

수직하방 분사된 액주의 비선형 거동에 관한 연구

석지권* · 정환문** · 문수연† · 이충원***
(2001년 2월 12일 접수, 2001년 10월 8일 심사완료)

A Study on the Nonlinear Motion of a Vertical Liquid Jet

Jikwun Seok, Hwanmun Chung, Suyeon Moon and Choongwon Lee

Key Words : Breakup Phenomena(분열현상), Liquid Jet(액주), Longitudinal Motion(종방향 거동), Instability Analysis(불안정성해석), Forced Vibration Analysis(강제진동해석), Frequency Analysis(주파수해석), Dimensionless Parameters(무차원 변수)

Abstract

The breakup phenomena of a vertical laminar jet issuing from capillary tubes in a quiescent ambient air are investigated using a forced vibration analysis of the surface wave. Using a linear approach to the transient jet velocity, an approximate solution for the longitudinal motion of a vertical liquid jet is theoretically derived, thus performing an instability analysis by a vibration method. The damping term of this equation is nonlinear as it depends on dimensionless parameters, a Weber number, and an Ohnesorge number. The instability condition is determined based on whether the coefficient of the damping term is less than zero or not. Uniform drop formation is dependent on the vibration frequency for the forced vibration case.

기호설명			
Bo : 본드수	$Bo = \rho g R_o^2 / \sigma$	R : 액주반경	
D : 노즐직경		Re : 레이놀즈수	$Re = \rho U_o R_o / \mu$
d : 액주직경		t : 시간	
f : 주파수		U : 액주평균유속	
k : 파수		u' : 교란속도의 진폭	
L : 액주길이		V : 액적의 체적	
Oh : 오네소계수	$Oh = \mu / \sqrt{\rho \sigma R_o}$	v' : 교란속도	
P : 압력		x : 교란의 무차원 축방향 변위	
		X : 교란의 축방향 변위	
		Z : 노즐로부터 축방향 거리	
		α : 교란파의 성장률	
		β : 교란속도의 성장률	
		δ : 교란파의 진폭	

* 안동과학대학

** 경북대학교 대학원

*** 경북대학교 기계공학과

† 책임저자, 회원, 경북대학교 기계공학과

Email : symoon@bh.knu.ac.kr

TEL : (053)950-7313 FAX : (053)956-9914

ζ	:	교란속도의 초기값
δ_0	:	표면파 교란의 초기값
	:	파장
	:	점성계수
	:	밀도
σ	:	표면장력
	:	주파수 $= 2\pi f$

상첨자

'	:	교란
*	:	무차원량

하첨자

0	:	초기값
BU	:	분열
max	:	최대값
n	:	고유 주파수
r	:	반경방향
z	:	축방향

1. 서론

원통형 액주를 대상으로 한 액체의 분열기구에 대한 연구는 액막의 유동이나 액주의 분열 등 다른 형태의 액주 분열에 대한 이론적 전개에 필요한 실질적인 기초를 제공하고 있기 때문에 많은 연구가 이루어지고 있지만, 분열과정이 매우 복잡하고 비선형적인 요소들을 많이 내포하고 있어 부분적인 조건에서의 미립화의 분열기구를 설명할 수 있는 모델링^(1,2)이 이루어지고 있다.

액체미립화 과정의 기본이 되는 원통형 액주 분열의 기본 모델은 액주 분열길이에 대한 해석이 주를 이루고 있으며 분사된 액주의 물리적 성질, 분사액체의 유속, 주위 유체와의 상호작용 등에 따라서 분열 현상이 달라지게 되는데 Haenlein, Ohnesorge, Tanasawa 그리고 Reitz⁽³⁾ 등이 액주의 분열 영역을 특징별로 구분하여 나타내었다.

본 연구에서는 낮은 레이놀즈수, Reitz가 구분한 분열 영역중 웨버수 0.4 이하의 Rayleigh 분열 영역내에서의 분열현상을 해석하였다. 이러한 낮은 레이놀즈수의 유체에 대한 분열현상 해석은

Rayleigh⁽⁴⁾에 의해서 처음 구체화되어졌으며, Weber,⁽⁵⁾ Tomotika⁽⁶⁾ 등 소수 연구자에 의해 수정 보완되어져 왔다. Rayleigh의 이론은 주위 액체의 자유표면과 상호작용을 무시하고 유동이 층류인 원형 액주 표면에 나타나는 파의 성장을 수반하는 불안정 현상을 주장하였다. 그는 주위공기의 영향이 없는 무중력장에서 직경 D인 원주상의 비점성 유체 표면에 작은 교란이 주어지, 미소 교란파가 시간과 더불어 확대되는지의 여부를 식 (1)과 같이 액주 표면파의 진폭변화를 가정하여 이론적으로 해석하였다.

$$\delta = \delta_0 \exp(at + ikz) \quad (1)$$

분열시간 (t_{BU})에서 액주반경 R과 교란파의 진폭(δ)이 같아질 때 액주의 표면파 성장률(α)이 최대 성장률 α_{max} 을 가질 때 분열이 일어나게 되며 다음과 같이 표현되어진다.

$$\delta_{max} = \delta_0 \exp(\alpha_{max} t_{BU}) \quad (2)$$

분열길이 L_{BU} 는 제트 유속과 분열시간의 곱으로 나타나며 다음과 같다.

