 우리는 바깥쪽 바퀴의 접선과 법선의 힘의 크

기를 결정할 수 있다. 예로 위의 경우, 가장 힘을 많이 받는 경우는 $k=6$ 일 경우로 그 힘의 양은, $a_t = v'$, $a_n = 5v^2/6L$ 의 가속도 성분을 계산함으로써 구할 수 있다. 따라서, 무인 자동차의 속도 한계가 위의 식에 의해서 결정되어야 하며 곡

률 반경을 줄일 수 없다면, 속도를 낮추어야 하는데, 이때의 속도는 고속도로의 기율기 즉, Fig. 2에서의 y-z 좌표로의 기율기 해석과 종합적으로 고려되어야 한다.

5. 프로그램

지금까지 코너링을 하기 위해 필요한 기하적, 수학적인 배경과 역학 해석, 이 두 가지를 살펴보았다. 이것을 프로그램으로 구현하려면, 운전자가 다가오는 물체의 속도에 따라 핸들링을 하듯이, 다양한 각도 함수를 가지고 있어야 한다. 즉 운전자가 다가오는 물체의 속도에 따라 핸들링을 하는 방식을 프로그램으로 구현하려면 몇 가지 조건이 필요하다.

- (1) 다양한 각도 함수를 가지고 있어야 한다.
- (2) 매순간 다른 각도 함수를 찾을 수 있어야 한다.
- (3) 다른 각도 함수로 전환할 때에는 현재의 곡률 반경 정보를 바탕으로 한다.

예로, Table 1에서 선택했던 $\Delta\theta_{dex} = (k-1)^2$ 를 가지고 무인 자동차가 코너링을 시작하여 $k=3$ 에서 $\rho(3) = 3L/2$ 의 곡률 반경을 가지고 회전하고 있을 경우, Fig. 1에서와 같이 피하고자 하는 물체가 예기치 못한 행동으로 회전 각도의 증가량을 더욱 크게 할 필요가 있어서, $\Delta\theta_{dex} = (k-1)^3$ 로 전이했다면 이 곡률 반경을 기준으로 $k=4$ 일 때, $\Delta\theta_{dex}$ 가 9도가 아닌 16도가 될 것이다. Fig. 7은 이러한 일련의 과정을 보여 준다.

6. 결론

지금까지 운전자의 인식 과정을 추적하여 동력학적인 접근을 하였다. 임의의 물체가 나타나거나 정해진 길에 따라서 코너링을 하려고 한다면 제일 먼저, 그에 따른 기하적 궤적이 먼저 선택된 후, 역학이 계산되어야 한다.

부연하자면 양 바퀴 각각을 분리하여 각각의 바퀴를 제어하는 것이 아니라, 이것을 동시에 묶어 낼 수 있는 곡률 반경의 제어 방식을 택하여 가상 중심의 변화를 추적, 해석하는 것이라 할 수 있다. 따라서 운전자의 핸들링에 대한 매개 변수를 가지고 무인 자동차 스스로 궤적을 그릴 수 있는 새로운 방식의 좌표계를 필요로 한다.

