

마이크로스트립 구조의 해석을 위한 MoM 대각 및 비대각 행렬요소들의 수치계산

Numerical Evaluation of MoM Diagonal and Off-diagonal Elements for the Analysis of a General Microstrip Structures

김의중* · 오병희* · 이영순* · 조영기**

E. J. Kim* · B. H. Oh* · Y. S. Lee* · Y. K. Cho**

요 약

일반적인 마이크로스트립 구조의 해석을 위해 closed-form 그린함수를 이용한 공간영역 모멘트법을 사용하는 경우, 모멘트 행렬의 대각 및 비대각 요소들을 계산하기에 보다 효율적인 기법을 제안하고자 한다. 본 논문에서 제안된 기법의 타당성 확인을 위해 동축선 급전된 마이크로스트립 안테나를 해석한 결과를 기존 논문들의 결과와 비교 제시하였다.

Abstract

When a spatial method of moments(MoM) is used in conjunction with closed-form Greens' functions for the analysis of a general microstrip structures of thin or thick substrate, an efficient technique for the evaluation of MoM off-diagonal matrix elements as well as diagonal elements is proposed. In order to check the validity of the present method, performance is demonstrated for the example of a coaxially-fed microstrip antenna and the present results are compared with the previous results.

Key words : general microstrip structures, closed-form Green's functions, MoM matrix elements.

I. 서 론

최근 마이크로스트립 구조체에 관한 공간영역 그린함수의 효율적인 계산을 위해 다양한 closed-form 그린함수법^{[1]-[3]}이 제안되었다. 접지된 유전체 기판(dielectric substrate)의 두께에 관계없이 사용할 수 있는 closed-form 그린함수의 표현식은 일반적으로 3개의 항들로 구성되어진다. 즉, 3개의 항은 각각 e^{-jkr}/r 의 형태로 표현되어지는 전원 자신에 의한 항과, Hankel 함수로 표현되어지는 표면파 극점에

의한 기여항 및 몇 개의 복소지수함수의 합으로 표현되어지는 복소 영상에 의한 항이다. 모멘트법(MoM)에 이와 같은 그린함수가 사용되어지는 경우, 대각행렬요소 계산시 $1/r$ 형태 및 Hankel 함수에 의한 logarithmic 특이적분(singular integral)이 존재함을 알 수 있다. 또한 이와 같은 그린함수를 마이크로스트립 안테나와 같은 구조체의 산란문제 해석을 위해 MoM에 사용해본 결과, 위에서 언급한 특이적분들을 참고문헌^[4]에서와 같이 신중하게 처리하였음에도 불구하고 대각행렬요소를 구하는 과

*금오공과대학교 전자공학부(School of Electronic Eng., Kum-oh National University of Technology)

**경북대학교 전자전기공학부(School of Electrical & Electronic Eng., Kyungbook National University)

· 논문 번호 : 20011103-05S

· 수정완료일자 : 2001년 11월 30일

정에서 적분결과와 수렴속도가 매우 느린 문제점이 발견되었다. 이와 같은 특이적분 처리 문제와 적분 결과의 느린 수렴도 문제를 해결하기 위해 참고문헌^[5]에서는 극좌표계(polar coordinate) 변환법을 사용한 수치적분기법을 제시하였다.

그러나, 참고문헌^[5]에서는 유전체 기판이 얇은 (thin substrate) 경우만을 취급하여 표면과 극점에 의한 기여항을 무시하였으므로 Hankel 함수의 logarithmic 특이적분처리방법을 제시할 필요성이 없었고, 또한 비대각(off-diagonal) 행렬요소계산을 위한 방법은 제시하지 않았다. 따라서, 본 논문에서는 유전체 기판의 두께에 관계없는 마이크로스트립 구조체 산란문제의 효율적인 수치해석을 위해, 참고문헌^[5]의 방법에 근거하여 대각행렬요소계산 과정에서 발생하는 logarithmic 특이적분처리 및 비대각 행렬요소를 포함한 전 행렬요소를 효율적으로 계산할 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

II. Closed-form 그린함수

그림 1과 같은 마이크로스트립 구조체의 경우에 대한 기존의 closed-form 그린함수법들을 유전체 기판이 두꺼운 경우^{[1],[3]}와 얇은 경우^{[1],[5]}로 구분할 수 있다.

