

적응요소 MLFMA를 이용한 유전체층을 가진 3차원 도체의 정전용량계산

A Fast Capacitance Extraction Algorithm for Multiple 3-Dimensional Conductors with Dielectrics using Adaptive Triangular Mesh

김 한 · 안 창 회

Han Kim · Chang Hoi Ahn

요 약

본 논문에서는 유전체층을 가진 3차원 도체의 정전용량 계산을 위한 적응요소 MLFMA를 제안하였다. 고속화 알고리즘인 MLFMA와 더불어 높은 전하밀도를 가지는 영역에서 삼각요소를 세분화함으로써 효율적으로 요소를 분할하게 된다. 제안된 기법은 유전체 층위의 3차원 도체의 정전용량을 계산하는데 적용되어 균일한 요소에 의한 계산결과와 수렴보다 빠른 결과를 얻을 수 있었다. 또한, 3차원의 복잡한 구조를 가진 문제의 해석에 있어서도 과도한 추가계산시간을 요구하지 않으므로, 제안된 방법은 MLFMA의 장점에 부합되는 적절한 기법이라 할 수 있다.

Abstract

This paper describes to extend the MLFMA(Multi-Level Fast Multipole Algorithm) for three-dimensional capacitance computation in the case of conductors embedded in an arbitrary dielectric medium. The triangular meshes are used and refined in the area which has heavy charge density. This technique is applied to the capacitance extraction of three-dimensional structures with multiple dielectrics. The results show good convergence with the comparable accuracy, and this adaptive technique coupled with MLFMA is useful to reduce computing time and the number of elements with least additional computational efforts in large three dimensional problems.

Key words : fast algorithm, capacitance extraction, adaptive mesh, error estimation.

I. 서 론

정보통신기술의 발전에 따라 더욱 수요가 늘어나고 있는 VLSI(very large scale integration)의 설계에 있어서, 많은 경우 유전체내에 도체들이 존재하는 복잡한 3차원 구조에서의 정확한 정전용량 계산이 필요하다. 정전용량의 수치적인 계산을 위한 방법 중 최근에 개발되어 많은 미지수를 갖는 문제에 매

우 적합한 고속화 알고리즘인 MLFMA (Multi-Level Fast Multipole Algorithm)가 있다.

이 방법은 일반적으로 균일한 매질내의 도체구조에 관한 정전용량의 계산에 많이 이용되어 왔는데^{[1]-[3]}, 최근 들어 임의의 유전체가 있는 경우와 유전체층이 있는 경우의 도체에서의 정전용량에 대한 연구가 드물게 있어 왔다.^{[4],[5]}

본 논문에서는 임의의 유전체 구조와 함께 여러

영남대학교 전자정보공학부(School of EECS, Yeungnam University)

· 논문 번호 : 20011103-13S

· 수정완료일자 : 2001년 12월 3일

도체가 존재하는 경우의 정전용량 계산을 수행하였다. 이 경우에 적합한 ECF(equivalent charge formulation)을 소개하였으며, 이것을 적응요소 MLFMA에 적용하는 방법을 제안하였다. 임의의 유전체 구조와 함께 존재하는 도체에서의 정전용량 계산을 위해 ECF을 이용할 경우 도체-유전체 경계면뿐만 아니라 유전체-유전체 경계면에서도 요소를 나누어야 하기 때문에 매우 많은 요소를 필요로 하게 된다. 따라서, 추가적인 과도한 컴퓨터 계산시간을 요구하지 않는 적절한 적응요소분할법이 필요하다. 본 논문에서는 적응 삼각요소 재분할을 통하여 복잡한 구조에서의 정전용량을 효과적으로 계산하였다.

II. 정전용량 계산 이론

임의의 유전체와 도체가 존재하는 매질내에서의 자기정전용량과 상호정전용량의 계산을 위해서는 일반적으로 ECF(equivalent charge formulation)을 사용한다⁴⁾.

