

유연 구조물에서 반력 평가를 위해 요구되는 모드의 수

김주형*, 김상섭*

On the Number of Modes Required to Observe Forces in Flexible Structures

Joo Hyung Kim*, Sang Sup Kim*

ABSTRACT

The number of required modes to provide accurate force information in a truncated model of a flexible structure is investigated. In the case of modal truncation of a distributed parameter system, the difference in convergence rates between displacements and forces is discussed. The residual flexibility, a term from past literature, is used to recapture some of the lost force information in a truncated model. This paper presents numerical and experimental results of a study where the residual flexibility is used in conjunction with a Kalman filter so that accurate force information may be obtained from a small set of displacement measurements with a reduced-order model. The motivation for this paper is to be able to obtain accurate information about unmeasurable dynamic reaction forces in a rotating machine for diagnostic and control purposes

Key Words : Covergence Rates(수렴율), Kalman Filter(칼만 필터), Reaction Force(반력), State Estimator(상태변수 추정기), Observer(관측기), Residual Flexibility Matrix(잔류 유연성 행렬)

기호설명

M/K = mass and stiffness matrices
 Φ_r / Φ_t = retained / truncated orthonormal matrices
 $w(t) / q(t)$ = physical/modal coordinate vectors
 Λ = diagonal spectral matrix
 x_s = state vector of retained modal coordinates
 $y(t)$ = output(displacement or reaction force)
 x_f = state vector of disturbances
 $\hat{x} / x - \hat{x}$ = estimated state vector / error term
 G = observer gain matrix

1. 서론

실제로 구조물을 취급하는 전문가들은 무한대의 자유도를 갖는 균일 연속 분포계의 운동을 묘사하기 위하여 모드의 수가 많은 모델을 취급하기를 원하는 반면에, 제어를 담당하는 전문가들은 현실적인 고려와 제어 법칙을 적용해야 하기 때문에 모드의 수가 적은 모델을 취급해야 한다는 점에서 서로 반대되는 입장에 서 있다. 그래서, 구조 제어의 실제 응용에서 현실과의 타협은 다음과 같은 부분에서 일어난다. 제어에 사용된 실제의 모델이 제어 목적에 맞는 충분한 정보를 가지고 있을 경우, 혹은 안정을

2001년 7월 20일 접수

* 국민대학교 자동차전문 대학원

유지하고 있을 경우 예를 들면, 감지거나 가진기 스풀오버 (spillover)가 무시된 모드에서부터 일어나지 않을 경우이다.

모드 절단(modal truncation)은 유지하고자 하는 (retained) 모드와 무시하고자(truncated) 하는 모드를 구분하는 아주 적합한 방법이다. 이 방법은 기본적으로 모드를 1 차 모드부터 n 차 모드까지 유지하고, 나머지 높은 모드들을 모두 제거하는 방법이다. 여기서, n 차 모드를 선택하는 방법은 제어 시스템의 계산능력, 감지기와 가진기의 대역폭, n 차 모델의 정확도, 다른 실질적인 이유들에 기초한 것이다. 대부분의 경우에 구조 제어의 목적은 변위, 속도, 혹은 가속도를 줄이는 것이다. 이 같은 경우에는 모드 절단이 큰 효용성을 가진다. 왜냐하면, 모델이 된 변위는 적은 수의 모드만 가지고서도 빨리 실제 변위에 접근한다.

만약에 제어목적이 구조물 시스템에서 변위보다 힘에 대한 억제에 목적이려면, 그때에는 전형적인 모드 절단 방법이 만족스럽지 못하다. 변위를 위해 필요한 것보다도 더 많은 모드들이 구조물 속의 힘과 응력을 정확하게 표현하는 데 요구되어 진다. 이와 같은 적은 수의 모드를 사용한 모델을 기초로 한 제어기는 변위가 제어 목적이었을 때 진동제어를 위해 성능을 발휘하나, 힘이 제어 목적이었을 때는 좋은 결과를 기대할 수 없다.

물론, 이 같은 문제에 대한 확실한 해법은 더 많은 수의 모드를 포함하는 모델을 고려하는 것이다. 위와 같은 생각은 제어 모델을 적은 수의 모드를 갖고 표현하려는 생각과는 정면으로 배치된다. 더 많은 모드를 포함하려는 시도는 벽에 부딪혔고, 모드 절단으로 인한 잃어버린 정보를 유지된 모드를 가지고 복구하려는 시도가 행해졌다.