두 경우에 있어 큰 차이점은 유전체 기판이 얇은 경우에는 표면과 극점에 의한 기여항을 두꺼운 경우와 달리 무시할 수 있다는 점이다. 그러나 참고문헌^[3]에서 언급된 바와 같이 기판이 얇은 경우라

하더라도 사용 주파수가 증가함에 따라 표면파에 의한 기여를 무시할 수 없으므로, 일반적인 마이크로스트립 구조체(유전체기판이 두꺼운 경우를 포함) 해석을 위해서는 표면파 기여항을 고려한 closed-form 그린함수법이 타당하다고 사료되어진다. 따라서, closed-form 그린함수법^{[1],[3]}에 의한 그린함수는 식 (1)과 같은 형태로 표현되어질 수 있다.

$$G = G_0 + G_{sw} + \sum_{k=1}^N G_{ck} \quad (1)$$

$$G_0 = e^{-jk_0 r_0} / r_0, \quad r_0 = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2},$$

$$G_{sw} = C_{Res} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho} \rho), \quad \rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

$$G_{ck} = a_k e^{-jk_k r_k} / r_k, \quad r_k = \sqrt{\rho^2 + (z - z' - j b_k)^2}.$$

$k_{\rho\rho}$ 는 표면파의 실극점이며, C_{Res} 는 $k_{\rho\rho}$ 에 대해 유수정리를 사용하여 구해지는 계수^{[1],[3]}이고, a_k 와 b_k 는 기존의 closed-form 그린함수법에서와 같이 근사화 적분경로를 따라 파수영역의 그린함수를 근사화하는 과정에서 구해지는 복소 계수들이다. 식 (1)에서 G_0 는 전원 자선에 의한 항이고, G_{sw} 는 표면파 기여에 의한 항이며 G_{ck} 는 복소 영상에 의한 항들이다.

III. 적분기법

본 논문에서는 혼합 포텐셜 적분방정식(MPIE)기법을 선택하여 분할된 전류셀(전하셀)에 대해 rooftop (pulse) subsectional 기저함수들을 사용하는 MoM의 경우에 대해 고려하고자 한다. $a \times b$ 의 직사각형 형태로 분할(segment)된 전하셀에 대해 (1)식의 그린함수가 사용될 경우, 대각행렬 요소계산 ($x = y = 0, z = z' = 0$)시 다음 식들과 같은 적분식들이 나타나게 된다.

$$I_{a,ck} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (jb_k)^2}} dx' dy' \quad (2)$$

$$I_{a,sw} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho} \rho) dx' dy' \quad (3)$$

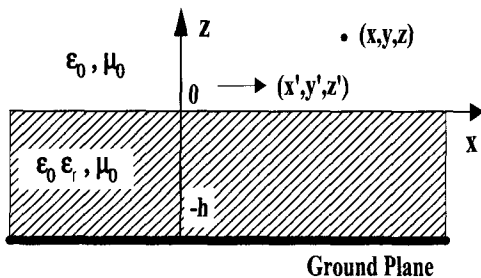


그림 1. 마이크로스트립 구조 위에 위치한 수평 전 기쌍극자.

Fig. 1. Horizontal electric dipole over a microstrip structure.

$$I_{A,ck} = \quad (4)$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a \left(1 - \frac{x'}{a}\right) \frac{e^{jk\sqrt{x'^2+y'^2+(jb_k)^2}}}{\sqrt{x'^2+y'^2+(jb_k)^2}} dx' dy'$$

$$I_{A,sw} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a \left(1 - \frac{x'}{a}\right) H_0^{(2)}(k_{\rho\rho}\rho) dx' dy' \quad (5)$$

여기에서 식 (2)와 식 (3)은 pulse 기저함수(즉, 분할된 전하셀)에 의한 스칼라 포텐셜을 구하는 과정에서 나타나는 식들이고, 식 (4)와 식 (5)는 rooftop 기저함수(즉, 분할된 전류셀)에 의한 벡터 포텐셜을 구하는 과정에서 나타나는 식들이다. 또한 rising half rooftop function에 의한 결과는 본 논문에서 유도된 식으로부터 바로 얻을 수 있기 때문에, 식 (4)와 식 (5)에서는 falling rooftop function에 의한 결과 식만을 제시하였다. 식 (2)와 식 (4)는 $b_k = 0$ 인 경우, 식 (1)에서 G_0 에 의한 $e^{jk_0 r}/r$ 형태의 특이적 분식으로 환원됨을 알 수 있다. 또한 서론에서 언급한 바와 같이 식 (3)과 식 (5)에서 Hankel 함수에 의한 logarithmic 특이적분이 있음을 알 수 있다.

