

난류 예혼합 화염에서의 프랙탈 차원의 통계적 특성

이 대 훈* · 권 세 진†

(2000년 11월 14일 접수, 2001년 10월 27일 심사완료)

Statistical Characteristics of Fractal Dimension in Turbulent Premixed Flame

Dae Hoon Lee and Sejin Kwon

Key Words : Fractal(프랙탈), Fractal Dimension(프랙탈차원), Turbulent Premixed Flame(난류예혼합 화염), Statistics(통계)

Abstract

With the introduction of Fractal notation, various fields of engineering adopted fractal notation to express characteristics of geometry involved and one of the most frequently applied areas was turbulence. With research on turbulence regarding the surface as fractal geometry, attempts to analyze turbulent premixed flame as fractal geometry also attracted attention as a tool for modeling, for the flame surface can be viewed as fractal geometry. Experiments focused on disclosure of flame characteristics by measuring fractal parameters were done by researchers. But robust principle or theory can't be extracted. Only reported modeling efforts using fractal dimension is flame speed model by Gouldin. This model gives good predictions of flame speed in unstrained case but not in highly strained flame condition. In this research, approaches regarding fractal dimension of flame as one representative value is pointed out as a reason for the absence of robust model. And as an effort to establish robust modeling, presents methods treating fractal dimension as statistical variable. From this approach flame characteristics reported by experiments such as Da effect on flame structure can be seen quantitatively and shows possibility of flame modeling using fractal parameters with statistical method. From this result more quantitative model can be derived.

기호설명	
A	: 면적
ϵ	: 측정 스케일
L	: 주변길이
D	: 프랙탈 차원
D1	: 1 차원 프랙탈 값
I	: 난류강도
S	: 속도
U	: 평균속도
u'	: 요동속도
Da	: 담펠러수
Re	: 레이놀즈수

첨자	
u	: 기연영역
L	: 층류
i	: 내부
o	: 외부
*	: 표준화된 값

1. 서론

Richardson⁽¹⁾ 이후 완전 발달 난류는 에디의 hierachy 로 구성되어 있는 것으로 이해 되어 지기 시작했고 이 것은 프랙탈의 특징인 self-similar 구조의 대표적인 예가 될 수 있다. Mandelbrot⁽²⁾ 에 의해서 등방성 균일 난류장의 표면이 프랙탈 성질을 가진다는 것이 발견된 이후 Sreenivasan,⁽³⁾ 등 여러 연구자들에 의해 난류 유동 표면에서의 프랙탈 성질과 난류 특성의 관계에 대한 연구가 진행되어져 왔다. 화염면에서의 값들이 스트레인을 받지 않는 층류 화염 특성값들로 표현되어진다는

* 한국과학기술원 대학원 항공우주공학전공
† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 항공우주공학전공
E-mail : melody@kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3721 FAX : (042)869-3710

flamelet 가정에 의해⁽⁴⁾ 난류 예혼합 화염면 또한 프랙탈 성질을 연구할 수 있는 대상이 되었다. 난류 예혼합 화염면을 프랙탈 표면으로 해석하는 연구는 여러 연구자들에 의해 수행되어져 왔다. Murayame 와 Takeno^(5,6)에 의해 유입연료의 난류 값이 화염면의 프랙탈 특성과 직접적으로 연관되어 있지 않음이 밝혀졌고 Gouldin 등⁽⁷⁾에 의해 화염면이 일반적으로 알려진 난류 경계면의 프랙탈 차원보다 낮은 차원 값을 가진다는 것이 보고되었다. Yoshida 등⁽⁸⁾ 은 inner cutoff 와 outer cutoff 가 미연가스 난류 스케일과 무관하며 inner cutoff 는 층류 화염 불안정성으로 야기된 화염 왜곡의 스케일과 같다는 것을 보고하였다. Gouldin⁽⁹⁾ 은 측정된 프랙탈 차원 값을 이용한 난류 화염 속도 모델을 제시하였다. 이로부터 Gouldin 등⁽¹⁰⁾ 은 연료 연소율에 대한 모델을 제시하였다.

엄밀히 말해서 난류에서의 self-similarity 구조가 inertial sub-range 영역에서 나타나는 특징적인 현상인데 비해 실제 화염면의 프랙탈 측정에서 나타나는 similarity 구간은 integral scale 영역을 넘어서는 것이고 화염면의 프랙탈 차원이 방향성을 일부 가지는 것으로 보이는 실험결과가 보고되므로⁽⁵⁾ 난류 예혼합 화염면이 이상적인 균일 등방성 스칼라면을 형성한다고 보기는 어렵다. 하지만 실제 측정 결과에서 제시된 결과들로부터 특정한 길이 스케일 범위에서 화염면이 일정한 범위의 프랙탈 차원 값을 유지한다는 것과 이 범위 값의 스케일이 화염면의 특성을 반영한다는 것임이 밝혀졌다. 따라서 화염면에서의 프랙탈 특성과 에너지 전달 구조를 이해하는 것은 난류 예혼합 화염의 난류 특성, 연소속도와 연소율을 예측하는데 유용한 도구가 될 수 있을 것이다. 본 연구에서는 Takeno 등⁽⁶⁾ 과 Goix 등⁽¹¹⁾에 의해 보고된 실험 결과로부터 난류 예혼합 화염 미연영역의 특정 영역에서 화염이 발견될 확률인 간헐도, 유동 특성과 프랙탈 차원의 상관성을 분석하고 프랙탈 차원의 분포로부터 난류특성을 해석하는 방법을 제시하였다. 이러한 연구의 결과는 프랙탈 차원을 이용해 연소 속도와 같은 화염 특성을 모델링 하기 위한 파라미터와 방법을 제시할 수 있는 물리적 근거가 된다.