$$L_{BU} = \frac{U}{\alpha_{max}} \ln \left[\frac{R}{\delta_0} \right] \quad (3)$$

Weber는 액체의 점성을 고려한 연구에서 액주의 분열은 액주면에 생성된 교란이 지수 합성적으로 성장하여 결국 성장된 교란의 진폭과 액주반경이 같아질 때 분열이 일어난다고 하였다. Tomotika⁽⁶⁾ 경우 분사된 점성 유체와 주위 점성유체와의 상호 마찰효과에 기인한 표면파 성장을 Rayleigh 해석과 비교하여 고찰하였다. 최근 Lee⁽⁷⁾ 등은 선형 해석을 통해 액적 분열 모델을 제시하여 액주 표면파의 최대 성장률을 구하였다. 그것을 차원 해석하여 고찰해보면 기계단순 조화진동의 공진주파수 $w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 의 차원과 같다는 것을 알 수 있다. 즉 액적의 Taylor 상사 모델과 마찬가지로 Rayleigh나 Weber의 액주 분열모델 또한, 기계진동시스템과 상사되고 있음을 알 수 있다. 그러나 이와 같은 액주 불안정성 해석은 기본적으로 중력가속도의 영향을 배제한 것

으로 수평분사나 무중력장 하의 액주에 적용할 수 있다. 현재에까지 많은 실험들이 수직 하방 분사의 경우에 전술한 이론을 적용, 고찰하고 있는 실정이며, Rayleigh나 Weber의 이론을 증명하기 위해서 특별히 고안되어진 미세 중력장 (Micro drop tower)에서의 실험⁶⁾들이 최근에 상기 이론을 증명하고 있는 실정이다.

따라서 현재까지도 기본 액주 분열 현상의 기본 이론은 Rayleigh의 이론에 의존하고 있으며, 이러한 불안정성 해석의 주요한 무차원 파라미터는 파수(Wave number), 레이놀즈수(Reynolds number), 웨버수(Weber number), 그리고 오네소게수(Ohnesorge number)등에 국한되어져 있다. 따라서 이러한 변수들이 표면과의 파장과 성장률의 변화 관계를 중심으로 해석되어지고, 여기에 실제로 나타나는 복잡한 분열 현상을 연결하여 단편적이고 부분적인 해석이 이루어져 왔기 때문에 액주의 분열현상에 대한 명확한 물리적 해석이 어려웠었다.

본 연구에서는 수직하방으로 분사된 액주가 낮은 웨버수(Weber number)의 레일리 불안정영역(Rayleigh instability regime)에서 액주 교란과의 압력변화와 축방향 액주 유속의 감소 혹은 증가에 의한 액주 댐핑(damping)효과를 고려한 액주의 시스템적 중진동 분열 모델을 제시하고, 이를 2차 비선형 상미분 방정식으로 유도하여 물리적으로 분열 현상을 설명할 수 있는 새로운 방법을 제시하고자 한다.

2. 이론해석

2.1 액주 교란유속의 근사

Fig. 1은 액주의 거동 형상을 나타내는 그림으로서 수직 하방 분사된 액주의 속도는 시간 t 와 노즐로부터 수직방향 거리 z 에 의해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_z(z, t) &= U_0 + v'(z, t) \\ &= U_0 + u'(z) \frac{dX}{dt} = U_0 + u'(z) \dot{X}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

Fig. 1(a)는 본 해석의 분열 모델을 Fig. 1(b)는 기하학적 형상을 나타낸 그림이다. (b)에서 액주의 내부 유속과 표면과 속도가 같다는 가정 하에서 파의 진행속도는 일정한 거리 z 에서 변화된

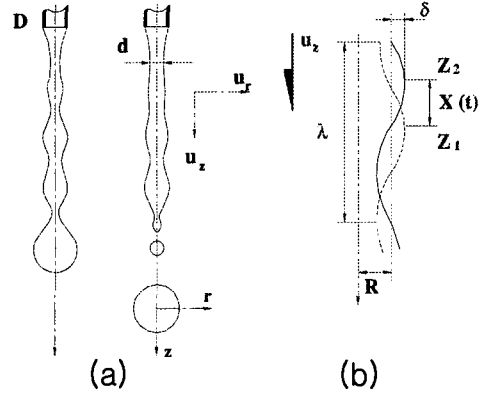


Fig. 1 Breakup model and geometric configuration of a vertical liquid jet

미소 변위 $Z_2 - Z_1 = dX$ 와 미소시간 변화량 dt 의 관계식으로 나타낼 수 있으며, 기체와 분사 액주의 교란유속 v' 는 변수분리법을 사용하여 각각 거리 z 와 시간 t 의 함수로서 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다. 액주 교란유속 v' 의 시간변화량 $\frac{dX}{dt} = \dot{X}(t)$ 는 속도차원(m/s)을 갖고, 라그랑지 방식(Lagrangian description)을 채택하였고 $u'(z)$ 는 오일러 방식(Eulerian description)을 채택하여 거리 z 의 함수이며 차원은 무차원으로 식 (1)의 교란진폭 $\delta(z, t)$ 와 상사하여 근사시켰다. 이는 연속방정식을 만족하는 영역에서 액주 반경의 변화는 액주 내부 유속의 변화를 의미하기 때문이다. 따라서 교란속도의 진폭은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u'(z) = \zeta_0 \exp(\beta z) \quad (5)$$

교란파의 성장률 α 와 마찬가지로 교란속도는 성장률 β 를 포함하고 있으며, 거리에 따라서 지수함수적으로 증가한다고 가정하였다.