3-1 복소지수함수의 적분법

먼저 $e^{jk_0 r}/r$ 형태 특이적분처리와 복소 영상항들에 의한 적분결과의 느린 수렴도 문제를 해소하기 위해 참고문헌^[5]에서와 같이 식 (2)를 극좌표계로 변환한 후, $u = \sqrt{\rho^2 + (jb_k)^2}$ 으로 변수 치환을 하면 식 (2)는 다음과 같은 적분식으로 되어진다.

$$I_{q,ck} = \frac{j}{k} \int_0^{2\pi} [e^{jk_0\sqrt{\rho_c(\theta)^2+(jb_k)^2}} - e^{jk_0\sqrt{(jb_k)^2}}] d\theta \quad (6)$$

여기에서 $\rho_c(\theta)$ 는 참고문헌^[5]에서와 같이 좌표계의 원점에서 적분구간 외곽까지의 거리이다. 식 (3)은 식 (7)과 같이 두 개의 적분식으로 표현되며,

$$I_{A,ck} = \text{Form of } I_{q,ck} - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a \left(\frac{x'}{a}\right) \frac{e^{jk_0\sqrt{x'^2+y'^2+(jb_k)^2}}}{\sqrt{x'^2+y'^2+(jb_k)^2}} dx' dy' \quad (7)$$

식 (7)의 두 번째 항을 적분변수 x' 에 대해 먼저 적분을 하면 다음과 같은 적분식으로 되어진다.

$$I_{A,ck} = \text{Form of } I_{q,ck} +$$

$$-\frac{1}{jk_0 a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [e^{jk_0\sqrt{a'^2+y'^2+(jb_k)^2}} - e^{jk_0\sqrt{y'^2+(jb_k)^2}}] dy' \quad (8)$$

참고문헌^[5]에서 제시된 바와 같이 $b_k \neq 0$ 인 경우 식 (2)와 식 (4)의 직각좌표계에서 적분 결과에 비해 식 (6)과 식 (8)의 극좌표계에서 적분 결과들이 매우 빠르게 수렴하며, 식 (6)과 식 (8)에서 볼 수 있는 바와 같이 $b_k = 0$ 이더라도 특이적분이 존재하지 않음을 알 수 있다.

3-2 Hankel 함수의 적분법

식 (3)과 식 (5)는 극좌표계에서 다음 식들과 같이 표현되며,

$$I_{q,sw} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_c(\theta)} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho}\rho) \rho d\rho d\theta \quad (9)$$

$$I_{A,sw} = \text{Form of } I_{q,sw} -$$

$$\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_c(\theta)} H_0^{(2)}(k_{\rho\rho}\rho) \rho^2 \cos\theta d\rho d\theta \quad (10)$$

식 (9)와 식 (10)의 첫항을 식 (11)의 적분공식을 사용하여 변수 ρ 에 대해 해석적 적분을 하고, 식 (10)의 둘째항을 변수 ρ 에 대해 부분적분을 행하면,

$$\int_0^z H_0^{(2)}(t) t dt = zH_1^{(2)}(z) - j\frac{2}{\pi} \quad (11)$$

식 (9)와 식 (10)은 다음과 같은 적분식으로 표현되어진다.

$$I_{q,sw} = \frac{1}{k_{\rho\rho}} \int_0^{2\pi} H_1^{(2)}[k_{\rho\rho}\rho_c(\theta)] \rho_c(\theta) d\theta - j\frac{4}{k_{\rho\rho}^2} \quad (12)$$

$$I_{A,sw} = \text{Form of } I_{q,sw} \quad (13)$$

식 (12)에서 볼 수 있는 바와 같이 Hankel 함수 argument인 $k_{\rho\rho}\rho_c(\theta)$ 가 항상 영이 아닌 양의 값을 지니므로, 식 (9)와는 달리 특이적분이 존재하지 않음을 알 수 있다. 그림 2에서는 식 (3)의 직각좌표계에서 적분결과와 식 (12)의 극좌표계의 적분결과를 비교하여 제시하였다. 결과에서 볼 수 있는 바와 같이 직각좌표계에서 Gauss 구적법을 사용할 경우 inner and outer point 개수를 (60,60) 정도로 선택해야 2중 적

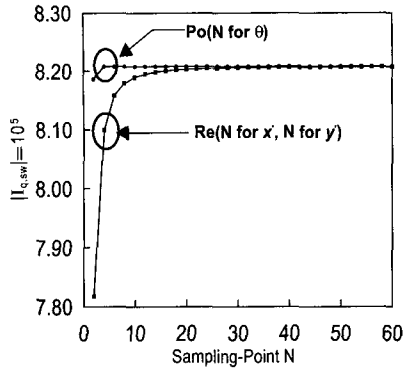


그림 2. Gauss 구적법에 의해 계산되어진 $|I_{q,sw}|$ 의 수렴도.
 Fig. 2. Convergence of $|I_{q,sw}|$ calculated by Gaussian integration.