이 방법에서는 도체표면에서의 포텐셜 계산을 위한 등가 표면 전하를 유전체-유전체 경계면과 도체-유전체 경계면에 두고, 자유공간에서의 문제로 가정하여 해석한다. 이 경우 도체 표면에서의 포텐셜은

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \int_{S_c} \sigma_c(x') \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x-x'\|} dS' \\ & + \int_{S_d} \sigma_d(x') \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x-x'\|} dS' \end{aligned} \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서, S_c 와 S_d 는 각각 도체-유전체 경계면과 유전체-유전체 경계면을 나타낸다. 이 등가 자유공간 문제에 있어서 유전체-유전체 경계면에서의 포텐셜의 미분은 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \epsilon_a \frac{\partial \phi_+(x)}{\partial n_a} - \epsilon_b \frac{\partial \phi_-(x)}{\partial n_a} = 0, \\ x \in \epsilon_a, \epsilon_b \text{ interface} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, n_a 는 유전체-유전체 경계면에서의 수직인 방향을 나타내고, ϵ_a 와 ϵ_b 는 각각 경계면 양편의 두 유전체 영역에서의 유전률을 나타낸다. 포텐셜

$\phi_+(x)$ 와 $\phi_-(x)$ 는 각각 ϵ_a 와 ϵ_b 영역으로부터 경계면으로 접근하는 x 점에서의 포텐셜을 나타낸다.

수치해석적으로 σ_c 와 σ_d 를 구하기 위해서는 도체 표면과 유전체 표면을 작은 요소로 분할하는데 요소 내에서는 전하밀도가 균일하다고 가정한다. 총 요소 수는 $n = n_c + n_d$ 이며, 여기서, n_c 는 도체-유전체 경계면에서의 요소 수이며, n_d 는 유전체-유전체 경계면에서의 요소 수이다.

각 도체 표면의 요소에서의 포텐셜은 다른 요소에서의 전하밀도에 의하여 구해진다. 예를 들어, 임의의 요소 j 에서의 전하에 의한 도체표면의 요소 i 에서의 포텐셜은

$$\frac{q_j}{a_j} \int_{\text{element } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i-x'\|} da' \quad (3)$$

이다. 여기서 x_i 는 요소 i 의 중점이며, x' 는 요소 j 표면에서의 위치를 나타낸다. 또한 a_j 는 요소 j 에서의 면적을 나타내고, 모든 요소 n 에 대하여 확장하여 생각할 때, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$p(x_i) = P_{i1}q_1 + P_{i2}q_2 + \dots + P_{ij}q_j + \dots + P_{in}q_n \quad (4)$$

여기서,

$$P_{ij} \triangleq \frac{1}{a_j} \int_{\text{element } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i-x'\|} da' \quad (5)$$

이다.

유전체-유전체 경계면의 요소 i 에서 만족하는 식은

$$\epsilon_a \frac{\partial p(x_{ia})}{\partial n_i} - \epsilon_b \frac{\partial p(x_{ib})}{\partial n_i} = 0 \quad (6)$$

이다. 여기서, n_i 는 요소 i 면의 수직방향이며, x_{ia} 와 x_{ib} 는 각각 ϵ_a 와 ϵ_b 인 영역으로부터 접근시킨 x 점을 나타낸다. 요소 j 에서의 계산을 위해 $i \neq j$ 라면 x_{ia} 와 x_{ib} 는 x_j 로 근사할 수 있다. 모든 요소에 대한 식으로 나타내면

$$D_{i1}q_1 + D_{i2}q_2 + \dots + D_{ij}q_j + \dots + D_{in}q_n = 0 \quad (7)$$

이 된다. 여기서,

$$D_{ij} \triangleq (\epsilon_a - \epsilon_b) \times \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{a_j} \int_{\text{element } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i - x'\|} da', \quad i \neq j \quad (8)$$

이다. 또한 $i=j$ 인 경우에 만족하는 식은

$$D_{ii} \triangleq \frac{(\epsilon_a + \epsilon_b)}{2 a_i \epsilon_0} \quad (9)$$

이다^[6].