본 해석에서는 낮은 액주 유속의 레일리 불안정성 영역에서 주위 가스는 정지상태로 가정하여 주위 가스의 영향을 무시하였고, 액주분열은 단지 액주자체의 불안정성에만 의존하는 것으로 가정을 하였으며 초기 교란의 발생을 식 (5)과 같이 액주종방향 교란속도에 기인한 것으로 가정을 하였다. 또한 반경방향 속도 u_r 을 무시하여 평균

축방향 속도성분 u_z 와 액주 반경 R 만이 z 와 t 에 대한 변수가 된다. 또한 액주는 축대칭이며 작동 유체는 물과 같은 낮은 점성의 유체라는 가정을 하였으며, 운동량방정식의 중력항은 수직하방 분사의 실험치와 비교 고찰을 위해 식에 포함시켰다.

2.2 운동량방정식의 유도

반경방향 r 과 액주 단면의 θ 방향 속도 변화 u_r, u_θ 를 무시한다면 액주의 z 방향 운동량 방정식과 연속 방정식은 다음과 같다.

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} + \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \rho g_z = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = 0 \quad (7)$$

또한, 거리변화에 따른 액주반경 R 은

$$R(z, t) = R_0 + \delta(z, t) \quad (8)$$

로 나타낼 수 있다.

식 (7)의 연속방정식은 이전 연구자 Lee⁷⁾등이 언급한 방식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{\partial(R^2 u_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial R}{\partial t} + u_z \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{R}{2} \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

비점성 유체일 경우 압력항 $P(z, t)$ 는 Young - Laplace equation으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$P(z, t) = \sigma \left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_T} \right) \quad (10)$$

액주 표면의 수직, 접선방향의 곡률반경은 근사적으로 $\frac{\partial \delta}{\partial z} \approx 0$ 이라면 기하학적 조건으로부터 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$R_N = (R_0 + \delta) \left[1 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \approx R \quad (11)$$

$$R_T = \frac{1}{-\partial^2 \delta / \partial z^2} \quad (12)$$

따라서 식 (10) 은

$$P = \sigma \left\{ \frac{1}{R} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2} \right\} \quad (13)$$

과 같이 나타내어진다.

식 (4)와 (8)을 식 (9)에 대입한 후 시간 t 에 대해서 적분을 취하면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial \delta}{\partial t} dt + \int U_0 \frac{\partial \delta}{\partial z} dt + \int u' \frac{dX}{dt} \frac{\partial \delta}{\partial z} dt \\ & + \int \frac{R_0}{2} \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{dX}{dt} dt \\ & + \int \frac{\delta}{2} \frac{\partial u'}{\partial z} \frac{dX}{dt} dt = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

식 (1)을 식 (14)에 대입하여 실수부와 허수부를 분리하여 δ 와 X 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\delta}{R_0} = \frac{\delta_0}{R_0} - \frac{1}{2} u' \beta \Lambda X \quad (15)$$

$$\text{여기서 } \Lambda = \frac{1}{2 \left\{ 1 + \left(\frac{U_0 k}{a} \right)^2 \right\}}$$

식 (4), (8), (13)들을 운동량식 (6)에 대입 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \dot{X} + U_0 \frac{u'}{u'} \Big|_z \dot{X} + u' \Big|_z \dot{X}^2 - \nu \frac{u'}{u'} \Big|_{zz} \dot{X} - \frac{g}{u'} \\ & + \frac{\sigma}{\rho u'} \frac{[k \delta_0 \sin(kz) + \Lambda R_0 u' \Big|_{zz} X]}{[R_0 + \delta_0 \cos(kz) - \Lambda R_0 u' \Big|_z X]^2} \\ & - \frac{\sigma}{\rho u} [k^3 \delta_0 \sin(kz) - \Lambda R_0 u' \Big|_{zzzz} X] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 z 에 대한 완전 미분은 $\Big|_z = \frac{d}{dz}$ 이며 식 $u' \Big|_z, u' \Big|_{zz}$ 및 $u' \Big|_{zzzz}$ 는 $\beta u', \beta^2 u', \beta^4 u'$ 로 나타낼 수 있다.

$\frac{\delta_0}{R_0} \ll 1$ 조건에서 식 (16)의 여섯 번째 항의 비

선형항의 분모는 $R_0 + \delta_0 \cos(kz) - \Lambda R_0 \beta u' X$
 $\approx R_0(1 - \Lambda \beta u' X)$ 의 관계를 가지며, 노즐 출구
 와 같이 교란파의 크기가 작다고 가정한다면 R_0
 $- \Lambda R_0 \beta u' X \approx R_0$ 로 근사할 수 있다. 식 (16)을
 무차원화하면 다음과 같은 2차 비선형 상미분 방
 정식 형태의 지배 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \beta R_0 \alpha \sqrt{We} - \beta R_0 Oh [1 + \frac{u'}{\sqrt{We} - \beta R_0 Oh} \dot{x}] \dot{x} \\ + \Lambda R_0^2 \beta^2 (1 + R_0^2 \beta^2) x + \frac{(1 - k^2 R_0^2)}{u'} k \delta_0 \sin(kz) \\ - \frac{B_0}{u'} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{x} + a(1 + b\dot{x})\dot{x} + w_n x + s = 0 \quad (18)$$