분결과가 수렴할 수 있음을 알 수 있으나, 그에 반해 극좌표계에서는 단일 변수 θ 에 대해 3개 정도의 Gauss point로도 충분히 수렴함을 알 수 있다.

3-3 비대각 행렬요소 계산에의 응용

전술된 대각행렬 요소 계산을 위해 사용되어진 모든 적분 기법들이 스칼라 포텐셜을 구하는 과정에서 나타나는 식 (2)를 토대로 유도되어짐을 알 수 있다. 따라서, 비대각 행렬요소 계산시 이와 같은 적분기법들을 응용하기 위해 식 (14)와 같은 적분식을 극 좌표계로 변환하는 방법을 살펴보기로 한다.

$$I_{a,ck} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{e^{-jk_0 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (jb_k)^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (jb_k)^2}} dx' dy' \quad (14)$$

식 (14)는 pulse 기저함수(분할된 전하셀)에 의한 임의의 관찰점 $(x, y, 0)$ 에서의 스칼라 포텐셜을 구하는 과정에서 나타나는 식이다. 식 (14)에서 $x-x' = x_0$, $y-y' = y_0$ 로 치환하면 다음 식과 같이 된다.

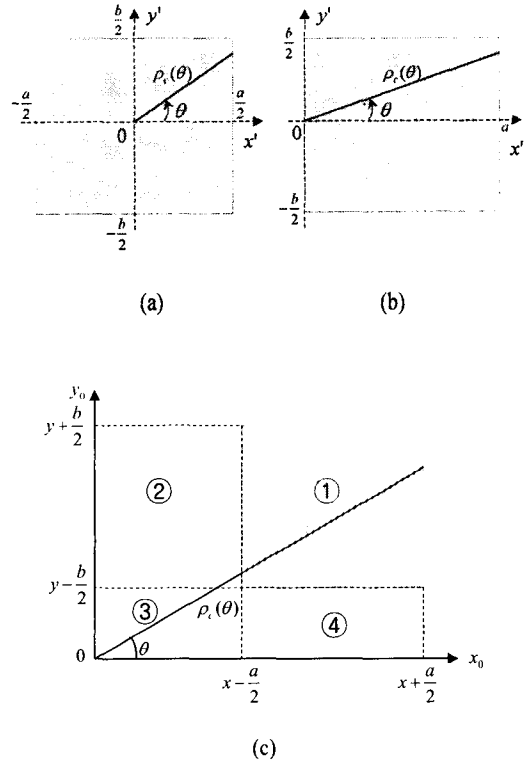


그림 3. (a) 대각행렬 요소 계산시 스칼라 포텐셜을 구하기 위한 적분영역 (적분구간의 수직 외각에 대하여 $\rho_c(\theta) = (a/2) / \cos \theta$).
 (b) 대각행렬 요소 계산시 벡터 포텐셜을 구하기 위한 적분영역 ($\rho_c(\theta) = a / \cos \theta$).
 (c) 비대각 행렬요소 계산시 스칼라 포텐셜을 구하기 위한 적분영역 ($\rho_c(\theta) = (x + a/2) / \cos \theta$).

Fig. 3. (a) Integration region for the evaluation of the scalar potential in case of calculating diagonal elements ($\rho_c(\theta) = (a/2) / \cos \theta$ for vertical line of the contour).
 (b) Integration region for the evaluation of the vector potential in case of calculating diagonal elements ($\rho_c(\theta) = a / \cos \theta$).
 (c) Integration region for the evaluation of the scalar potential in case of calculating off-diagonal elements ($\rho_c(\theta) = (x + a/2) / \cos \theta$).

$$I_{a,ck} = \int_{y-\frac{b}{2}}^{y+\frac{b}{2}} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} \frac{e^{-jk_0\sqrt{x_0^2+y_0^2+(jb_k)^2}}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+(jb_k)^2}} dx_0 dy_0 \quad (15)$$