이 논문은 진동하는 계의 변위와 반력에 관한 모델 사이에 차이점을 살펴보고, 반력의 모델이 변위의 모델보다 같은 비교 기준에서 부정확하다는 것을 보여 줄 것이다. 이에 따르는 토의는 전체 모드를 선택하지 않고 일부 모드만을 선택하여, 잃어버린 반력에 대한 정보를 보충할 방법에 대한 것이다. 마지막으로, 진동하는 계에서 반력들과 변위들이 칼만 필터를 사용하여 추정되었을 때, 시뮬레이션과 실험을 통한 결과를 비교 검토되었다.

이 논문에 대한 동기는 진동하는 구조물에서 힘을 제어하려는 시도에서 찾을 수 있다^(1,2,3). 예를 들면, 진동고립은 진동하는 기계의 어떤 위치에서 전달하는 힘을 줄임으로서 얻어 질 수 있다⁽⁴⁾. 따라서, 회전하는 물체로부터 베어링 속에서의 과도한 동적 반력으로 기인한 파손이 지지 베어링으로부터 일어난다. 이와 같은 전형적인 예가 Figure 1 에 나타나 있다⁽⁵⁾. 이 같은 문제를 해결하기 위해 능동이나 혹은 준 능동 제어 시스템은 동적 반력들을 줄이는 데 쓰이고, 기계의 활용성을 확대하는데 이용된다.

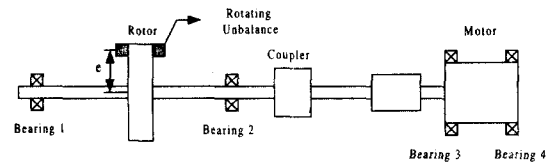


Fig. 1 Schematic of Typical Rotating Machinery System

실제로 힘에 대한 직접적인 정보를 얻는 것은 매우 어렵다. 그러나, 축약 모델을 기초로 한 추정기를 가지고 정확한 힘의 신호를 추정할 수 있는 방법에 대해 논의 되었다. 이것은 회전체 역학에서 흔히 이용되는 변위의 정보를 가지고 지지 점의 반력에 대한 제어를 가능하게 하였다.

Figure 1 에서 커플러는 횡 굽힘에 약하고, 비틀림에는 강한 성질을 갖고 있어 진동은 두개의 직각 평면으로 비연성 되어 있다고 가정할 수 있다. 이를 간단히 증명하기 위하여 실험 장치는 축 진동의 한 단면만을 고려하였다.

2. 모드가 절단된 모델에서의 변위와 힘

2.1 모드 절단

균일 분포 연속계의 일반적인 선형 무감쇠 모델에 대한 운동방정식은 다음과 같이 유한요소법을 인용하여 쓰여 질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}^{T_{cc}} \\ \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{w}} \\ \ddot{\mathbf{w}}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}^{T_{cc}} \\ \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, 변위 좌표 \mathbf{w} 는 계의 절점 변위들을

나타낸 것이고, 변위벡터 w_c 는 좌표계의 구속좌표를 나타낸 것이다. 또한, F 와 F_c 는 외력으로 가해 준 힘과 그에 따르는 반력으로 각각 정의된다. 여기서 구속된 좌표는 움직임이 없기 때문에 0 으로 간주 된다. 주어진 경계 조건에 따라서 식 (1)은 두개의 방정식으로 나누어 진다.

$$M\ddot{w} + Kw = F \quad (2)$$

과

$$M_{cc}\ddot{w} + K_{cc}w = F_c \quad (3)$$

식 (3)의 F_c 는 지점의 전단력과 모멘트로 주어지고, 식 (2)의 가속도 벡터를 식 (3)속에 치환하면, 식 (3)의 반력은 다음 형태로 나타난다.

$$F_c = M_{cc} \left(M^{-1}(F - Kw) \right) + K_{cc}w \\ = (K_{cc} - M_{cc}M^{-1}K)w + M_{cc}M^{-1}F \quad (4)$$

이 반력은 변위 벡터 w 의 정확 도에 의존한다. 모든 변위의 측정이 어렵고 모두 48 개의 상태 변수(12 개 요소의 24 개 좌표)를 추정기가 실시간으로 계산하기 어렵기 때문에, 모델은 5 개의 모드로 감소 된다.