지배 방정식은 Van der pol, 혹은 Rayleigh
 equation 형태의 불안정성 해석방법을 적용할 수
 있다. 즉 댐핑항의 계수 $\sqrt{We} - R_0 \beta Oh > 0$ 조건
 하에서 무차원 미소교란속도 \dot{x} 의 값이
 $-\frac{\sqrt{We} - R_0 \beta Oh}{u'}$ 값보다 큰 경우 액주는 양의
 감쇠이며, 안정된 거동을 한다. 작을 경우 댐핑항
 의 계수는 음이 되어 계는 불안정한 형태의 거동
 을 하게 된다. 따라서 위의 액주 종방향 모델의
 안정성 판별의 기준은 종방향 미소 무차원 교란
 유속 \dot{x} 에 의해 결정된다. 비점성 유체의 경우
 식 (17)로부터 $R_0 \beta Oh \approx 0$ 이기 때문에 계의 안정
 성 판별값은 다음과 같다.

$$\dot{x} = -\frac{\sqrt{We}}{u'} \quad (19)$$

무차원수 $x (\equiv \frac{X}{R_0})$, $t^* (\equiv \frac{t}{\sqrt{\rho R_0^3 / \sigma}})$ 를 식
 (19)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{v'}{U_0} = -1 \quad (20)$$

이는 식 (4)로부터 액주 종방향 유속
 $u_z = U_0 + v' = U_0 - U_0 = 0$ 이 됨을 의미한다.

Table 1 Properties of working fluid

Working fluid	Water
Temperature (°C)	22
Density (kg/m ³)	997.862
Viscosity (kg/m · sec)	1.002 × 10 ⁻³
Surface tension (N/m)	73.58 × 10 ⁻³

Table 2 Parameter conditions for calculation

kR_0	β	α	U_0	ζ_0	R_0
0.69	180	75	0.28	0.1	0.00114
	1/m	1/sec	m/s	m/s	m

이는 물리적으로 액적과 액주 사이의 표면장력
 에 기인한 탄성력과 액주유속의 상대속도가 0이
 될 때 분열이 일어난다는 가정을 할 수 있다. 따
 라서 식 (19)로부터

$\dot{x}(t_{BU}) = -\frac{\sqrt{We}}{u'} = -\sqrt{\frac{\rho R_0}{\sigma}}$ 의 조건을 갖는
 다. 따라서 식 (17)의 지배 방정식의 경계조건은
 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0: t=0 \\ \dot{x}(t_{BU}) = -\sqrt{\frac{\rho R_0}{\sigma}}: t=t_{BU} \end{aligned} \quad (21)$$

각 변수와 물리적 조건은 Table 1과 2에 나타
 내었다. 식 (17)의 해는 4 차 Runge Kutta 방법으
 로 구하였다.

식 (18)을 한번 더 미분하면,

$$\begin{aligned} x + a\ddot{x} + 2ab\dot{x}\ddot{x} + \omega_n \dot{x} = 0 \\ \dot{x} = f \\ \dot{f} + a(1 + 2bf)f + \omega_n f = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

와 같은 2차 상미분 방정식의 형태로 되며 식의
 해 f 는 미소 무차원 교란 속도 \dot{x} 가 된다. 경계
 조건은 식 (21)과 같다.

3. 결과 및 토의

Fig. 2(a)는 무차원 시간 t^* 에 따른 액주의 축

방향 미소 교란속도 v' 의 시간 변화항 \dot{x} 의 거동을 식 (22)를 이용하여 해를 구한 것으로 교란속도의 크기 u' 값에 따라 나타낸 그림이다.

$u'=0.1$ 과 $u'=0.6$ 경우 시간이 증가할수록 (노즐에서 멀어질수록) 액주의 축방향 교란 속도 \dot{x} 의 시간에 따른 변화는 감소 하지만 교란속도의 크기 u' 의 값이 큰 0.6일 경우가 분열에 이르는 시점이 빠르다는 것을 알 수 있다. $u'=0.1$ 의 경우는 $t^* \approx 6$ 에서, $u'=0.6$ 의 경우는 $t^* \approx 3$ 과 $t^* \approx 4$ 사이에서 각각 경계조건 식 (21)과 일치되는 것을 알 수 있는데, t^* 의 값이 4인 경우는 실제 시간이 대략 20ms로서 실제 실험결과인 분열주파수 50과 70Hz 사이의 분열 주파수 대역과 일치하게 된다.

따라서 앞의 가정과 같은 불안정 해석이 실제 분열현상에 적용됨을 알 수 있으며, 종진동 유도 식으로부터 분열 순간의 물리적 설명을 다음과 같이 할 수 있다. 액주에서 액적으로의 분열되는 시기는 액주의 교란속도 기울기가 0이 될 때이다. 따라서 액주의 분열은 액주의 어느 한 위치에서 상대속도가 0이 될 때 일어난다. 이것은 레일리 분열 영역, 저속유동구간에서는 분열시 생성되는 액적의 직경이 액주 반경보다 훨씬 크며, 액주 분열 시점에서 반경 R이 최소가 된다. 이는 표면장력이 최대가 된다는 것을 의미하며 생성되는 액적과의 탄성력이 크게 작용하기 때문에 이 시점의 최대 탄성력이 액주 진행을 방해하기 때문이라고 생각할 수 있다.

