

강성분포가 주기성을 갖는 구형셸의 좌굴해석

Buckling Analysis of Spherical Shells that Rigidity-Distribution has Periodicity

박 상 훈*
Park, Sang-Hoon

Abstract

Research about spherical shells been applying most usually is achieved by many investigators already and generalized equation has been derived. But, existent research is limited in case that spherical shell's roof rigidity is isotropy or orthotropy, and research that consider periodicity of rigidity-distribution that can happen by doing spherical shell's roof system by lattice system is not gone entirely.

The purpose of this paper is applying Galerkin method to spherical shell that model periodicity of roof rigidity-distribution that appear by roof lattice form of large space structure and develop structural analysis program that formularize. Rigidity-model of this research selects that of spherical shell which has 2-way grid.

In this paper, buckling-strength and deformation distribution of isotopic spherical shell and 2-way grid spherical shell obtained by developed program could confirm the reliability by comparison with result of existent research.

keywords : Spherical shells, Periodicity of Rigidity-Distribution, Buckling analysis

1. 서 론

대공간을 구축하는 구조시스템의 기본적인 구조 저항 메커니즘은 구조물 자체의 곡률을 이용하여 면 외방향으로 작용하는 외력을 주로 면내력으로 저항할 수 있게 한 셸 구조시스템을 이용할 수 밖에 없다. 대공간 구조물의 구조시스템은 연속체인 셸 구조에서 이산체인 격자셸 구조로 그 구조시스템이 변화하고 있다. 과거에는 대공간 구조시스템은 당연히 연속체 RC셸 구조가 주류를 이루었으나, 오늘날 자중의 감소 노력, 시공성 향상 및 컴퓨터의 도입과 더불어 구조해석능력이 발전함으로써 이산체인 격자셸 구조시스템의 도입이 매우 활발해졌다. 그 결과물로 국내 월드컵 경기장을 비롯하여 일본의 후쿠오카 돔, 나고야 돔 등이 건립되었다. 이런 격자셸 구조물의 좌굴은 형상이 매우 복잡하더라도 유효요소법 등을 이용한 상용구조해석 프로그램으로 어렵지 않게 해석할 수 있다. 그러나, 상용프로그램을 이용

한 좌굴해석은 구조물의 거동을 미시적 관점에서만 파악할 수 있으며, 특히 설계초기단계에서 형상모형을 구상할 때 Case by Case에 따라 일일이 구조해석을 수행하여야만 그 구조물의 거동을 파악할 수 있어 많은 시간과 노력이 따른다. 만약 거시적 관점에서 구조물의 거동을 간단히 파악하여 구조물의 형상을 다양하게 모델화해 볼 수 있다면 이는 대공간 구조물의 설계자들에게 시간적, 경제적 차원에서 대단히 유용한 일이 될 것이다.

현재, 가장 일반적으로 적용되고 있는 구형셸에 관한 연구는 이미 많은 연구자들에 의해 수행되어 일반화식^{2,4)}이 유도되어 있다. 그러나 기존의 연구^{2,4)}는 구형셸의 지붕강성이 등방성이거나 직교이방성인 경우에 한하며, 구형셸의 지붕시스템을 이산체인 격자시스템으로 함으로써 발생할 수 있는 지붕강성분포의 주기성을 고려한 연구는 전혀 진행되고 있지 않다.

따라서, 본 연구에서는 대공간 구조물의 구형지붕 격자형태에 의해 나타나는 주기성을 갖는 지붕강성

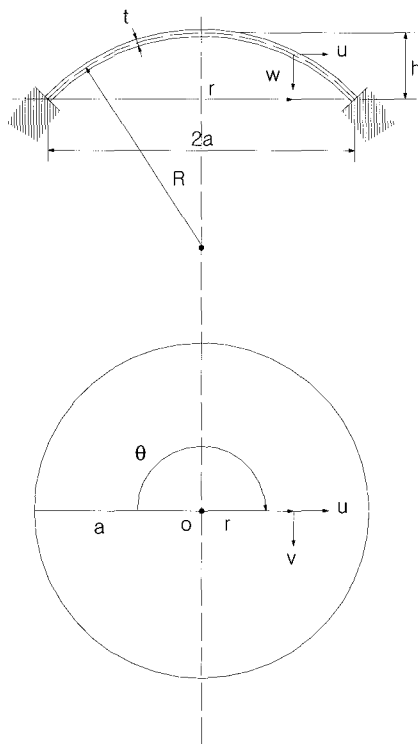
* 정회원 · 경북대학교 건축학부, 박사과정

을 고려한 구조해석 프로그램을 개발하고 그 프로그램의 타당성 검토에 그 목적을 둔다.