2. 본 론

2.1 프랙탈 이론과 해석에 사용된 실험

난류 유동장 혹은 난류 예혼합 화염면의 프랙탈 차원의 측정은 inner cutoff, outer cutoff, 프랙탈 차원의 3 가지 파라미터를 통해서 표현할 수가 있

다. 2 차원 공간 경계면의 경우 프랙탈 경계면의 면적은 power law 로 불리는 식 (1) 과 같은 관계에 의해 표현된다.

$$A \sim \varepsilon^{2-D} L^D \quad (1)$$

이러한 관계가 유지되는 경계에 해당하는 inner cutoff 와 outer cutoff 에서의 관계식으로부터 화염면의 길이는 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{L(\varepsilon_i)}{L(\varepsilon_o)} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_o} \right)^{1-D} \quad (2)$$

이들 관계식으로부터 화염면의 길이 스케일에 대한 정보가 필요하게 되었다. 길이 스케일을 알 수 있으면 측정된 프랙탈 차원 값으로부터 화염면의 면적을 측정할 수 있기 때문이다. 따라서 측정된 프랙탈 차원과 파라미터 들을 연결시키기 위해 cutoff 들과 콜모고로프 스케일, 적분 스케일 등의 여러 길이 스케일을 연관시키는 시도가 수행되어져 왔고 Peters⁽¹²⁾는 Gibson scale 을 inner cutoff 스케일로 주장하였다. 이 외에 이러한 프랙탈 차원의 power law 를 이용해 난류 파라미터와 프랙탈 차원을 연결시킨 Gouldin⁽⁹⁾ 의 모델에서 연소속도를 어느 정도 예측 할 수 있었지만 Stretch 효과가 크지 않은 유동장에 제한된 결과였고 smallwood 등⁽¹³⁾에 의해 난류 연소 속도를 모델링하기 위한 시도가 있었지만 만족할 만한 프랙탈 차원과의 직접적인 관계성을 얻지는 못하였다. 그 외 여러 연구자들의 실험결과를 통해서도 사실상 프랙탈 파라미터들과 난류 파라미터들과의 일관적인 큰 상관도를 구하기가 어려운 것임이 밝혀졌다.

난류 예혼합 화염의 프랙탈 특성을 구하기 위한 기존의 연구는 화염면 전체를 특징적인 하나의 프랙탈 차원을 가지는 영역으로 보고 있다. 실제 여러 가지 cutoff , 프랙탈 차원값을 가지는 image 들로부터 그려진 측정 스케일 길이 관계로부터 프랙탈 차원을 구할 때 측정 스케일-길이 관계의 기울기 대표 값을 결정하게 되는데 이 과정에서 각 image 들이 가지는 통계적 의미를 상실하게 된다. 본 연구에서는 프랙탈을 이용한 모델들이 만족할 만한 결과를 제공하지 않는 것은 화염면에서 프랙탈 차원의 분포가 가지는 통계적 특성이 고려되지 않고 하나의 대표적 차원으로 보는 데 그 이유가 있었음을 기존 실험결과와의 분석을 통해 확인하였다.

Takeno 등⁽⁶⁾ 은 출구 직경 27mm 의 동축형 버

Table 1 Flame condition in each Takeno⁽⁶⁾ experiment

Case	I	II	III
U (cm/sec)	69.9	87.3	174.7
u' (cm/sec)	9.7	12.6	24.3
u'/S _u	0.65	0.84	1.62
η (mm)	0.37	0.31	0.19
l (mm)	4.8	5.0	4.8
l/δ	4.4	4.5	4.4
R _l	31.0	42.0	77.8
Da	6.8	5.4	2.7

S_u burning velocity
 l integral sclae
 δ flame thickness
 η Kolmogorov scale
 R_l u'l/v
 Da (l/u')/(δ/S_u)

Table 2 Flame condition in each Goix⁽¹¹⁾ experiment

Case	Flame2	Flame 3	Flame 4
I (%)	5.3	3.3	4.9
Re	20	40	40
S _L (m/s)	0.23	0.16	0.16
U (m/s)	4.9	5.1	5.1
Da	16	38	17

너에 형성된 당량비 0.65의 Methane / Air 난류 예혼합가스에 대해 Ar-ion laser를 이용한 레이저 단층 촬영으로 구한 이미지를 처리해서 프랙탈 특성을 관찰하였다. 실험조건은 Table 1과 같다. Goix 등⁽¹¹⁾은 당량비 0.4에서 0.43에 이르는 연료 조건에서 수행한, 안정화 막대에 부착된 V-자형 수소 / 공기 예혼합 화염의 프랙탈 차원을 구하였다. 실험은 모두 6가지의 조건에 대해서 수행되었고 본 연구에서는 이 중 제시된 3가지 조건의 결과에 대한 분석을 수행하였다. 각각의 실험조건은 아래 Table 2와 같다.