Fig. 2(b)는 무차원 시간 t^* 의 변화에 따른 무차원 교란변위의 시간변화율 \dot{x} 의 관계를 나타낸다. u' 의 값이 클 수록 속도교란의 시간변화가 크다는 것을 알 수 있다. 이것은 식 (5)에서 노즐에서 먼 쪽일수록 속도교란의 변화가 크다는 것으로 해석할 수 있다.

Fig. 2(c)는 거리에 따른 미소교란변위 x 의 거동을 나타낸 것으로 분사된 액주가 노즐로부터 멀어질수록 미소교란변위 x 의 변화가 작지만 노즐 밑으로 내려갈수록 점차 커지는 것을 알 수 있다. 이는 앞에서 언급한 바와 같이 교란속도진폭 u' 이 식 (5)와 같이 거리에 증가에 따라서 지수적으로 증가하게 됨으로 수직하방 분사⁹⁾와 같은 조건에서는 파장이 증가하지만 그 영향은 그

림 (c)와 같이 작게 나타난다. 식 (18)로부터 비제차(Nonhomogenous)의 경우 변수 s 의 물리적인 의미는 운동학적 계의 경우와 같이 불안정성을 증대시키는 힘으로 생각할 수 있다. 표면파가 성장하는 영역인 $kR_0 \leq 1$ 로 표현되는 불안정 영역에서 표면파 교란 효과는 거리에 따라서 정현파로 변화되며, 최초 노즐로부터 생긴 표면파 교란효과, 중력효과와 표면장력 효과의 합으로 생각할 수 있다. δ_0 의 크기가 상대적으로 매우 작은 값을 가질 경우, 즉 노즐 출구 근처와 같이 표면파 영향에 의한 교란이 작을 경우, 변수 s 는 단지 본드수(Bond number)와 u' 의 비 $\frac{Bo}{u'} \approx s$ 로 나타낼 수 있기 때문에 불안정성에 대한 정량성을 유도식으로 표현하였다.

Fig. 3은 앞에서 언급한 바와 같이 무차원 변수 s 의 영향을 나타낸 그림이다. s 의 값이 큰 쪽이 노즐 쪽이며, $s=0.28$ 은 노즐로부터 거리 10mm, 교란속도의 진폭 $u'=0.6$ 일 경우를 나타낸다. Fig. 3(a)에서는 초기위치 $x(t^*=0)$ 에 대한 무차원 미소교란변위 x 를 비교하여 나타낸 그림이다. 시간변화에 대한 교란 진폭의 변화는 Fig. 2에 비해서 노즐에 가까울수록 크게 나타나며 따라서 Fig. 3 (b)에서와 같이 미소 무차원 교란 속도 \dot{x} 변화 또한 노즐로부터 가까운 쪽($s=1.7$)이 크게 나타난다.

이것은 앞에서 $\frac{Bo}{u'} \approx s$ 의 관계를 가정 할 경우로서 같은 본드수에 의해서는 노즐로부터 먼 쪽이 x 의 변화가 적은 것을 알 수 있다. 이에 반하여 미소 교란속도 진폭의 크기 u' 의 값이 일정한 조건에서는 s 값의 변화는 본드수의 변화를 의미한다. Fig. 3의 (c)는 식 (4)를 시간 적분하여 s 에 따른 액주의 거동을 나타낸 것으로 그림에서 실선은 s 의 거리에 따른 영향 즉 u' 의 변화를 나타내며 점선의 s 값의 따른 변화는 동일 위치에서 본드수의 변화에 대한 영향을 각각 나타내었다. 점선의 거동은 생성되는 액적의 크기가 클수록 아래쪽으로 길게 늘어나며 파장 또한 길어진다는 것을 의미한다.

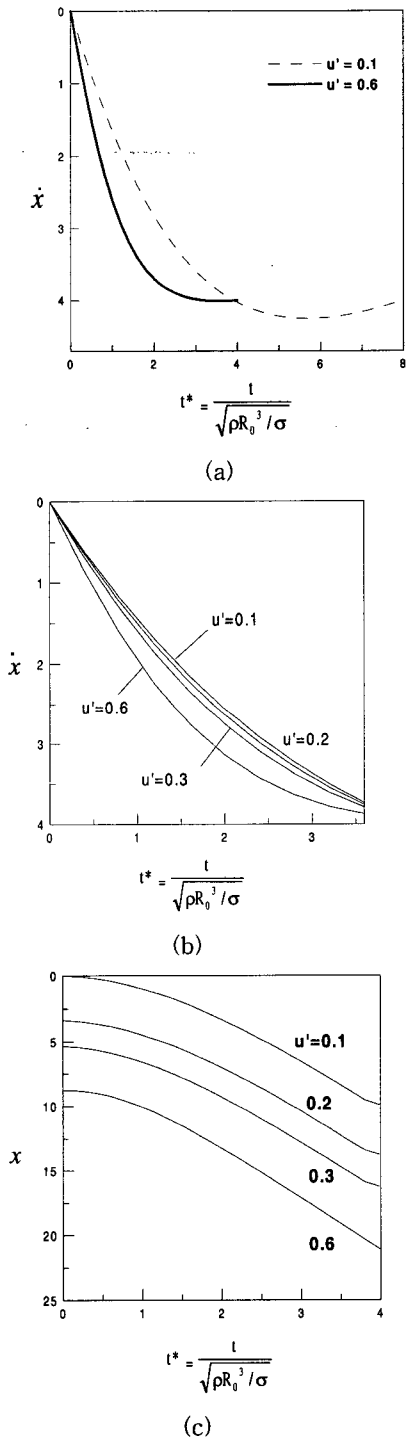


Fig. 2 Distributions of the disturbance velocity and the longitudinal displacement with respect to the change in u'