모든 요소 n 에 대하여 식 (4)와 식 (7)로 구한 선형 행렬식은

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & \cdots & P_{n,n} \\ D_{n_c+1,1} & \cdots & D_{n_c+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n_l} & \cdots & D_{n_l n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{n_c} \\ q_{n_c+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n_c} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

과 같이 된다. 계산의 편의를 위해서 식 (8)에 $1/(\epsilon_a - \epsilon_b)$ 을 곱하여 식 (10)을 다시 구하면,

$$\begin{bmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n,1} & \cdots & P_{n,n} \\ E_{n_c+1,1} & \cdots & E_{n_c+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ E_{n_l} & \cdots & E_{n_l n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{n_c} \\ q_{n_c+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n_c} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기서, E_{ij} 는 $i \neq j$ 일 때의 요소 j 의 전하에 의한 요소 i 의 중점 x_i 에서의 전계의 법선성분을 나타낸다. 이것은

$$E_{ij} \triangleq \frac{\partial}{\partial n_i} \frac{1}{a_j} \int_{\text{panel } j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x_i - x'\|} da', \quad i \neq j \quad (12)$$

으로 나타낼 수 있으며, 만약 $i=j$ 라면 식 (12)는

$$E_{ii} \triangleq \frac{(\epsilon_a + \epsilon_b)}{2 a_i \epsilon_0 (\epsilon_a - \epsilon_b)} \quad (13)$$

이 된다. 식 (11)은

$$Aq = b \quad (14)$$

의 선형행렬식으로 나타내면,

$$A \triangleq \begin{bmatrix} P \\ E \end{bmatrix}, \quad b \triangleq \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

이다. 이 선형행렬식은 CGA(conjugate gradient algorithm)과 같은 반복적인 행렬식 계산 알고리즘에 의해서 계산되어진다.

III. MLFMA 적용

식 (11)의 행렬방정식은 반복법을 이용하여 풀 수 있는데, (k) 번째 반복시의 $Aq^{(k)}$ 행렬은

$$Aq^{(k)} = \begin{bmatrix} Pq^{(k)} \\ Eq^{(k)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

로 표현될 수 있다. $Pq^{(k)}$ 는 모든 요소의 전하에 의한 도체표면요소에서의 포텐셜을 구하기 위한 것인데, 이것은 MLFMA를 이용하여 계산되어질 수 있는 부분이다. $Eq^{(k)}$ 는 모든 유전체 표면의 요소중 점에서의 전계의 법선성분의 계산으로 이루어진다. 이것은 본 논문에 소개된 변형된 MLFMA에 의해서 계산되는 부분이다.

3-1 도체 표면에서의 $Pq^{(k)}$ 계산

Fast multipole 알고리즘의 주요 개념은 far-field 근사에 있다. 그림 1과 같이, 안쪽 구의 d 개 요소그룹에서의 전하에 의한 i 번째 요소의 중점 (r_i, θ_i, ϕ_i) 에서의 포텐셜을 고려할 때, 이들 d 개의 요소들에서의 표면전하에 의한 포텐셜은 다음과 같은 truncated multipole expansion에 의해서 표현되어진다.

$$\psi(r_i, \theta_i, \phi_i) \approx \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r_i^{n+1}} Y_n^m(\theta_i, \phi_i) \quad (17)$$

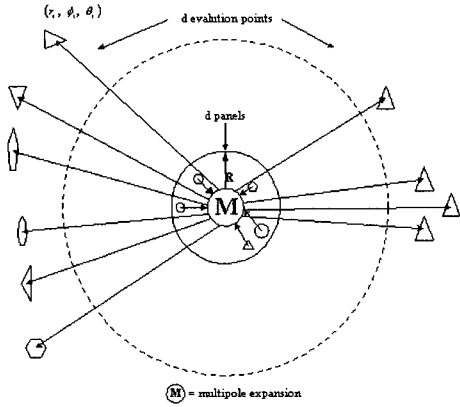


그림 1. Multipole expansion에 의한 포텐셜.
Fig. 1. The evaluation of the potential at panel i .