먼저 운동 방정식을 다음과 같은 진동형 변환을 가진 형태로 전개할 수 있다. 변환식을 고려하면,

$$w(t) = \Phi q(t) \quad (5)$$

여기서 Φ 는 계의 직교정규 진동형 행렬이고 $q(t)$ 는 진동형 좌표의 벡터이다. 진동형 벡터 $q(t)$ 는 $q = \begin{bmatrix} q_r^T & q_t^T \end{bmatrix}^T$ 으로 표현 되는데 여기서 r 과 t 는 유지된 모드와 제거된 모드로 각각 정의 된다. 물리적 좌표 벡터는 유지된 모드를 사용하여 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$w(t) = \begin{bmatrix} \Phi_r & \Phi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_t \end{bmatrix} \\ = \Phi_r q_r + \Phi_t q_t \quad (6)$$

변위 $w(t)$ 의 모달 표현인 식 (6)을 식 (2)속에 치환한 다음, 모드의 직교성을 이용하면, 식 (7)과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & \Lambda_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r \\ q_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_r^T \\ \Phi_t^T \end{bmatrix} F \quad (7)$$

I_r 과 I_t 는 대각선상에 1 의 값을 갖는 단위 행렬이고, Λ_r 과 Λ_t 은 대각 행렬이다. 그러므로 방정식은 비연성 되기 때문에, 모달 가속도 벡터는 유지된 모드만 가지고 다음 식과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$\ddot{q}_r = \Phi_r^T F - \Lambda_r q_r \quad (8)$$

물리적 좌표 벡터는 유지된 모드를 사용하고 무시하는 모드를 생략하여 다음과 같이 쓰여질 수 있다.

$$w = \Phi_r q_r \quad (9)$$

이 물리적 좌표 $w(t)$ 는 진동형 표현을 사용하여 식 (4)속에 반력으로 나타내어 질 수 있다.

$$F_c = (K_{cc} - M_{cc}M^{-1}K)\Phi_r q_r + M_{cc}M^{-1}F \quad (10)$$

간단한 예제로서 어떻게 식(10)이 정확한 변위를 가지고 부정확한 힘의 정보를 제공하는지 Figure 2의 결과를 가지고 살펴보자. 여기서, 첫번째 고유진동수 ω_1 은 29.3 Hz이다.

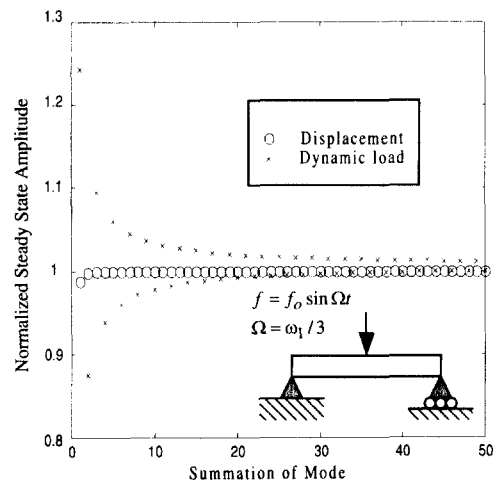


Fig. 2 Example of different rates of convergence of deflection and force for a continuous system as more modes are added

Figure 2는 정현파 입력이 중간에 작용하고 있는 단순 지지 보에서 중간 변위와 양쪽 지지

점의 반력에 대해 정상상태 진폭을 보고 있다. 변위와 반력, 모두 진동의 해석적인 해로부터 이끌어 진 것이다. Figure 2에서 선택되는 모드를 증가하면 할수록 변위와 반력은 수렴한다. 그러나 변위는 단지 몇 개의 모드만을 가지고 수렴하는 반면에, 반력은 40개의 모드를 포함하고 나서도 차이를 보인다. Figure 2에서 변위와 반력 모두를 비교하기 위해 1.0m 혹은 1.0N으로 정규화 하였다. 이것으로 유지되는 모드가 적으면 변위 모델에게는 충분하나, 정확한 반력의 표현을 위하여 얼마나 많은 모드가 필요한지는 알 수 없는 입장이다.