2.2 해석 과정

Takeno 등⁽⁶⁾은 image들에 대해 circle method를 적용해서 0.277mm 단위의 픽셀로 circle의 반경을 변화시켜 가면서 형성되는 화염면 영역 둘레의 곡선 길이를 구한 길이-반경 곡선으로부터 프랙탈 차원을 구하였고 Goix 등⁽¹¹⁾은 line segment method를 통해 segmenst의 길이에 따른 화염면과의 교

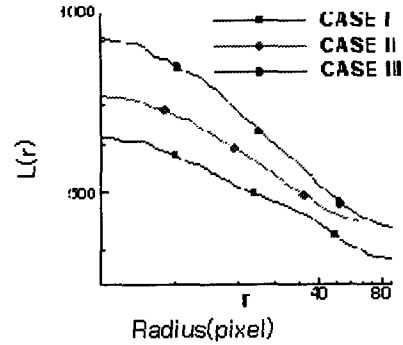


Fig. 1 Fractal length plots of case I,II,III

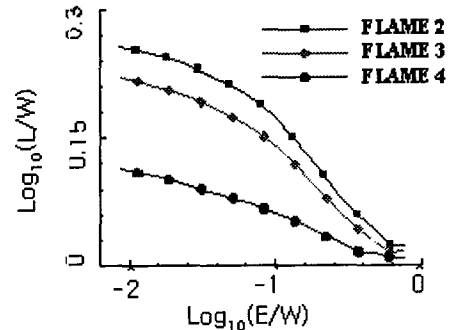


Fig. 2 Fractal length plots of Flame 2,3,4

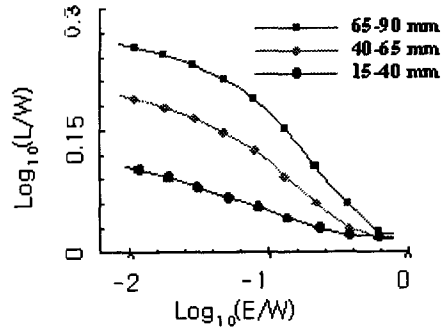


Fig. 3 Fractal length plots at three different locations W = 25mm

차 회수를 측정된 교차회수-길이 곡선으로부터 프랙탈 차원을 구하였다. 각각의 결과에서 서로 다른 20~30개의 측정 스케일에 대한 길이의 변화로부터 프랙탈 차원을 구한 결과 곡선은 Fig. 1, Fig. 2와 같다.

Goix⁽¹¹⁾의 실험에서는 안정화 막대로부터 멀어지면서 형성된 화염을 따라가면서 폭 25mm, 높이 25mm의 범위로 가시화를 수행하였다. Fig. 2의 결과는 Goix⁽¹¹⁾의 실험에서 결과로 제시한 안정화

막대로부터 65-90mm 높이에 위치한 창에 대한 각 화염 조건의 결과이다. 창의 높이에 따른 측정이 이루어 졌는데 FLAME 2 의 경우 화염안정화를 위한 막대로부터 15-40mm, 40-65mm, 65-90mm, 각 경우에 대해 수행되었다. 논문에서 제시된 결과는 Fig. 3 과 같다.

이상의 모든 결과에서 전체 화염면의 프랙탈 차원은 하나의 대표 차원으로 구해졌다. 즉 Fig. 1~3 에 나와 있는 곡선들이 하나의 대표적인 기울기를 가지는 것으로 생각해 왔다. 개별적인 image 들로부터 프랙탈 차원을 각각 구하고 이들 개별 결과로부터 프랙탈 파라미터를 통계적으로 구할 수 있다는 것이 확인되었지만⁽¹³⁾ 유동과 화염의 조건의 변화와 같은 실험 조건의 변화에 따른 이러한 통계적 특성의 변화와 한 번의 측정 결과 안에서 스케일에 따라 다양한 값의 프랙탈 차원으로 표현할 수 있다는 가능성에 대해서는 무시해 왔었다.

본 연구에서는 이상의 결과들에서 화염면의 프랙탈 특성이 하나의 차원으로 표현되어지지 않는다는 점에 주목하였다. 실제 프랙탈 측정 결과들은 다양한 프랙탈 차원 값의 분포를 가지고 있다는 것은 Fig. 1~3 의 프랙탈 차원 측정 결과로부터 쉽게 추측할 수 있다.