우리는 이러한 알고리즘의 실제적인 실험의 적용에 있어서 마이크로 로봇을 제작하여 실험하였으며, 원하고자 하는

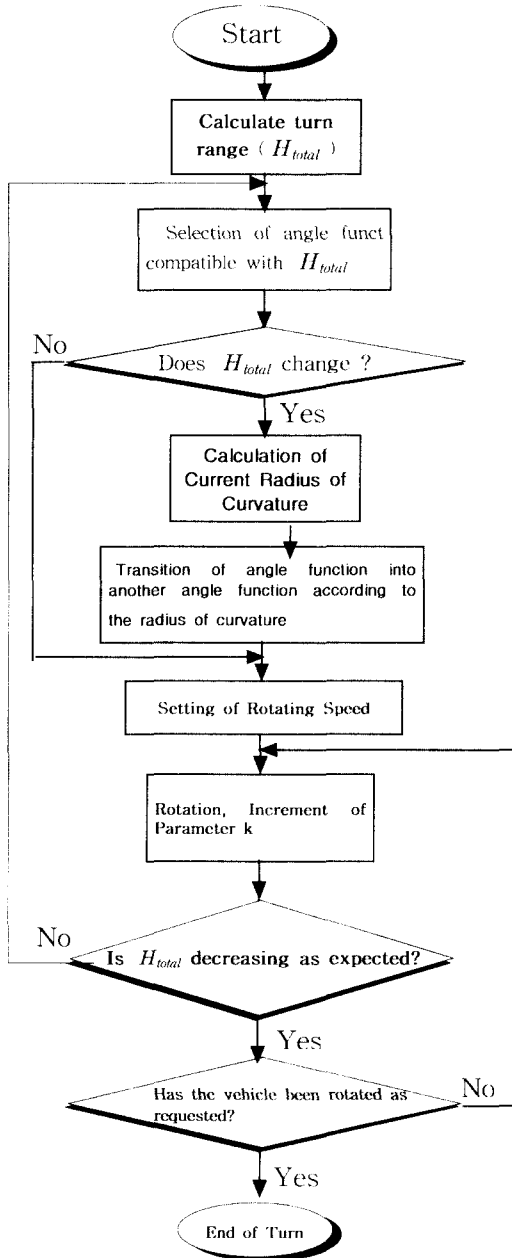


Fig. 7 Cornering algorithm

모든 회전 각도와 회전 속도의 산출에 있어서, 만족할 만한 성과를 보였다. 이번 실험에 사용된 동력원으로 스텝핑 모터를 사용하고 어셈블리 언어를 사용하여 곡률 반경의 변화를 단순화하였으나, 만약 DC 모터를 동력원으로 사용하고, 소수점 연산이 가능한 CPU를 선택해서 사용한다면 더욱 정밀한 곡률 반경과 각도 및 회전 속도 제어가 가능할 것이다.

정의

회전영역(turn range) : 자동차의 회전각도 변화량이 영(zero)에서부터 변화하여 다시 영(zero)으로 되돌아오는 데 필요한 영역

회전진입(시작)속도(turn start velocity) : 회전(turn)을 시작하기 위해 자동차의 곡률반경이 무한대에서 임의의 상수로 변하기 시작하려는 속도

회전탈출속도(turn end velocity) : 회전(turn)을 끝내어서 자동차의 곡률 반경이 상수에서 다시 무한대로 변하는 순간의 속도

기준선(reference line) : 회전(turn)을 시작하려는 시작선

기호설명

$$H_{total} = H_{x total} \times H_{y total} \text{ (회전영역)}$$

v_1 : 회전(turn) 진입(시작) 속도

v_2 : 물체의 속도

v_3 : 회전(turn) 탈출 속도

e_t : 접선방향의 단위 벡터

e_n : 법선 방향의 단위 벡터

ρ : 곡률 반경

ρ_k : 상수 k일 때의 곡률 반경

$\Delta\theta_k$: 상수 k일 때의 각도 증가량

후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 창원대학교 공작 기계기술 연구센터의 지원에 의한 것입니다.

참 고 문 헌

- (1) C. Samson and K. Ait-Abderrahim, "Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in Cartesian space," *International Conf. on Robotics and Automation* (Sacramento, CA), pp. 1136~1141, 1991.
- (2) B. d'Anrea-Novel, C. Bastin and G. Campin, "Modeling and control of nonholonomic wheeled mobile robots," *International Conf. on Robotics and Automation* (Sacramento, CA), pp. 1130~1135, 1991.
- (3) X. Yun and Y. Yamamoto, "Internal dynamics of a wheeled mobile robot," *International Conference on Intelligent Robots and Systems* (Yokohama, Japan), pp. 1288~1294, 1993.
- (4) 한성현, "원자력 발전소 스팀제너레이터의 자동검사를 위한 지능형 로봇비전 시스템 설계", 한국공작기계학회지, pp. 19~33, 제9권, 제6호, 2000.
- (5) 박기형, 김재열, 곽이구, 한재호, "DC Servo motor를 이용한 초정밀 위치결정기구의 컴퓨터 시뮬레이션 및 제어성능 평가", pp. 164~169, 제9권, 제6호, 2000.
- (6) 김민철, "기구학적 모델에 기초한 차량의 조향제어", 포항공과대학교 석사학위 논문, 1994.