2.2 잔류 유연성 행렬을 가지고 절단된 모드의 잃어버린 정보를 복구하는 법

식 (7)을 모달 진폭에 대하여 풀고, 식 (6)속에 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} \Phi_r & \Phi_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_r^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_t^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_r^T \\ \Phi_t^T \end{bmatrix} \mathbf{F} - \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} \right\} \quad (11) \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_r \Lambda_r^{-1} & \Phi_t \Lambda_t^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \Phi_r^T \\ \Phi_t^T \end{bmatrix} \mathbf{F} - \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left(\Phi_r \Lambda_r^{-1} \Phi_r^T + \Phi_t \Lambda_t^{-1} \Phi_t^T \right) \mathbf{F} - \begin{bmatrix} \Phi_r \Lambda_r^{-1} & \Phi_t \Lambda_t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

여기서, $\Phi_r \Lambda_r^{-1} \Phi_r^T + \Phi_t \Lambda_t^{-1} \Phi_t^T = \mathbf{K}^{-1}$ 와 식 (8)을 고려하면, 식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} - \begin{bmatrix} \Phi_r \Lambda_r^{-1} & \Phi_t \Lambda_t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_r^T \mathbf{F} - \Lambda_r \mathbf{q}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{bmatrix} \quad (12) \\ &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} - \Phi_r \Lambda_r^{-1} \Phi_r^T \mathbf{F} + \Phi_r \mathbf{q}_r - \Phi_t \Lambda_t^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_t \end{aligned}$$

만약에 제거된 모드의 가속도를 무시한다면, 식 (9)속의 변위 벡터는 다음과 같이 쓰여 질 수 있는데

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{K}^{-1} - \Phi_r \Lambda_r^{-1} \Phi_r^T \right) \mathbf{F} + \Phi_r \mathbf{q}_r \quad (13)$$

식 (13)에서 괄호 안에 들어있는 항은 잔류 유연성 행렬이고 제거된 모드의 정적인 효과를 보충하는데 쓰여진다⁽⁶⁾. 마지막으로, 더 정확한

반력의 평가를 위해 잔류 유연성 행렬이 포함된 식 (13)을 식 (10)에 치환하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \left(\mathbf{K}_{cc} - \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \right) \left\{ \left(\mathbf{K}^{-1} - \Phi_r \Lambda_r^{-1} \Phi_r^T \right) \mathbf{F} + \Phi_r \mathbf{q}_r \right\} \quad (14) \\ &\quad + \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{aligned}$$

3. 반력에서 잔류 유연성 행렬의 사용

이전 단원에서는 모드 절단으로 인한 잃어버린 반력에 대한 정보를 보충하는 수단으로써 잔류 유연성 행렬을 이끌어 냈다. 여기서는 제어나 진단을 목적으로 유연성을 가진 구조물 속에서 정확한 반력의 정보를 얻기 위해 반력을 어떻게 추정하는지에 대해 보여줄 것이다

3.1 추정기 방정식의 유도

결과가 주어지기 전에 간단히 추정기에 대한 언급과 잔류 유연성 행렬의 사용에 대해 알아보기로 하자. 식 (8)에서 시험 모델은 유지된 모드로서 표현된다.

$$\ddot{\mathbf{q}}_r + \Lambda_r \mathbf{q}_r = \Phi_r^T (\mathbf{F}_f \mathbf{f}(t) + \mathbf{F}_u \mathbf{u}(t)) \quad (15)$$

여기서, 제어 입력 항은 외란과 제어 부분으로 나눌 수 있는데, 주어진 상태변수를 이용하여 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^T & \dot{\mathbf{q}}_r^T \end{bmatrix}^T$, 모달 방정식은 상태변수 형태로 전개된다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Lambda_r & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_r^T \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_r^T \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (16) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{L} \mathbf{f} \\ &\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

식 (16)에서 $\mathbf{u}(t)$ 는 제어 입력을 포함하고, $\mathbf{f}(t)$ 는 외란 입력, \mathbf{y} 는 출력으로서 여기서는 변위나 반력으로 정의 되고, \mathbf{C} 행렬은 모델에서 유지된 모드로 구성된 위치 측정과 관련된 출력 행렬로 정의된다. 식 (16)에 존재하는 외란은 조화 함수로 가정되고, 그 외란은 조화 형태를 지닌 필터를 통해 백색 잡음을 통과 시킴으로써 상태 방정식 형태로 얻어 질 수도 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_f &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_d^2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \eta \\ &= \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f + \mathbf{B}_f \eta \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 η 는 백색 잡음 입력, \mathbf{A}_f 와 \mathbf{B}_f 는 외란과 관계된 행렬이고, ω_d 는 외란 주파수이고, \mathbf{x}_f 는 외란 나타내는 상태 벡터이다. 반력을 추정하는 식 (16)과 식 (17)와 통해 새로운 식 (18),(19)가 얻어진다⁽⁷⁾.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{L}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} \eta \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u} + \mathbf{L}_a \eta \quad (19)$$