프랙탈 차원의 이러한 통계적 성질과 여러 유동 및 화염과 관련된 파라미터들과의 관계를 좀 더 정량적으로 알아 보기 위해 각 논문에 제시된 측정 스케일 길이 결과를 분석하여 측정 길이 스케일에 따른 프랙탈 차원 분포의 통계적 특성을 관찰하였다. 각 논문의 결과에서 프랙탈 차원을 나타내는 스케일-길이, 스케일-교차회수 곡선, 즉 Fig. 1~3 의 x 축에 해당하는 전체 스케일 구간에서 inner cutoff 와 outer cutoff 사이에 해당하는 구간을 50-60 개의 등 간격으로 나눈 후 곡선을 따라가며 각 x 좌표에 해당하는 위치에서의 곡선의 기울기 즉 프랙탈 차원을 구해서 그 값들을 통계

처리하였다. 각 위치에서의 기울기 값은 1 차 및 2 차 정확도를 가지는 차분을 이용해서 구하였고 정확도에 따른 차이는 거의 관찰되지 않았다. 3 차원 프랙탈 값에서 2 를 뺀 값인 D1 값 -0.2 에서 4.8 사이를 15 개의 구간으로 나누어 각 위치에서 구해진 프랙탈 차원값의 분포를 각 구간별로 구하고 이를 이용해 확률분포를 구하였다.

Fig. 1 에 나와 있는 CASE I, II, III 의 경우 각 조건 변화에 따른 프랙탈 차원의 변화가 크지 않지만 Fig. 2 에 나와 있는 FLAME 2, 3, 4 에서의 각각의 조건 및 Fig. 3 에 제시된 FLAME 2 에서의 각 측정 창의 위치에 따른 프랙탈 차원 값의 변화가 크며 이 변화는 대부분 x 좌표 -1.2 이상에서만 발생하였다. 이러한 현상은 통계처리 결과로부터 좀더 정량적으로 확인할 수 있다. CASE I,II,III, FLAME 2, 3, 4 및 FLAME 2 의 각 창에 대한 프랙탈 차원 분포 변화는 Fig. 4~6 에 제시되어 있다.

Fig. 5 의 결과에서 구한 측정 스케일에 따른 각 창의 프랙탈 차원 분포의 확률 분포를 나타낸 결과는 Fig. 7 과 같다.

2.3 스케일 - 간헐도 관계

연료 유동장에 놓인 안정화 막대에 의해 부착된 V 자형 화염의 경우 안정화 막대로부터 멀어질수록 난류 화염의 발달로 화염면의 면적이 커지고 화염면의 불안정성이 증가하게 된다. 이러한 결과는 곧 화염면의 굴곡을 증가시키게 된다. 이는 화염이 존재하는 영역이 확대되었다는 것을 의미하고 측정 창 내에 있는 특정 위치에서 화염이 발견될 확률로 정의 할 수 있는 간헐도(c)의 분포가 넓어 졌다는 것을 의미한다. 오일러리안 공간에서의 프랙탈 차원 값은 정수값 2 를 가지고 D1 값은 0 이 된다. Fig. 6 에서 확인할 수 있듯이 안정화 막대에 가까워서 난류가 발달되지 않은 경우 화염면의 프랙탈 차원 D1 의 값이 오일러리안 공간에 가까운 0 에서 집중적으로 분포한다. 그러나 안정화