그림 3에서 보는 바와 같이 대각행렬요소 계산시 변환된 좌표계의 원점이 적분영역 내 혹은 외곽에 있는 경우와 달리, 원점이 적분영역 밖에 있음을 알 수 있다. 그러므로, 비대각행렬 요소계산을 위한 극좌표계에서의 적분은 $\rho_c(\theta)$ 가 단가 함수가 아닌 2가 함수임을 알 수 있다. 이와 같은 $\rho_c(\theta)$ 의 다가 함수인 문제점은 식 (16)과 같이 적분영역의 분할을 통해 해소되어질 수 있다.

$$I_{a,ck} = \int_0^{y+\frac{b}{2}} \int_0^{x+\frac{a}{2}} D dx_0 dy_0 - \int_0^{y-\frac{b}{2}} \int_0^{x+\frac{a}{2}} D dx_0 dy_0 - \int_0^{y+\frac{b}{2}} \int_0^{x-\frac{a}{2}} D dx_0 dy_0 + \int_0^{y-\frac{b}{2}} \int_0^{x-\frac{a}{2}} D dx_0 dy_0 \quad (16)$$

여기에서, $D = \frac{e^{-jk_0\sqrt{x_0^2+y_0^2+(jb_k)^2}}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+(jb_k)^2}}$.

그림 3(c)를 통해 식 (16)을 설명하면, 원래 $I_{a,ck}$ 는 적분영역이 ①에 해당되는데 식 (16)의 첫항(①+②+③+④)의 적분영역에 대한 적분식)에서 둘째항(②+③)의 적분영역에 대한 적분식) 및 셋째항(③+④)의 적분영역에 대한 적분식)을 빼고 넷째항(③)의 적분영역에 대한 적분식)을 합한 것을 의미한다.

결론적으로 식 (16)의 모든 항의 적분식들이 각각의 적분영역에서 단가값을 가지는 $\rho_c(\theta)$ 가 정의될 수 있으므로 모든 항의 적분식들이 극좌표계로 변환되어질 수 있어 비대각 행렬요소들의 계산시 전술된 모든 적분 기법들이 동일하게 적용됨을 알 수 있다.

3.4 적분기법들에 관한 논의

전술한 바와 같이 본 논문의 적분기법이 MoM 행렬의 대각요소를 구하는데 사용되어질 경우, $1/r$ 형태 및 logarithmic 특이적분 처리가 용이함을 알 수 있다. 그리고, 대각 및 비대각 행렬요소의 포텐셜 계산과정에서 나타나는 2중 적분을 θ 혹은 y' 에 대한 단일적분 형태로 변환할 수 있게 된다. 또한, 유전체

기판의 두께나 사용주파수에 따라 결정되는 복소지수계수 b_k 의 크기에 관계없이(기존 방법에 비해) 빠르게 수렴하는 적분 결과를 얻을 수 있다.

따라서, 본 논문의 적분기법이 MoM 행렬의 전요소를 매우 효율적으로 구할 수 있는 방법이라 사료되어진다.

IV. 수치해석결과

본 논문이 제안한 기법의 타당성을 확인하기 위해, 본 논문의 방법을 참고문헌^[4]에서 제시된 해석구조($\epsilon_r = 4.34$, $h = 0.8mm$, 패치의 크기 = $60 \times 40mm$ 인 동축선으로 급전되는 마이크로스트립 패치 안테나)문제를 선택하여 패치면에 유기되는 미지의 표면 전류밀도를 구해 보았다. 해석 결과로써 사용 주파수를 800 MHz ~ 2.8 GHz까지 변화시키면서 패치면에 유기되는 미지의 표면 전류밀도를 구하여, 해당 주파수에서 유기된 최대 전류밀도의 실수부 크기와 허수부 크기를 그림 4에 제시하였다.

그림 4에서 보는 바와 같이 허수부의 최대 침투치와 실수부의 최소 침투치가 존재하는 주파수 위치가 각각의 mode의 공진 주파수에 해당되는데, 그 공진 현상이 뚜렷함을 알 수 있다. 본 논문의 해석

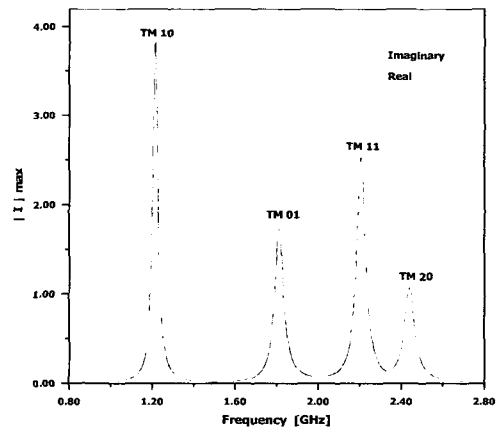


그림 4. 주파수 변화에 따라 패치면 상에 유기되는 표면전류밀도의 크기.