여기서 $\mathbf{L}_f = [\mathbf{L} \ \mathbf{0}]$. 식 (19)는 식 (18)을 축약한 형태로 나타낼 수 있다, $\mathbf{x}_a = [\mathbf{x} \ \mathbf{x}_f]^T$ 는 상태 벡터를 나타내고, \mathbf{A}_a , \mathbf{B}_a , \mathbf{L}_a 은 식 (18)의 대응되는 부분을 설명하고 있다.

3.2 모든 상태변수를 추정하는 추정기와 반력 평가

식 (14)에 주어진 형태의 반력을 얻기 위해서 모든 상태 변수 \mathbf{x}_a 가 알려져야 한다. 이들 모든 상태 변수를 추정하기 위해 추정기를 통한 필요한 상태 변수를 얻을 수 있는 방법은 다음 식과 같다.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_a = \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_a) \quad (20)$$

여기서, $\hat{\mathbf{x}}_a$ 는 상태 변수의 추정 치로 표현되고, \mathbf{y} 는 계의 출력, \mathbf{G} 는 추정기 게인 상수이다⁽⁶⁾. 추정기 게인 행렬은 식 (20)에서 백색 잡음 입력을 사용하여, LQG (linear quadratic gaussian) 방법을 사용하여 얻을 수 있다^(7,8). 식 (20)을 칼만 필터 추정기라고 하고, 추정기 게인 행렬은 추정 오차 항 $\mathbf{x}_a - \hat{\mathbf{x}}_a$ 을 잡음에 관하여 최소화함으로서 얻을 수 있다. 이에 대하여, 감지기의 충분한 숫자와 위치가 계의 가관측성을 확신하기 위하여 요구된다.

반력은 제거된 모드로부터 잔류 유연성 행렬을 소개 함으로서 아래와 같이 쓰여 질 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c &= \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{cc} - \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \Phi \\ 0 \\ ((\mathbf{K}_{cc} - \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})(\mathbf{K}^{-1} - \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T) + \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{F}_f \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}^T \\ \hat{\dot{\mathbf{q}}}^T \\ \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{\dot{\mathbf{f}}} \end{bmatrix} \\ &+ \{(\mathbf{K}_{cc} - \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})(\mathbf{K}^{-1} - \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T) + \mathbf{M}_{cc} \mathbf{M}^{-1}\} \mathbf{F}_c \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2)$$

4. 수치해석 과 실험결과

Figure 3 에서 적용된 외란으로 지점의 반력을 추정할 수 있다면, 두개의 우선적인 의문이 생길 것이다. 그것은 반력의 크기와 가진 주파수 변화에 대한 질문이다. 지점의 반력을 나타내는 한정된 모드를 가진 모델과 잔류 유연성 행렬을 포함한 한정된 모드를 가진 모델을 시뮬레이션을 통해 비교 검토하였다.

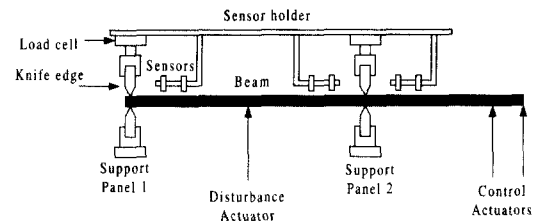
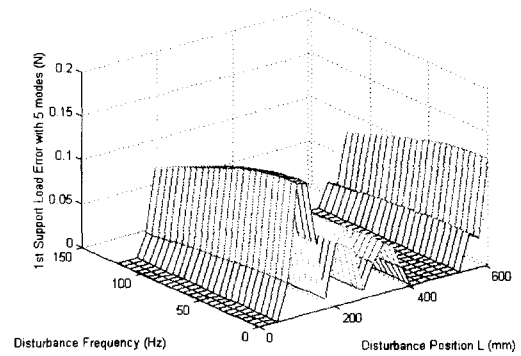
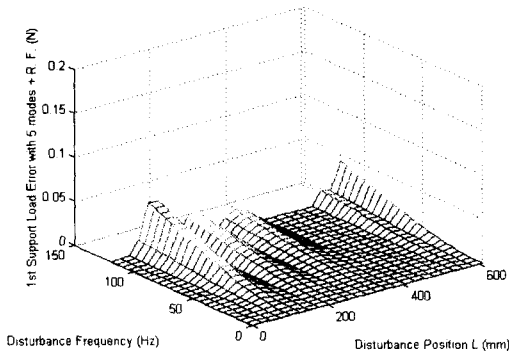