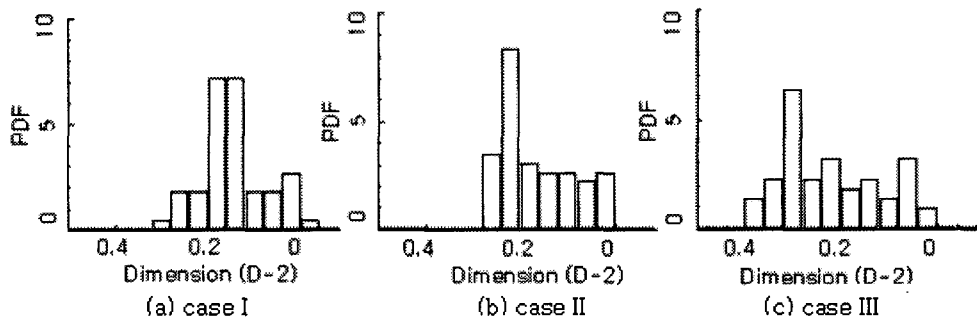


Fig. 4 Fractal dimension distributions in case I,II,III

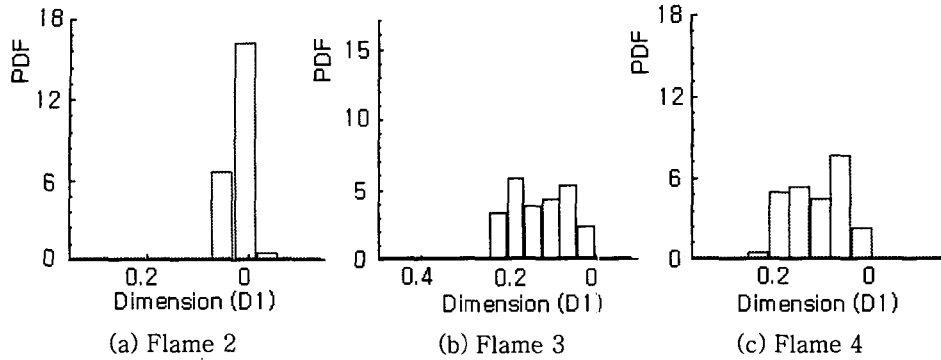


Fig. 5 PDF of fractal dimensions in each case

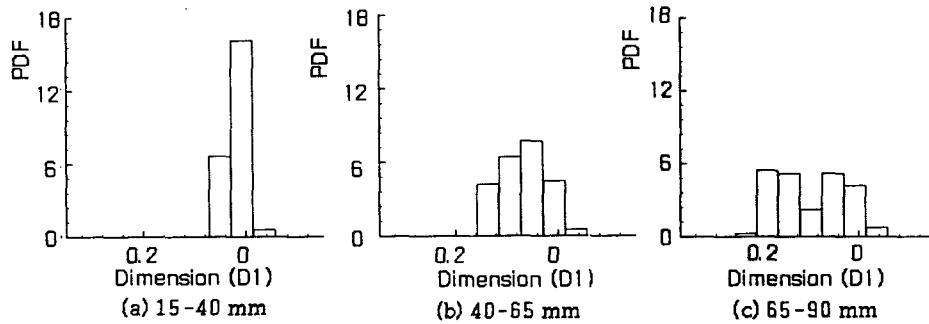


Fig. 6 PDF of fractal dimensions at three different location W=25 mm each

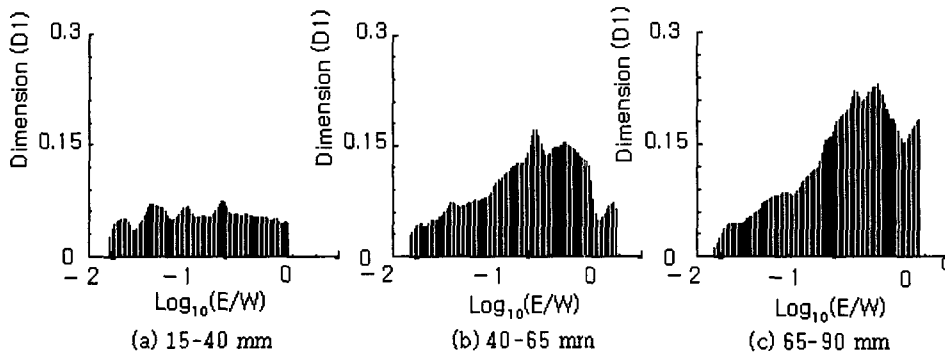


Fig. 7 Dimension distributions in each window

막대에서 거리가 멀어지고 난류 화염이 발달할수록 화염면에서 측정된 프랙탈 차원의 확률밀도 분포영역이 프랙탈 차원이 증가되는 방향으로 확장되면서 난류 화염의 불안정성이 성장한다. 화염의 불안정성이 증가할수록 간헐도는 증가하게 되므로 제시된 결과를 통해 간헐도가 증가할수록 프랙탈 차원값 분포가 성장하는 경향을 확인할 수 있다. 특히 이러한 현상은 Fig. 7의 결과에 제시되어 있는 바와 같이 x 축 값 0.8 정도에 해당하는 특정한 크기 영역의 에디에 대해서 발생하고 있다. 이러한 관찰로부터 프랙탈 파라미터를 이용

해 에디의 발달 구조를 결정하는 경향을 표현할 수 있는 모델식을 수립할 수 있음을 알 수 있다.

이러한 근거로부터 화염특성을 표현할 수 있는 관계식을 얻을 수가 있다.

Beta Probability Distribution 함수⁽¹⁴⁾는 두 개의 파라미터에 의해 함수형이 변하는 확률분포함수로서 식 (3) 과 같은 형태를 가진다.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & \alpha, \beta > 0; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & elsewhere \end{cases} \quad (3)$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

분포함수를 정의하는 두 개의 파라미터 α β 에 의한 함수형의 변화가 Fig. 7에 나타나 있는 실험 조건의 변화에 따른 프랙탈 차원 분포의 변화와 유사하다는 사실로부터 프랙탈 차원분포의 변화를 묘사해 낼 수 있는 Beta Probability Distribution 함수를 응용한 모델식을 수립하였다. 수립된 모델식은 변수 파라미터를 하나로 설정해서 한 가지의 물리량에 대한 영향을 평가할 수 있도록 하였다.

Inner cut off 와 outer cut off 로 측정 scale 을 무차원화 한 값을 ϵ^* 라고 하면 ϵ^* 는 아래 식과 같이 정의 할 수 있다.

$$\epsilon^* = \frac{\epsilon - \epsilon_i}{\epsilon_o - \epsilon_i} \quad (4)$$

간헐도 c 는 0 에서 1 사이의 값에서 정의되는 값이므로 모델식에 적합한 크기의 상수 범위 값을 가지도록 하기 위해 scaling factor a 를 곱해야 한다. 이와 같이 c^* 를 정의 하면 ϵ^* scale 에서의 프랙탈 차원 D 는 식 (5)와 같은 모델로 표현 할 수 있다.

$$D(\epsilon^*, c^*) = k \cdot \frac{c^* \cdot \epsilon^{*c^*-1} (1-\epsilon^*)^{f \cdot c^*-1}}{\int_0^1 \epsilon^{*c^*-1} (1-\epsilon^*)^{f \cdot c^*-1} d\epsilon^*} \quad (5)$$

$$c^* = a \times c + b$$

a scaling factor

b coefficient, $0 \leq b \leq 1$

f scaling factor

k constant

여기에서 a, b 의 값은 실험값 과의 비교를 통해 결정할 수 있다.