2. 형상 및 해석모델

2.1 형상모델

<그림 1>은 균일한 외압을 받는 양단고정의 구형셀의 형상을 나타낸다. 그림에서 R 은 곡률반경, a 는 셀의 저면반경, t 는 셀의 두께이고, h 는 셀의 높이이다. 그리고, 좌표계는 구형셀 저면의 중심을 원점으로 가지는 극좌표계(r, θ)를 설정하여, 연직방향 z 는 우수계를 정하기 위하여 하방향으로 한다. r, θ 와 z 방향의 변위성분은 각각 u, v 와 w 이다.

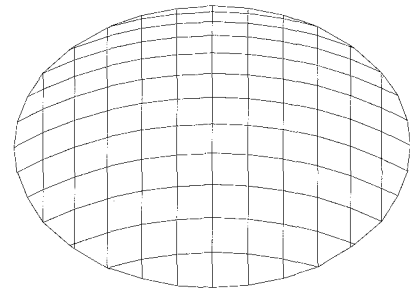


<그림 1> 구형셀의 형상

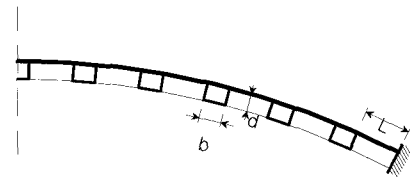
2.2 해석모델

본 연구의 해석모델은 강성분포의 주기성을 가진 모델로서 <그림 2(a)>에서 보여지듯이 2방향 그리드(Grid)를 갖는 구형셀을 선택한다. 이와 같은 격자형태의 구형셀은 대공간 지붕구조를 형성하는 다른 격자형태보다 원주방향으로 현저한 강성의 주기성을

가진다고 보고된다.⁸⁾ <그림 2(b)>는 해석모델의 단면형상으로, b 는 격자부재의 단면폭, d 는 격자부재의 단면높이이며, L 은 격자의 대표부재길이를 나타낸다.



(a) 3차원 형상



(b) 단면형상

<그림 2> 본 연구의 해석모델

2.3 강성의 모델화

<그림 2>에서 보여지듯이 이산체를 연속체로 하여 해석하기 위하여 다방향 그리드(Grid)를 가지는 이산체에 대한 日置의 등가강성식⁷⁾을 이용하여 면내·외강성을 구한다.

우선, 2방향 그리드(Grid)를 가지는 면내등가강성식 K^{ijkl} 은 다음과 같다.

$$K^{ijkl} = \sum_{n=1}^2 K_n \cos^{8-i-j-k-l} \theta_n \cdot \sin^{i+j+k+l-4} \theta_n$$

$$K_1 = K_2 = \frac{EA}{L}, \quad \theta_1 = 0^\circ, \quad \theta_2 = 90^\circ \quad (1)$$

여기서, E 는 탄성계수, A 는 단면적, L 는 대표부재길이이다. 면내강성요소는 다음 식과 같다.

$$K^{1111} = \frac{1}{4} K(3 + \cos 4\theta)$$

$$\begin{aligned}
 K^{2222} &= \frac{1}{4} K(3 + \cos 4\theta) \\
 K^{1122} &= \frac{1}{4} K(1 - \cos 4\theta) \\
 K^{1212} &= K^{1122} \\
 K^{1112} &= \frac{1}{4} K \sin 4\theta \\
 K^{1222} &= -K^{1112}
 \end{aligned} \tag{2}$$

2방향 그리드(Grid)를 가지는 日置의 면외강성식 D^{ijkl} 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D^{ijkl} &= \sum_{n=1}^2 D_n^{ijkl} \\
 D_1 = D_2 &= \frac{EI}{L} = D, \quad T = \frac{GJ}{2L}
 \end{aligned} \tag{3}$$

여기서, E는 탄성계수, I는 단면2차모멘트, L는 대표부재길이이며, G는 전단탄성계수이고, J는 비틀림상수이다. 면외강성요소는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 D^{1111} &= D^{2222} = D - D_t + D_t \cos 4\theta \\
 D^{1112} &= D^{1211} = D_t \sin 4\theta \\
 D^{2212} &= D^{1222} = -D^{1112} \\
 D^{1122} &= D_t - D_t \cos 4\theta \\
 D^{1212} &= T + D_t - D_t \cos 4\theta
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서, $D_t = \frac{1}{4}(D - 2T)$