Fig. 3 Schematic of experimental test rig



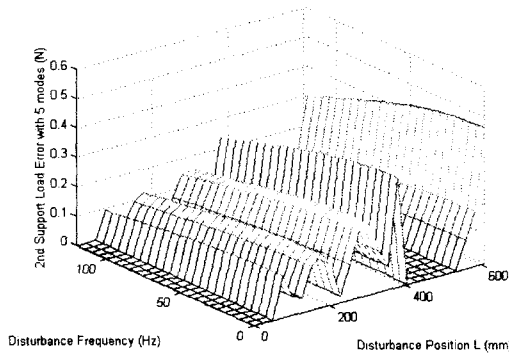
(a) Error in 1st support force when truncated model is used



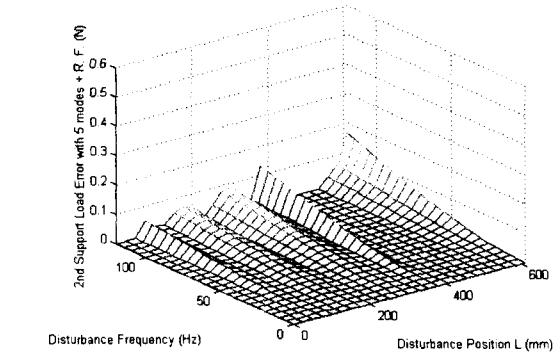
(b) Error in 1st support force when truncated model plus residual flexibility is used

Fig. 4 Numerical results showing error in 1st support using truncated model, with and without residual flexibility.

Figures 4~5 는 이것들의 시뮬레이션 결과를 보여준다. Figure 4 는 첫번째 지점의 반력을 나타낸 것이다. 반면에 Figure 5 는 보의 커플러 지역 근처의 두 번째 지점의 반력을 표현한 것이다. Figures 4~5 에서 있어서 수직 축은 반력 모델에 있어서 절대값을 가진 오차를 나타낸 것이다. 전체의 22 개 모드들을 고려한 반력과 한정된 모드를 사용하여 계산된 반력과의 차이를 표현한 것이다. Figures 4~5 (a)는 5 개의 모드만 가지고 계산된 결과이고, Figures 4~5 (b)는 5 개의 모드와 잔류 유연성 행렬을 포함한 결과이다.



(a) Error in 2nd support force when truncated model is used



(b) Error in 2nd support force when truncated model plus residual flexibility is used

Fig. 5 Numerical results showing error in 2nd support using truncated model, with and without residual flexibility.

각각의 그림에서 외란의 주파수는 0 Hz 부터 120 Hz 까지 5 Hz 단위로 변하고 있으며, 외란에 대한 위치는 0 mm 부터 600 mm 까지 25 mm 단위로 증가하면서 변하고 있다.

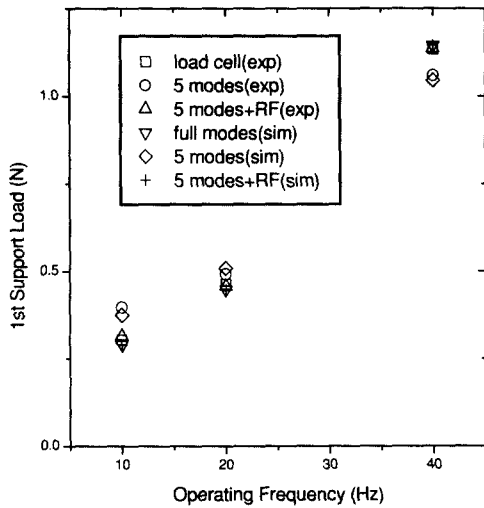
여기서 지점과 지점 근처에는 현실적으로 외란을 적용할 수가 없다. 그것은 물리적으로 의미 없는 일이고, 지점의 위치는 0 과 452 mm 에서만 존재한다.