본 연구에 이용된 결과에 대해 각각에 해당하는 c^*, f 의 값과 이 값을 이용한 결과의 비교는 아래와 같다. ϵ_i 의 값으로는 Gibson scale 이 사용되었고 ϵ_o 의 값으로는 기울기 변화점을 사용하였다. 이들 결과를 이용한 fitting 은 Fig. 8 과 같다.

본 연구에 사용된 실험의 결과에서 한 위치에서 화염이 발견될 확률을 측정한 간헐도 측정 결과가 없으므로 model coefficient 의 정확한 값에 대한 결과는 구할 수가 없지만 Table 3 의 결과를 통해서 화염의 간헐도의 증가가 c^*, f, k 각각의 값의 증가에 선형적으로 관여함을 확인할 수가 있다. 프랙탈 차원과 측정 scale 의 분포가 위와 같은 함수로 표현될 수 있다는 결과를 이용하면 프랙탈 값을 측정한 결과로부터 화염에 대한 정보를 알 수 있다. Fig. 8 에서 확인할 수 있는 바와 같이 (a)에서 (c)를 향해 갈수록 즉 안정화 막대에서 멀어지면서 난류 화염이 발달해 갈수록 0.5 이상의 ϵ^* 값에서 차원의 증가가 더 활발하게 일어나며 프랙탈 차원이 최대인 ϵ^* 의 위치가 1 에 가깝게 이동한다. 이 결과를 제시된 함수를 통해서 확인 하면 함수의 특성상 f 가 증가할수록 프랙탈 차원이 최대인 ϵ^* 의 위치가 1 에 가깝게 이동해 가므로 난류가 발달하고 간헐도가 증가하는 현상을 f 값의 변화로 모델링 할 수가 있음을 알 수 있다. 즉 Fig. 8 의 변화를 가져온 간헐도의 변화를 f 값

Table 3 Model parameter values

	(a)	(b)	(c)
c^*	1.25	2.7	3.3
f	0.96	1.17	1.43
$k \cdot c^*$	0.01	0.0175	0.0238

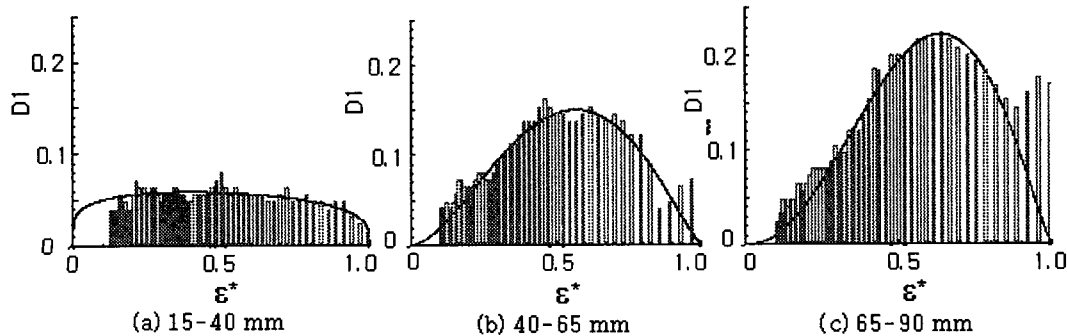


Fig. 8 Curve fitting on fractal dimension at three different locations

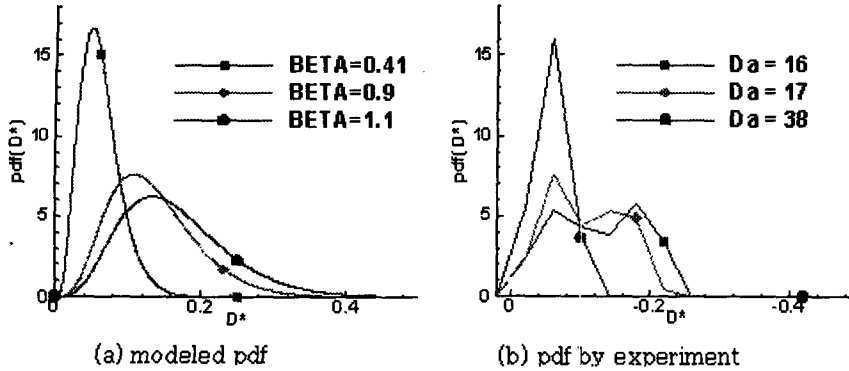


Fig. 9 Fractal dimension distributions in flame 2,3,4

의 변화로 모델링 할 수 있게 된 것이다.