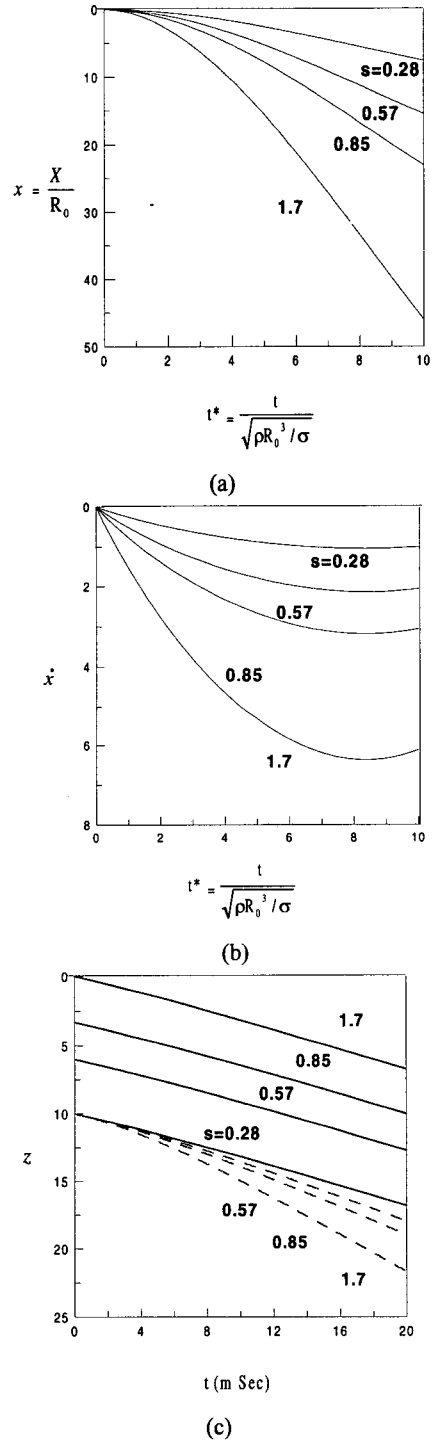


Fig. 3 Distributions of the disturbance velocity and the longitudinal displacement with respect to the changes of s parameter

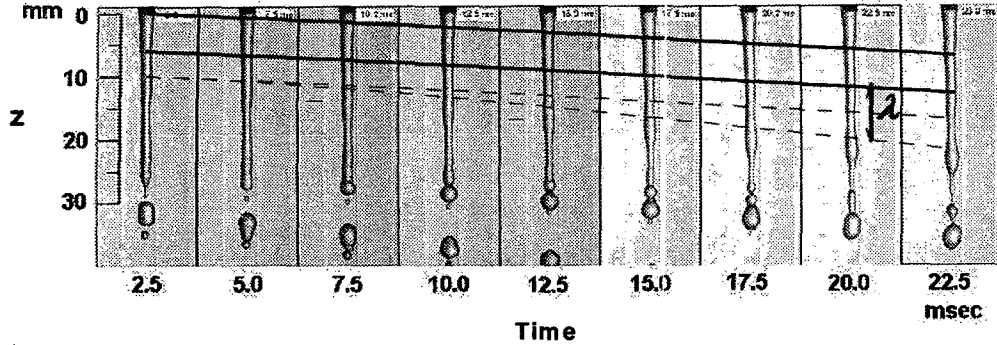


Fig. 4 High speed photographs taken at the photographical interval 400 Hz
(at the breakup interval of 50Hz)

이러한 계산 결과는 식 (23)의 액적의 체적과 본드수의 관계⁽⁹⁾에서도 알 수 있으며 이전 연구⁽¹¹⁾에서 나타낸 본드수에 의한 파장 변화결과와 일치된다.

$$V_d = 2\pi \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right)^{3/2} \sqrt{Bo} \quad (23)$$

수직하방 분사된 액주의 저속 유동구간에서 점선과 같은 거동현상이 상대적으로 유속이 빠른 액주에 비해서 크게 나타날 것으로 생각된다.

Fig. 4는 계산 조건과 동일 조건 하에서 1cycle 분열시간, 20msec 동안, 400Hz 간격의 고속 카메라로 촬영한 그림과 Fig. 3(c)의 데이터를 비교한 그림이다. 그림에서 분열간격은 대략 50Hz인 것을 알 수 있으며 시간 변화에 따른 파장과 분열 지점의 거동과 Fig. 3(c)의 2 cycle 분열시간 ($2t_{BU}^*$) 간격의 계산 결과 액주 종방향 거동은 분열 직후 순간적으로 정지된 상태가 있음을 알 수 있다. 이것은 낮은 유속 하에서 액주분열에 기인한 탄성력이 액주 유속 반대방향으로 작용한 것으로 생각되며 분열전의 파장이 본드수의 영향에 의해 길어짐을 알 수 있다.