여기서, $Y_n^m(\theta_i, \phi_i)$ 는 surface spherical harmonics 이며, M_n^m 는 d 개의 요소들의 전하에 의한 multipole 계수이다. l 은 expansion 차수를 나타낸다. Multipole 계수 M_n^m 은

$$M_n^m = \sum_{j=1}^d q_j \rho_j^n Y_n^m(\alpha_j, \beta_j) \quad (18)$$

이다. 여기서, $\rho_j, \alpha_j, \beta_j$ 는 j 번째 전하의 구 좌표이다. 이렇게 구해진 multipole 계수는 다른 요소들의 포텐셜 계산에도 쓰여진다. 예를 들어, 그림 1에서와 같이 d 개의 도전된 요소들로부터 d 개의 요소에서의 포텐셜을 구해야 한다면, d^2 에 비례하는 연산이 필요할 것이나 multipole expansion을 사용하면 d 에 비례하는 연산만으로 계산되어진다.

Local expansion은 multipole expansion과 일반적으로 매우 유사하게 표현되어질 수 있다. 구의 외부에서의 전하에 의한 구에서의 포텐셜은 다음과 같은 truncated local expansion에 의해서 근사적으로 구해진다.

$$\psi(r_j, \theta_j, \phi_j) \approx \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n L_n^m Y_n^m(\theta_j, \phi_j) r_j^n \quad (19)$$

여기서, r_j, θ_j, ϕ_j 는 j 번째 요소에 대한 구 좌표이다. 그리고, L_n^m 는 구 반경 밖의 d 개의 전하로부터

터의 local expansion 계수이며 구하는 식은

$$L_n^m = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{q_i}{\rho_i^{n+1}} Y_n^m(\alpha_i, \beta_i) \quad (20)$$

이다. 여기서, $\rho_i, \alpha_i, \beta_i$ 는 i 번째 전하의 구 좌표이다.

앞서 언급한 multipole expansion과 local expansion을 이용하여 n 개 요소의 전하로부터 n 개 요소의 포텐셜을 구하기 위한 고속화 알고리즘을 적용하여 $Pq^{(k)}$ 행렬을 계산한다.

3-2 유전체 경계면에서의 $E_q^{(k)}$ 계산

유전체-유전체 경계면의 임의의 요소 i 에서의 전계의 법선성분 E_{ni} 의 계산은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$E_{ni} = E_{oi} + E_{ii}q_i \quad (21)$$

여기서, E_{oi} 는 요소 i 를 제외한 모든 요소에 의한 요소 i 에서의 전계의 법선성분이다. E_{oi} 를 구하기 위한 식 (12)에서의 미분은 차분으로 근사될 수 있는데, 그림 2에서와 같이 요소의 중점에서 수직 방향으로 같은 거리만큼 떨어진 두 점 x_a 와 x_b 을 이용하면 다음과 같이 된다.

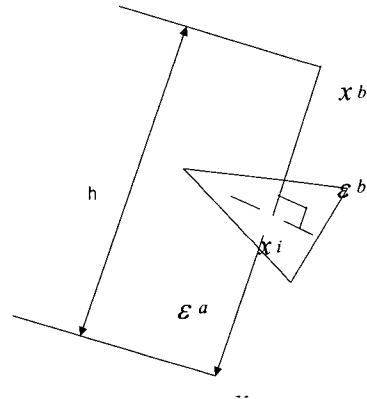


그림 2. 유전체-유전체 경계면 요소중점에서 수직 한 곳의 두 점.

Fig. 2. Two evaluation points for using a divided-difference on the dielectric-dielectric interface element.

$$E_{oi} \approx \frac{p(x_a) - p(x_b)}{h} \quad (22)$$

이것을 E_{oi} 에 더하여 요소 i 에서의 총 전계의 법선성분을 구한다.

다른 방법으로는 미분한 multipole algorithm 표현을 통하여 유전체-유전체 경계면의 임의의 요소에서의 전계의 법선성분을 계산하는 것이다. multipole expansion에 의한 포텐셜의 표현은

$$p_{mul}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^L \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times [\bar{M}_n^m \cos(m\phi) + \tilde{M}_n^m \sin(m\phi)] \quad (23)$$

이다^[1]. 이것을 미분하여 normal electric field를 구한 식은

$$E_{mul} \triangleq n \cdot \nabla \left(\sum_{n=0}^L \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times [\bar{M}_n^m \cos(m\phi) + \tilde{M}_n^m \sin(m\phi)] \right) \quad (24)$$

이 된다.