Figures 4~5 에서 가장 놀라운 특징은 잔류 유연성 행렬이 제한된 모드와 함께 사용 했을 때 오차가 크게 감소하는 것을 볼 수가 있다. 3 차원에서 우둘투둘하던 평면이 잔류 유연성 행렬의 효과에 의해 넓게 펼쳐진 것을 알 수 있다.

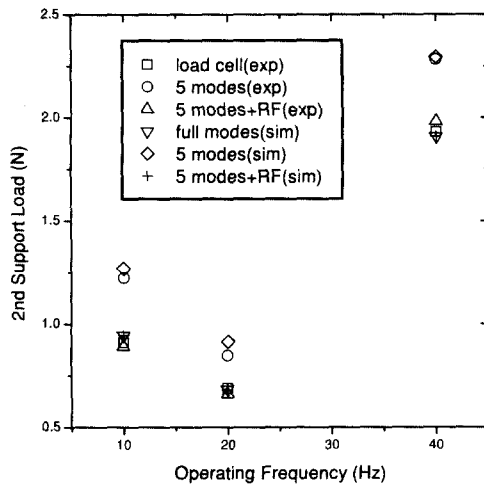
Figures 4~5 에서 제한된 모드를 갖는 모델의 오차는 보의 중간 부분과 오버행된 부분에서 가장 높게 나타난다. 이 지역은 로터와 커플러가 회전하는 곳과 대응되는 영역이다. 또한 이 지역에서는 언밸런스 매스와 제어 입력으로 인한 중요한 외란의 효과를 볼 수 있는 영역이다. 잔류 유연성 행렬은 이들 영역에서 크게 오차를 줄여 주는 것이 이 결과를 통해 알 수 있었다.

이 같은 결과를 증명하기 위하여 실험은 Figure 3 에서 보여진 모델을 가지고 행하여 졌다. 실험 결과는 외란이 지지 점의 중앙에 존재할

때와 보의 오버행 부분에 적용되었을 때의 결과를 나타낸 것이다. 각각의 경우는 5 번의 시도를 통해 그것의 평균값으로 다른 외란 주파수 10, 20, 40 Hz 의 결과를 표현한 것이다.



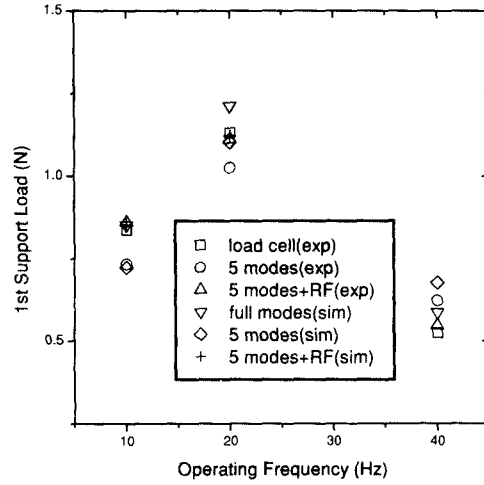
(a) Amplitude of load in support 1



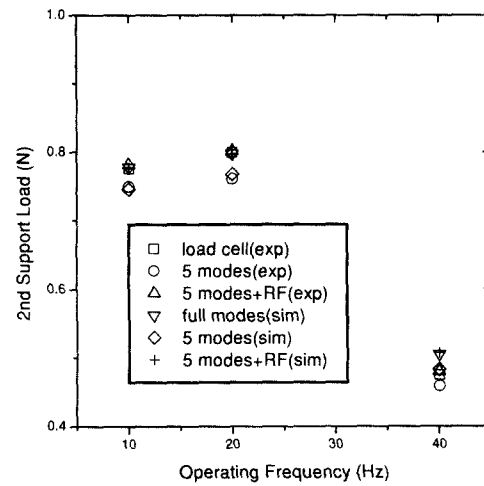
(b) Amplitude of load in support 2

Fig. 6 Experimental and numerical data for reaction forces comparing observed load with and without residual flexibility to actual loads. Disturbance is applied at free end of the beam

Figures 6~7 은 오버 행 부분의 지지 점의 반력과 단순 지지 점의 반력을 표시하였다. 여러 가지 형태의 모델들이 서로 다른 유지된 수의 모드를 가지고 사용 되었다.



a) Amplitude of load in support 1



(b) Amplitude of load in support 2

Fig. 7 Experimental and numerical data for reaction forces comparing observed load with and without residual flexibility to actual loads. Disturbance is applied at midway between the supports.