3. 해석프로그램의 정식화

3.1 기초방정식

3.1.1 변형도-변위 관계식

중립면의 변형 표현에서 비선형항을 가지고, 곡률의 변화에서는 선형을 가지는 근사 비선형 변형도-변위관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \\
 e_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\
 e_{r\theta} &= \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_r &= -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\
 \rho_\theta &= -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 \rho_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)
 \end{aligned} \tag{5}$$

3.1.2 응력-변형도 관계식

본 연구에서의 2방향 그리드(Grid)를 갖는 구형셀의 면내응력-변형도의 관계식은 다음 식과 같이 표현하는 것이 가능하다.

$$n_{ij} = K_{ij} \cdot e_{ij} \quad (i, j = 1 \sim 3) \tag{6}$$

면내강성요소(K_{ij} , $i, j = 1 \sim 3$)는 원주방향의 강성변화를 고려하여 다음과 같이 θ 의 계수로 하여 나타낸다.

$$K_{ij} = K(K_{ij1} + K_{ij2} \cos 4\theta + K_{ij3} \sin 4\theta) \tag{7}$$

여기서, K는 강성평가축이 축방향일 때, 즉 θ 가 0일 때의 대표프레임의 축강성으로 EA/L 이다.

그리고, 2방향 그리드(Grid)를 갖는 구형셀의 면외응력-곡률변화의 관계식은 다음 식과 같이 표현가능하다.

$$m_{ij} = D_{ij} \cdot \rho_{ij} \quad (i, j = 1 \sim 3) \tag{8}$$

면외강성요소(D_{ij} , $i, j = 1 \sim 3$)는 원주방향 θ 의 강성변화를 고려하여 다음과 같이 θ 의 계수로 하여 나타낸다.

$$D_{ij} = D(D_{ij1} + D_{ij2} \cos n\theta + D_{ij3} \sin n\theta) \tag{9}$$

여기서, D는 강성평가축이 축방향일 때, 즉 θ 가 0일 때의 대표프레임의 휨강성으로 EI/L 이다.

3.1.3 비선형 평형방정식

가상일의 원리를 이용하여 셀의 비선형 평형방정식을 유도한다. 응력합 및 부분적분을 이용하고, 고차항을 무시하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial r}(rn_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(n_{r\theta}) - n_\theta = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \theta}(n_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(m_{r\theta}) - n_{r\theta} = 0 \\
 & \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r m_r) + 2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(m_{r\theta}) - \frac{\partial}{\partial r}(m_\theta) \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(m_\theta) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(m_{r\theta}) + \frac{r}{R}(n_r + N_\theta) \\
 & + \frac{\partial}{\partial r}(r n_r \frac{\partial w}{\partial r} + n_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(n_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial r} \\
 & + n_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}) + q \cdot r = 0 \tag{10}
 \end{aligned}$$

3.2 기초방정식의 무차원화

3.1절에서 유도한 구형셀의 기초방정식을 해석의 편이를 위해서 이 절에서는 무차원화하여 서술한다. 경선방향 r의 좌표는 구형셀의 반경 a에 의해 무차원화된 $\xi = r/a$ 로 표시한다.

무차원화된 변형-변위관계식은 아래 식과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial \xi} - 2W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \\
 \epsilon_\theta &= \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{U}{\xi} - 2W + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \\
 \epsilon_{r\theta} &= \frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{V}{\xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \theta} \\
 \gamma_r &= - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \\
 \gamma_\theta &= - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \\
 \gamma_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \tag{11}
 \end{aligned}$$

그리고, 면내응력-변형도 관계식 및 면외응력-곡률변화 관계식은 다음과 같이 무차원화한다.

$$\begin{aligned}
 N_r &= C_{11}\epsilon_r + C_{12}\epsilon_\theta + C_{13}\epsilon_{r\theta} \\
 N_\theta &= C_{12}\epsilon_r + C_{22}\epsilon_\theta + C_{23}\epsilon_{r\theta} \\
 N_{r\theta} &= C_{13}\epsilon_r + C_{23}\epsilon_\theta + C_{33}\epsilon_{r\theta} \tag{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_r &= B_{11}\gamma_r + B_{12}\gamma_\theta + B_{13}\gamma_{r\theta} \\
 M_\theta &= B_{12}\gamma_r + B_{22}\gamma_\theta + B_{23}\gamma_{r\theta} \\
 M_{r\theta} &= B_{13}\gamma_r + B_{23}\gamma_\theta + B_{33}\gamma_{r\theta} \tag{13}
 \end{aligned}$$