이처럼 실험 결과와의 비교를 통해 모델 함수를 이용해서 프랙탈 차원 최대값이 발생하는 에디의 사이즈가 간헐도의 증가와 함께 증가하고 있음을 확인할 수 있다. 이것은 화염면 확장에 더 큰 영향을 주는 특정한 에디의 사이즈가 화염의 불안정성과 더불어 증가하고 있다는 것을 의미한다. 프랙탈 차원을 하나의 대표값으로만 보는 기존의 연구는 화염면에 대한 단순한 기하학적 모델을 구하는데 그 목적이 있었지만 이와 같이 통계적 특성을 이용해 수립된 모델을 이용해서 화염면을 관찰하면 화염면 내부의 에디구조의 변화와 같은 물리적 현상도 알 수 있는 새로운 모델의 개념이 가능해진다.

2.4 스케일 - Da 관계

기존의 연구에서 프랙탈 차원을 하나의 대표 차원으로 보았을 때 화염면의 프랙탈 차원 값은 연료 유동의 난류 특성이나 Da 등과 큰 상관관계가 없는 것으로 알려졌지만 프랙탈 차원을 하나의 대표 값이 아니라 통계적 분포로 바라본다면 프랙탈 차원에 반영되는 화염과 유동특성에 대한 정보를 얻을 수 있다. Fig. 5의 (a),(b),(c) 각 경우에 대해 Da 값은 16, 38, 17의 값이다. 그림에서 확인할 수 있듯이 Da 값이 클 경우 확률밀도가 커지고 프랙탈 차원의 영역이 좁아진다. 이러한 결과를 통해 Da 수가 프랙탈 차원 분포의 범위와 확률 밀도 값에 직접적인 영향을 주고 있음을 확인할 수 있다. 이 관계의 정량적인 분석을 위해 Da를 변수로 하는 분포 함수를 구성할 수 있다.

Gamma-Type Probability Distribution은 두 개의 파라미터로 결정되는 분포함수이고 그 일반적인 형태는 식 (6)과 같다.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & \alpha, \beta > 0; 0 \leq y < \infty \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (6)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

파라미터의 변화에 따른 이 함수 값의 변화가 Da 값의 변화에 따른 프랙탈 차원 분포 함수의 변화와 유사하다는 데서 모델식의 형태를 Gamma-Type Probability Distribution으로 정하였다. 식 (7)은 scaling된 프랙탈 차원에 대한 분포함수의 식이다. 특정 에디 크기에서의 프랙탈 차원 값은 이 분포 함수에 따라 식 (8)과 같이 얻어질 수 있다.

$$P(D^*) = C_3 \frac{D^{*\alpha-1} e^{-D^*/\beta}}{\beta^\alpha \int_0^\infty D^{*\alpha-1} e^{-D^*/\beta} dD^*} \quad (7)$$

- D^* scaled dimension
- α constant
- β model coefficient

$$D^* = \int_{D^*_1}^{D^*_2} P(D^*) dD^* \quad (8)$$

위 식에 사용된 두 가지 parameter α, β 와 Da의 값은 Table 4와 같다. 결과에서 알 수 있듯이 α 값은 고정된 상수이므로 모델링에 사용되는 변수는 β 값 하나임을 알 수 있다. 즉 한 가지 물리량에 대한 모델을 구할 수가 있다.

Table에 제시된 결과와 같은 값에 의해 얻어진 결과와 프랙탈 차원의 실제 분포는 Fig. 9에 비교하여 제시되어 있다.

Table 4 Model parameter values

	FLAME 3	FLAME 4	FLAME 2
α	5	5	5
β	0.41	0.9	1.1
β/β_{flame3}	1	2.195	2.683
$1/Da$	0.0263	0.0588	0.0625
Da_{flame3}/Da	1	2.235	2.375

결과에서 확인 할 수 있듯이 Da 수가 프랙탈 차원의 분포에 미치는 영향을 확인 할 수 있고 프랙탈 차원의 분포식 (7)은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P(D^*) = C_1 D \alpha^{c_2} \frac{D^{*c_2-1} e^{-Da \cdot D^*}}{\int_0^\infty D^{*c_2-1} e^{-D^*} dD^*} \quad (9)$$

식 (9)와 식 (8)을 이용해 특정 화염에 대해 프랙탈 차원을 구하면 일반적인 Gamma-Type 함수의 적분 값 특성을 이용해서 프랙탈 차원이 식 (10)과 같이 Da 와의 직접적인 관계식으로 구해짐을 쉽게 확인할 수 있다. 즉 프랙탈 차원과 Da 가 반비례하는 관계에 있음을 직접 확인할 수 있다.