Fig. 5의 (a) 와 (b)는 Fig. 4와 동일 조건에서 레이저센서로 주파수 분석한 것으로 (b)는 (a)를 z축을 기준으로 2차원으로 나타낸 그림이다. 그림에서 짙게 나타난 부분은 액주 표면파진폭 δ 의 검출신호 변화가 크다는 것을 의미하며 분열 지점은 대략 노즐로부터 20mm 지점이다. 실선으로 표시된 이론 해석 데이터는 Fig. 3 (c)의 데이

터를 사용하여 액주 파장 λ 와 식 (4)의 유속 u_z 를 구하여 주파수를 나타내었으며 점선은 Rayleigh 이론에 근거하여 다음과 같은 관계⁽⁹⁾로 구한 해이다.

$$f = \frac{U_0}{4.5D} \left(1 + \frac{2gz}{U_0} \right)^{3/4} \quad (24)$$

그림에서 분열주파수는 대략 20에서 80Hz 사이에 나타나며 이는 실선으로 표시된 해석해의 거동과 잘 일치됨을 알 수 있지만 중력효과를 고려한 Rayleigh 이론의 거동은 거리에 따라서 급격히 증가하여 실제 분열되는 주파수와는 상당한 차이를 나타내고 있다. 또한 노즐 근처에서 표면파의 크기가 매우 작기 때문에 주파수의 거동을 정확하게 측정하기 어려운 점이 있지만 본 해석을 통하여 표면파가 매우 작은 영역, 노즐초기에서의 파장거동을 예측할 수 있음을 나타낸다. 강제진동의 경우 식 (18)은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + a(1 + bx)\dot{x} + w_n x + s = F \sin(w^* t) \quad (25)$$

Rayleigh Type 상미분 방정식 (18), (25)의 주기해(Periodic solution)의 존재성은 참고문헌 (12)에 언급되어 있다. 이것은 준 안정적인 Limit cycle을 가진다는 것을 의미하며 액주거동에 있어서는 균일한 액적 생성의 가능성을 의미하는 것이 된다.

강제진동 주파수 w^* 는 무차원 량으로서 가진시 실제 주파수를 w 라 할 때 $w\sqrt{\rho R_0^3/\sigma} = w^*$ 의 관계가 있다.

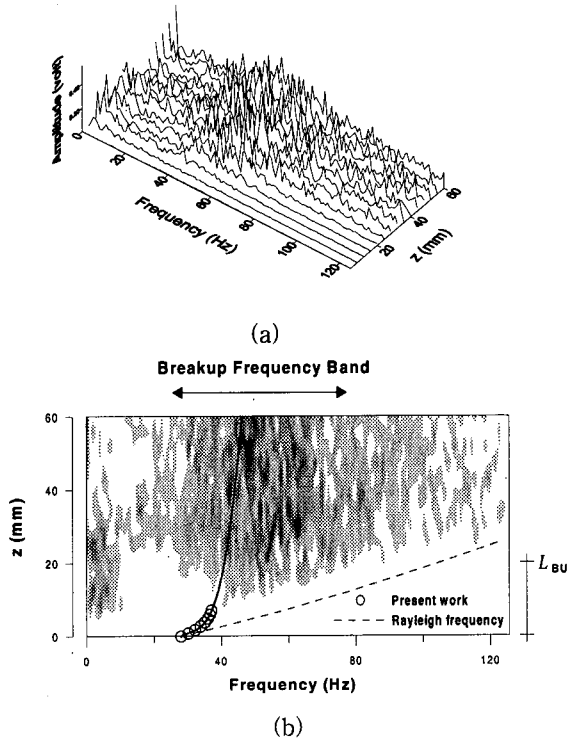


Fig. 5 Comparisons of theoretical frequency (circle) with experimental frequency spectrum

따라서 $w = 2\pi f$ 이므로 앞의 해석과 실험 결과의 조건을 적용하면 분열주파수를 75Hz로 가정할 때 대략 w^* 는 2의 크기를 갖는다. 이 값은 최대 성장률⁽¹¹⁾ $\alpha_{max} = 0.34 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R_0^3}} \approx 75$ 의 값과 비슷한 크기이며, Fig. 5의 분열 주파수 대역내의 고유 주파수라고 생각된다.

Fig. 6은 식 (25)로부터 구한 해를 무차원 시간 t^* 에 대해서 나타낸 그림이다. 이러한 경우는 강제 진동의 경우로서 스피커나 가진 장치에 의한 노즐 진동의 경우라고 할 수 있다. 그림 (a)는 동일 위치($w^* = 0.1$)에서 가진 주파수 v^* 의 값을 변화시킬 경우를 나타낸 그림으로서 $w^* = 0.1$ 는 거의 정지 상태로 나타나며 $w^* = 2$ 인 가진 주파수 75 Hz의 검은 실선으로 나타난 부분에서는 규칙적인 주기 $t^* \approx 4$ 의 정현파가 나타나며 그 이상의 주파수 영역에서는 정현파로 거동하는 경향이 작게 나타남을 알 수 있다.