여기서, $C_{ij} = K_{ij}/K$, $B_{ij} = D_{ij}/D$ 이다. 비선형 평형방정식은 응력-변형관계식을 대입하여 다음과 같은 무차원화한 평형방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi N_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{r\theta}) - N_\theta = 0 \\
 & \frac{\partial}{\partial \theta}(n_\theta) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi N_{r\theta}) + N_{r\theta} = 0 \\
 & \frac{4}{\lambda^4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\xi M_r) + \frac{8}{\lambda^4} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta}(M_{r\theta}) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}(M_{r\theta}) \right\} \\
 & + \frac{4}{\lambda^4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(M_\theta) + 2(N_r + N_\theta)\xi \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi}(\xi N_r \frac{\partial w}{\partial \xi} + N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(N_{r\theta} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\
 & + N_\theta \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \theta}) + 32 \frac{1}{\lambda^2} Q\xi = 0 \tag{14}
 \end{aligned}$$

여기서, Q는 q/q_0 이며, q_0 는 기준이 되는 좌굴하중값으로 $\frac{4}{R^2} \sqrt{KD}$ 이다. 그리고, λ 는 형상계수로써 $\frac{a}{\sqrt{R^2}} \sqrt[4]{\frac{K}{D}}$ 이다.

3.3 가정변위함수

이 절에서는 Galerkin법에 의하여 해석과정을 정식화함에 앞서 변위함수를 가정한다. 변위함수 W의 기저함수에 있어서 멱급수의 표현은 여러 가지 생각될 수 있으나, 원주방향파수 m_r 을 갖는 항에 대해서 $\xi^{m_r}(1-\xi^2)^2$ 되는 항을 시점으로써 최저차수항으로 하고, 순차 ξ^2 씩 차수를 올리는 방법을 선택하고 있다.

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_r \sum_g A_{rg}^w \xi^{r+2g-2} (1-\xi^2)^2 \cos r\theta \\
 V &= \sum_r \sum_g A_{rg}^v \xi^{r+2g-1} (1-\xi^2) \sin r\theta \\
 U &= \sum_r \sum_g A_{rg}^u \xi^{r+2g-1} (1-\xi^2) \cos r\theta \tag{15}
 \end{aligned}$$

여기서, A_{rg} 는 미정계수인 진폭, r은 원주방향 파수, g는 원주방향 파수에 관계되며 경선방향의 자유도를 넘히는데 관계된다. 이와 같은 가정변위함수는 $\xi = 1$ 일 때, 양단고정의 경계조건을 만족한다.