이와 유사하게 local expansion에 의한 포텐셜의 표현은

$$p_{mul}(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^L r^n \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) \times [\bar{L}_n^m \cos(m\phi) + \tilde{L}_n^m \sin(m\phi)] \quad (25)$$

이다. 이것을 미분하여 전계의 법선성분을 구한 식은 앞에서와 동일한 방법으로 구해진다.

IV. 적응 요소 MLFMA

임의의 유전체 구조와 함께 여러 도체가 존재하는 경우에 정전용량을 계산하기 위해서는 일반적으로 매우 많은 수의 요소를 필요로 한다. 따라서 유전체가 포함된 3차원 문제에서는 계산시간이 매우 증가하게 되는데, 이를 줄이기 위한 방법으로, 본 논문에서는 앞서 서술한 고속화 알고리즘에 적합한

적응요소분할법을 제안하였다.

MLFMA의 장점인 계산시간이 빠르다는 것을 최대한 활용하기 위해서는 최소한의 부가적인 계산만으로 오차예측과 요소개선이 이루어져야 한다. 이를 위해서, 본 연구에서는 각 요소의 전하밀도를 비교하여 상대적으로 큰 영역(주로 모서리, 꼭지점 및 마주보는 면)에 요소를 세분화하였다. 이때, 요소개선은 자동요소분할법을 이용하여 수행된다.

먼저, 초기 요소 분할이 이루어진 후에 정전용량 계산을 위한 Pq^k 와 Eq^k 의 계산이 이루어지고, 도체표면에서의 전하밀도값이 구해진 다음, 정전용량 행렬이 만들어진다. 그 후에 전하밀도가 높은 곳에서의 요소개선이 이루어진다. 이러한 계산을 수렴이 이루어질 때까지 반복한다^[7].

V. 계산결과

본 논문에서 제안한 방법의 평가를 위해 그림 3과 같이 유전체층위에 두 도체가 존재하는 경우의 정전용량을 계산하여 보았다.

그림 3에서 위의 두 도체는 같은 크기이며 길이, 폭 및 높이는 각각 $3 \mu m$, $1 \mu m$ 및 $1 \mu m$ 이다. 아래의 유전체층의 유전율은 $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r = 2.64 \epsilon_0$ 로 두었고, 가장 아래쪽에는 가로×세로가 $5 \mu m \times 5 \mu m$ 이며 두께가 $1 \mu m$ 인 도체판이 있다.

그림 4은 두 도체사이의 정전용량값의 수렴도를

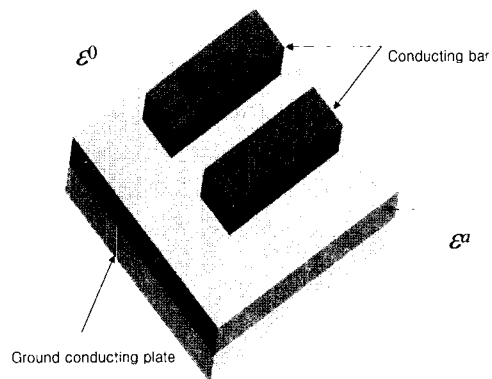


그림 3. 유전체층위의 두 도체.

Fig. 3. Two conductors with dielectrics.

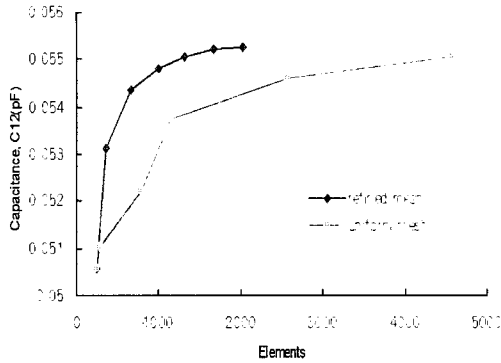


그림 4. 요소수에 따른 정전용량값의 수렴도.
Fig. 4. Convergence of capacitance value.