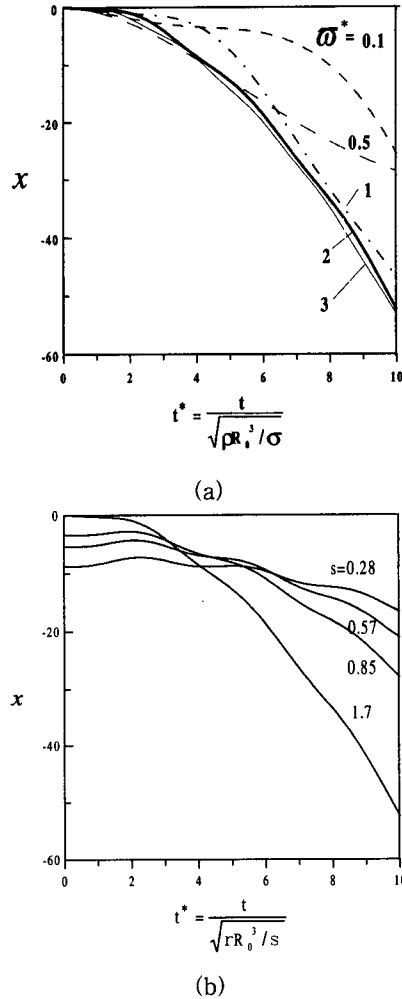


Fig. 6 Comparison of experimental data with calculations by the forced vibration method

그림 (b)에서는 $w^* = 2$ 일 경우 서로 다른 초기 위치, 즉 s 값을 변화시킬 경우에 대해서 무차원 미소교란변위 x 의 거동 과정을 나타낸 그림이다. 분열주기 $t^* \approx 4$ 내에서 노즐 초기 위치 $s = 1.7$ 이외에는 종방향 미소 교란변위 x 값의 시간변화율이 매우 작게 나타난다.

4. 결론

공기역학적 효과를 무시한 낮은 레이놀즈수의 Rayleigh 불안정영역에서 교란의 성장 및 분열 현상을 물리적으로 명확하게 해석하기 위한 새로운 방법을 제시하였다.

- (1) 액주의 분열은 역방향 탄성력 효과에 기인한 액주유속이 0인 상태에서 발생한다.
- (2) 액주교란파의 표면파 거동과 파장변화는 레일리 미분방정식 해의 거동형태로 나타낸다.
- (3) 강제 진동 분열 모델로의 적용 가능성을 보여준다.
- (4) 층류 유동 구간의 액주에 있어서 증력에 의한 영향은 무차원 변수 본드수에 의해서 표현되며 액주 파장변화에 영향을 미친다.
- (5) 액주표면에 생성되는 표면파 주파수는 수직 하방 분사일 경우 노즐초기 위치에서 유속 증가에 따라 증가하는 경향을 나타낸다.

참고문헌

- (1) No, S. Y. and Kim, J. I., 2000, "Assessment of Prediction Ability of Atomization and Droplet Breakup Model on Diesel Spray Dynamic," *Journal of ILASS-KOREA*, Vol. 5, No. 2, pp. 35~42.
- (2) Yoon, Youngbin, Park, J. H. and Hwang, S. S., 2000, "Aerodynamical Progressed Taylor Analogy Breakup(APTAB) Model for Accurate Prediction of Spray Droplet Deformation and Breakup," *Journal of ILASS-KOREA*, Vol. 5, No. 2, pp. 53~60.
- (3) Lefebvre, H., 1989, *Atomization and Sprays*, Hemisphere Pub. Co., USA, pp. 37~59.
- (4) Lord Rayleigh, 1879, "On the Instability of Jets," *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 10, pp. 4~13.
- (5) Weber, C., 1931, "Zum Zerfall Eines Flüssigkeitstrahles," *Z. Angew. Math. Mech.*, Vol. 11, pp. 136~159.
- (6) Tomotika, S., 1935, "On the Instability of a Cylindrical Thread of a Viscous Liquid Surrounded by Another Viscous Fluid," *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, Vol. 150, pp. 322~337.
- (7) Lee, H. C., 1974, "Drop Formation in a Liquid Jet," *IBM J. Res. Dev.* 18, 364.
- (8) Inamura, T., Takagi, Y., Arai, T. and Maruyama, S. 1999, "Instability of Liquid Jet in Microgravity," *Proceeding of the ILASS-Asia 99, 4th Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems*, Yongin, Korea, 1-2 Oct, pp. 67~72.
- (9) Amagai, K., and Arai, M., 1997, "Frequency Analysis of Disintegrating Liquid Column," *ICLASS-97*, pp. 361~368.
- (10) Middlemann, S., 1995, "Modeling Axisymmetric Flows," *Applied Mech. California*, Academic press, USA, pp. 93~170.
- (11) Hilbing, J. H., Heister, S. D. and Spangler, C. A., 1995, "A Boundary Element Method for Atomization of a Finite Liquid Jet," *Atomization and Sprays*, Vol. 5, pp. 621~638.
- (12) Wang, G. and Yan, J., 2000, "On Existence of Periodic Solutions of the Rayleigh Equation of Retarded Type," *Interna. J. Math. & Math. Sci.* Vol. 23, No. 1, pp. 65~68.