Fig. 4. Magnitude of the surface current density induced on the patch conductor according to the variation of a frequency.

표 1. 공진 주파수.

Table 1. Resonant frequencies.

구분 Mode	기존 논문 ^[4]	공동 모델 ^[6]	본 논문
TM ₁₀	1.206 GHz	1.2092 GHz	1.2095 GHz
TM ₀₁	1.783 GHz	1.7919 GHz	1.7921 GHz
TM ₁₁	2.177 GHz	2.2011 GHz	2.2016 GHz
TM ₂₀	2.405 GHz	2.4185 GHz	2.4189 GHz

방법을 통해 얻어진 공진 주파수의 구체적인 값은 기존의 해석 결과^[4] 및 공동 모델^[6]로 얻어진 공진 주파수와 비교하여 표 1에 제시하였다. 참고문헌 [4]의 결과와는 다소 차이가 있지만 참고문헌^[6]에 의한 결과와는 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

결론적으로 본 논문에서 보여진 수치해석 기법의 타당성 입증을 통해, 최근 널리 사용되고 있는 다양한 다층평판 구조체들에 대한 효율적인 수치해석 기법으로 이용될 수 있을 것으로 기대되므로 관련 EM 소프트웨어 개발에 많은 도움을 줄 수 있을 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

[1] Y. L. Chow, J. J. Yang, D. G. Fang, and G. E.

Howard, "A closed-form spatial Green's function for the thick microstrip substrate", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 39, no. 3, pp. 588-592, 1991.
 [2] M. I. Aksun , "A robust approach for the derivation of closed-form Green's functions", *IEEE Trans. MTT.*, vol. 44, no. 5, pp. 651-658, 1996.
 [3] B. H. Oh, E. J. Kim, Y. S. Lee, and Y. K. Cho, "Efficient derivation of closed-form Green's function for a microstrip structure", *Journal of the Korea Electromagnetic Eng. Society*, vol. 1, no. 1, pp. 63-66, 2001.
 [4] J. R. Mosig and F. E. Gardiol, "General integral equation formulation for microstrip antennas and scatterers", *IEE Proc.* vol. 132, no. 7, pp.424-432, Dec., 1985.
 [5] 이영순, 김병철, 조영기, "다층 평판구조체 해석시 closed-form 그린함수와 함께한 모멘트 행렬의 효율적인 수치계산," 한국전자과학회 논문지, 제 12권, 제 1호, pp. 92-97, 2001.
 [6] Russell W. Dearnley and Alain R. F. Barel, "A Comparison of models to determine the resonant frequency of a rectangular microstrip antenna", *IEEE Trans. AP.*, vol. 37, no. 1, pp. 114-118, 1989.

김 의 중



1996년 2월: 금오공과대학교 전자통신공학과 (공학사)
 1998년 2월: 금오공과대학교 전자공학과 (공학석사)
 2001년~현재: 금오공과대학교 전자통신공학 박사과정
 [주 관심분야] Closed-form Green's function method, scattering problems in anetnnas, wave-guide filter

오 병 희



1984년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)
 1989년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학석사)
 2000년~현재: 금오공과대학 전자공학부 박사과정
 1983년~현재: 삼성전자 근무
 [주 관심분야] Closed-form Green's function method, low profile antenna, RF circuit design

이 영 순



1979년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학사)
1981년 2월: 한국과학기술원 전자공학과 (공학석사)
1996년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학박사)
1981년~현재: 금오공과대학교 전자공학부 교수

[주 관심분야] electromagnetic theory, scattering problems in antennas, waveguide discontinuities, aperture coupling, microwave circuit.

조 영 기



1978년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학사)
1981년 2월: 경북대학교 전자공학과 (공학석사)
1997년 2월: 한국과학기술원 전자공학과 (공학박사)
1981년~현재: 경북대학교 전기전자공학부 교수

[주 관심분야] electromagnetic scattering problem, radiation problem, general periodic structure, antenna array theory