나타내고 있다. 균일분할한 경우에는 약 4,600개의 요소를 분할한 경우에 어느 정도 수렴하는 값을 얻었는데 비해 적응요소분할인 경우에는 약 2,000개 정도의 요소수로 수렴되는 값을 얻었다. 이때 수렴된 정전용량값을 표 1에 나타내었다. C11과 C12는 각각 도체 막대의 자기정전용량과 두 도체 막대사이의 상호정전용량이며, C13는 도체 막대와 아래의 도체판 사이의 상호정전용량을 나타낸다. 표 2는 균일분할(요소수 4,576개)한 경우의 정전용량 계산시간과 적응분할(요소수 2,028개)한 경우의 CPU 계산시간을 나타낸 것으로 약 1/2정도로 줄일 수 있음을 보였다.

VI. 결 론

본 논문에서는 임의의 유전체 구조와 함께 여러 도체가 존재하는 경우의 정전용량을 효율적으로 계산하기 위해서 MLFMA에 적합한 적응요소분할법을 제안하였다. 유전체층위의 두 개의 도체 막대가 있는 경우 제안된 방법을 이용하여 정전용량을 계

표 1. 수렴된 정전용량값.
Table 1. Capacitance value.

Capacitance Matrix Entry [fF]			
	C11	C12	C13
Uniform Triangular Mesh (4576 elements)	0.1594	-0.0550	-0.0399
Adaptive Triangular Mesh (2028 elements)	0.1598	-0.0552	-0.0391

표 2. CPU계산시간 비교(P-III 800 MHz).
Table 2. Comparison of the CPU times.

	Elements	CPU times[sec]
Uniform Triangular Mesh	4576	156.7
Adaptive Triangular Mesh	2028	93.4

산하여 훨씬 빠른 수렴을 얻었다. 이때의 계산시간은 균등하게 요소를 분할한 것에 비해 약 1/2로 줄일 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] K. Nabors and J. White, "FastCap: A multipole accelerated 3-D capacitance extraction program", *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, vol. 10, pp. 1447-1459, Nov. 1991.
- [2] K. Nabors, S. M. Kim, and J. White, "Fast capacitance extraction of general three-dimensional structures", *IEEE Trans. on MTT*, vol. 40, pp.1496-1506, July 1992.
- [3] J. Dull, K. Gllivan, J. M. Song and W. C. Chew, "Parallel fast multipole capacitance solver", *IEEE Trans. on Antennas and propagation society international symposium 1998*, *IEEE*, vol. 3, pp. 1766-1769, Feb. 1998.
- [4] K. Nabors and J. White, "Multipole-accelerated capacitance extraction algorithms for 3-D structures with multiple dielectrics", *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 39, pp. 946-954, Nov. 1992.
- [5] Y. C. Pan and W. C. Chew, "A fast multipole method based calculation of the capacitance matrix for multiple conductors above stratified dielectric media", *IEEE Trans. on MTT*, vol. 49, pp.480-490, March 2001.
- [6] R. Kress, *Linear Integral Equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [7] H. Kim and C. H. Ahn, "MLFMA for capacitance extraction using adaptive triangular mesh", *JKEES*, vol. 1, no. 1, May 2001.

김 한



1995년 2월: 영남대학교 전기공학
과 (공학사)
1997년 2월: 영남대학교 전기공학
과 (공학석사)
1999년 3월~현재: 영남대학교 전
자공학과 박사과정
[주 관심분야] 전자장 수치해석

안 창 희



1985년 2월: 서울대학교 전기공학
과 (공학사)
1992년 2월: 한국과학기술원 (공학
박사)
1992년 8월~1993년 2월: KAIST
정보전자 연구소
1997년 2월~1998년 2월: 미국
Illinois university 방문교수
1993년 3월~현재: 영남대학교 전자정보공학부 부교수
[주 관심분야] 전자장론 및 수치해석, 마이크로파 수동소
자