각각의 그림은 6 개의 방법에 의해 결정된 지점의 정상상태 반력 진폭을 표시한다. 처음 3 개의 방법은 실험에 의한 데이터 이고, 나머지 3 개의 방법에 대한 결과는 시뮬레이션에 의한 데이터이다; (1) 로드 셀에서부터의 직접적으로 측정된 방법, (2) 5 개의 모드로서 추정된 식 (10)으로부터 계산된 방법, (3) 5 개의 모드(잔류 유연성 행렬을 포함한)로부터 추정된 식 (14)에서 계산된 방법으로 나누어 진다. 나머지는 (4) 총 22 개 모드를 사용한 모델을 채용한 방법, (5) 5 개의 모드를 사용한 모델을 채용한 방법, (6) 5 개의 모드와 잔류 유연성 행렬을 포함한 모델을 채용한 방법의 결과를 나타낸다.

결과가 여러 가지 시도에서 정확하게 같지 않더라도 전체적인 경향을 파악 할 수 있었다. 5 개의 모드를 이용한 모델을 이용한 방법은 때때로 25%보다도 더 큰 오차를 나타내고 있으나 잔류 유연성 행렬은 모드를 더 사용하지 않고서도 정확한 결과를 추정하여 볼 수는 있었다.

5. 결론

이 논문에서는 연속으로 질량이 분포되어 있는 시스템에서 진동하는 변위와 지점의 반력을 모드 숫자를 가지고 수렴하는 정도에 대해 비교 검토를 해 보았다. 변위를 정확하게 나타내기 위해 충분히 유지된 모드는 반력을 나타내는 데는 적합하지 않았다. 과거로부터 발전된 방법인 잔류 유연성 행렬은 절단된 모드의 잃어 버린 정보의 일부를 다시 얻게 하는 데 사용된다. 이 같은 기술은 한정된 모드를 갖는 모델에서 반력들의 결과가 좀더 정확성을 갖는다는 것을 알 수 있었다. 이와 같이 낮은 차수의 모델이 사용되는 구조역학에서 제어에 대한 모델을 제공한다.

결과에서 보여준 대로 실험으로부터의 결과와 수치해석으로부터의 결과는 잘 일치함을 알 수 있었다. 또한 잔류 유연성 행렬은 추정된 반력의 평가에서 오차를 크게 줄이는 데 기여하였다.

참고 문헌

1. Hanseen, O.E., and Bell, K., "On the Accuracy of Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 405-411, 1979.
2. Maddox, N.R., "On the Number of Modes Necessary for Accurate Response and Resulting Forces in Dynamic Analysis," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, pp. 516-517, 1975.
3. Lewis, D.E., and P.E. Allaire, "Rotor to Base Control of Rotation Machinery to Minimize Transmitted Force," *Structural Control*, H.H.E. Leipholz (Ed.), Matimas Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 408-425, 1987.
4. Kim, J.H., Clark, W.W., and Marangoni, R.D., "Feedback Techniques for Minimizing Bearing Loads in Rotating Machinery," *Second Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, Fuller, C.R., Silcox, R.J., and Burdisso, R.A. (Eds.), Blacksburg, VA, pp. 885-896, 1993.
5. Scribner, K.B., "Active Narrow Band Vibration Isolation of Machinery Noise from Resonant Substructures," M.S. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1990.
6. Petyt, M., *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, Boston, MA, 1990.
7. Sievers, L., and Von Flotow, A.H., "Comparison and Extensions of Control Methods for Narrowband Disturbance Rejection," *Proceedings of the ASME Winter Annual Meeting*, Dallas, TX, 1990.
8. Stengel, R.F., *Stochastic Optimal Control*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1986.
9. 김주형, 김상섭, "유연 구조물에서 반력 최소화를 위한 피이드백 기술," 한국정밀공학회지, 제 18 권 제 8 호, pp. 79-86, 2001.
10. 김주형, "유연 구조물의 능동 반력 제어기 설계," 한국소음진동학회지, 제 11 권 제 1 호, pp. 68-75, 2001.