$$D^* = \frac{\gamma}{Da} \quad (10)$$

γ coefficient

Da 수가 클 때 프랙탈 차원의 확률밀도가 높고 분포영역이 좁다는 것은 반대의 의미로 화학반응의 상대적인 time scale 이 클수록 프랙탈 차원의 분포가 확장되어진다는 것을 의미한다. Table 2 의 Flame 2, 4 의 결과에서의 비교를 통해 Re 값은 두배가 차이가 나지만 Da 는 비슷한 경우의 pdf 가 Fig. 9 에서와 같이 거의 동일한 분포를 보이는 것을 볼 때 화염면의 프랙탈 차원의 특성은 Re 수의 변화에는 사실상 큰 영향을 받지 않고 Da 수의 변화에 따라 변화한다는 것을 알 수 있다. 이것은 난류 유동 자체의 특성보다 화학 반응을 통해서 화염면의 확장이 더 크게 발생하며 프랙탈 차원이 연료 난류의 특성 값보다 화염면 자체의 특성을 반영한다는 기존의 연구결과를 입증하는 것이기도 하다. 제시된 결과인 V 자형 화염과는 다른 형상이 오픈 췌 타입의 화염에 대한 결과인 CASE 1,2,3 의 결과에서도 scaling factor 값이 다르긴 하지만 Da 수의 감소와 함께 프랙탈 차원의 분포 영역이 넓어지고 피크 값이 이동해 가는 것을

확인할 수 있었다.

3. 결론

난류 예혼합 화염에 대한 프랙탈 측정 결과로부터 난류 화염면의 프랙탈 성질이 가지는 통계적 특성을 관찰하였다. 기존의 연구에서 난류 화염면을 하나의 대표 차원 값을 가지는 면으로 생각하여 단순한 기하학적 모델을 수립할 수 있었던 반면 통계적 접근을 통해 화염면의 물리적 특성에 대한 고찰을 할 수 있는 새로운 모델 접근 방법을 제시 할 수 있었다. 프랙탈 차원을 하나의 대표값이 아니라 통계적 분포로 생각하였을 때 간헐도와 Da 수 등과의 관계를 정량적으로 구할 수 있었고 이를 통해서 간헐도와 프랙탈 차원 분포, Da 수와 프랙탈 차원 분포의 관계를 살펴보았다. 간헐도가 증가할수록 특정 크기 영역의 에디 크기에서 프랙탈 차원의 증가가 발생하며 이 관계는 지수적 관계에 있음을 확인하였고 유동의 특성 시간에 비해 화학반응의 특성시간이 늘어나면서 Da 수가 감소하면 프랙탈 차원의 분포 영역이 증가하면서 화염면의 굴곡을 심화 시키게 되는 것을 확인하였다. 본 연구의 결과로부터 프랙탈 차원을 통계적 방법을 이용해 모델링 할 수 있는 가능성이 제시되었고 이 방법은 단순한 기하학적 모델링이 아니라 화염의 물리적 특성을 파악할 수 있는 모델임을 확인할 수 있었다. 반응진행도 함수인 간헐도와 Da 수에 대한 모델링 접근에서 본 연구 결과 특정 에디 크기 ε 에서의 화염의 프랙탈 차원은 식 (9) 와 같이 표현될 수 있음을 확인하였다.

$$D(c^*, Da) = a' \cdot \frac{c^* \cdot \varepsilon^{*c^*-1} (1 - \varepsilon^*)^{f \cdot c^*-1}}{Da} \quad (9)$$

제시된 모델 식과 좀더 많은 실험 결과와의 분석을 통해 난류 예혼합 화염의 프랙탈 특성을 표현할 수 있는 보다 일반적인 관계식이 얻어 질 수 있을 것이다. 이 관계식으로부터 보다 정확히 화염면의 특성을 반영할 수 있는 모델의 수립이 가능할 것으로 판단된다.

참고문헌

(1) Richardson, L. F., 1922, "Weather Prediction by Numerical Process," Cambridge university press.
 (2) Mandelbrot, B. B., 1975 JFM, 72, 401,
 (3) Sreenivasan, K. R., 1991, Annu.Rev. Fluid, Mech 23, 530-600.
 (4) Wu, C. K. and Law, C. K., 1984, 20th Symposium on

- Combustion*. The Combustion Inst., pp.1941-1949
- (5) Murayame, M. and Takeno, T., 1988, *22th Symposium on Combustion*, The Combustion Inst., pp.551~559.
- (6) Takeno, T., Murayame, M., and Tanina, Y., 1990, *Exp. In Fluids* 10, 61~70.
- (7) Gouldin, F. C., Hilton, S. M. and Lamb, T., 1988, *22th Symposium on Combustion*. The Combustion Inst., pp. 541~550.
- (8) Yoshida, A., Ando, Y., Yanagisawa, T., and Tsuji, H., 1994, *Comb. Sci. and Tech.* V96, pp 121~134.
- (9) Gouldin, F. C., 1987, *Comb. and Flame* 68. pp.249~266.
- (10) Gouldin, F. C., Bray, K. N. C., Chen, J. -Y., 1989, *Comb. and Flame* 77. pp.241~259.
- (11) Goix, P. J., Shepherd, I. G. and Trinite, M., 1989, *Comb. Sci. and Tech.*, V.63 pp.275~286
- (12) Peters, N., 1986, *21th Symposium on Combustion*. The Combustion Inst., pp.1231~1250.
- (13) Smallwood, G. J., Gulder, O. L., Snelling, D. R., Deschamps, B. M. and Gokalp, I., 1995, *Comb. and Flame* V.101 pp. 461~470.
- (14) Mendenhall W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. L., 1991, *Mathematical Statistics with Applications*, 4th Edit. Thomson Information/Publishing Group.