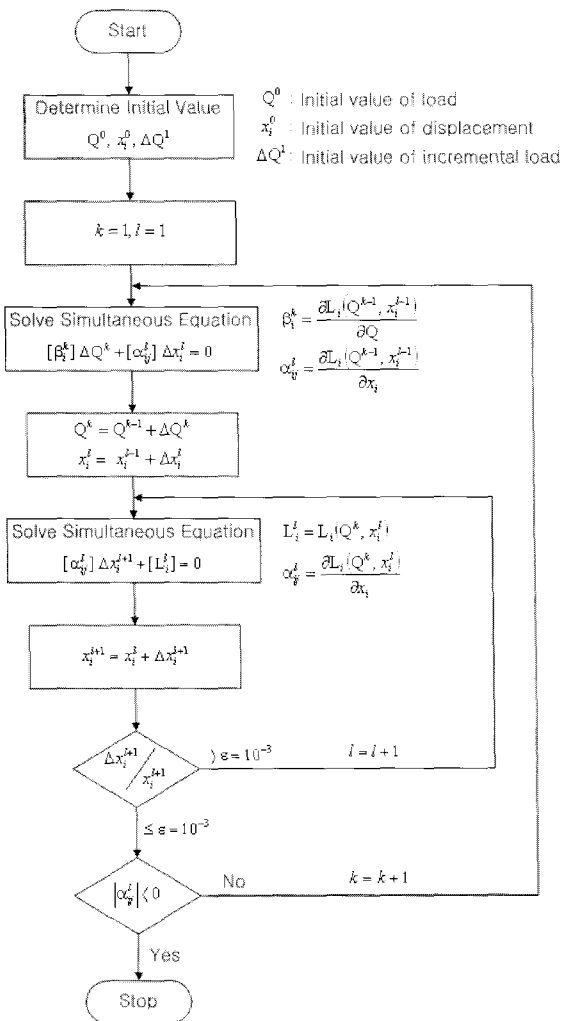
3.4 수치해석과정

Galerkin법에 의해 정식화한 방정식은 하중계수

Q를 변수에 포함하고 M개의 미정계수 A_{rg} 에 관한 연립방정식으로 주어진다. 수식의 구체적인 계산을 실행하기 위하여 미정계수 A_{rg} 의 2개의 첨자 r, g에 가상미지수 x_i 을 대응시켜 다음과 같은 방정식으로 표현한다.

$$L_i(Q, x_j) = \sum_j \sum_k \sum_l Y3_{ijkl} \cdot x_j \cdot x_k \cdot x_l + \sum_j \sum_k Y2_{ijk} \cdot x_j \cdot x_k + \sum_j Y1_{ij} \cdot x_j + Y0_i \cdot Q = 0 \quad (16)$$

식(16)에서, 하중증분 및 Newton-Raphson법의 반복 과정에 의하여 구속조건을 만족하는 방정식의 해인 미정계수 A_{rg} 및 하중 Q을 계산한다. <그림 3>은 수치해석과정의 흐름도를 나타낸다.



<그림 3> 수치해석과정의 흐름도

4. 해석결과

4.1. 등방성 구형셀

이 절은 3장에서 유도한 해석프로그램의 정식화 및 수치해석과정의 타당성을 검토하기 위하여 등방성 강성을 갖는 구형셀에 대해서 좌굴해석을 수행하고, Huang의 양단고정된 균일한 하중을 받는 구형셀의 축대칭 좌굴하중²⁾과의 비교를 하였다.

이와 같은 등방성 구형셀의 좌굴해석에 앞서, 면내응력-변형도 관계식의 면내강성요소의 표현인 식(7)과 면외응력-곡률변화 관계식의 면외강성요소의 표현인 식(9)에서, 원주방향으로 균일한 강성분포를 갖는 등방성 강성을 표현한다. 그 때의 면내등가강성계수 $C_{ijk}(k=1\sim 3)$ 와 면외등가강성계수 $B_{ijk}(k=1\sim 3)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{matrix} C_{111} = 1 & C_{112} = 0 & C_{113} = 0 \\ C_{121} = \nu & C_{122} = 0 & C_{123} = 0 \\ C_{131} = 0 & C_{132} = 0 & C_{133} = 0 \\ C_{221} = C_{111} & C_{222} = C_{112} & C_{223} = 0 \\ C_{231} = 0 & C_{232} = 0 & C_{233} = 0 \\ C_{331} = \frac{1}{2(1+\nu)} & C_{332} = 0 & C_{333} = 0 \end{matrix} \quad (17)$$

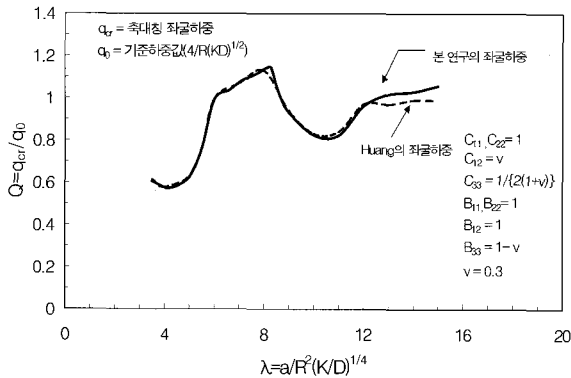
$$\begin{matrix} B_{111} = 1 & B_{112} = 0 & B_{113} = 0 \\ B_{121} = \nu & B_{122} = 0 & B_{123} = 0 \\ B_{131} = 0 & B_{132} = 0 & B_{133} = 0 \\ B_{221} = B_{111} & B_{222} = B_{112} & B_{223} = 0 \\ B_{231} = 0 & B_{232} = 0 & B_{233} = 0 \\ B_{331} = 1 - \nu & B_{332} = 0 & B_{333} = 0 \end{matrix} \quad (18)$$

여기서, $\nu = 0.3$ 으로 한다. 그리고, 식(15)의 가 정변위함수에서, 원주방향의 파수를 나타내는 r과 원주방향의 파수에 관계되며 경선방향의 자유도를 넓히기 위해 고려된 g는 각각 다음과 같이 한다.

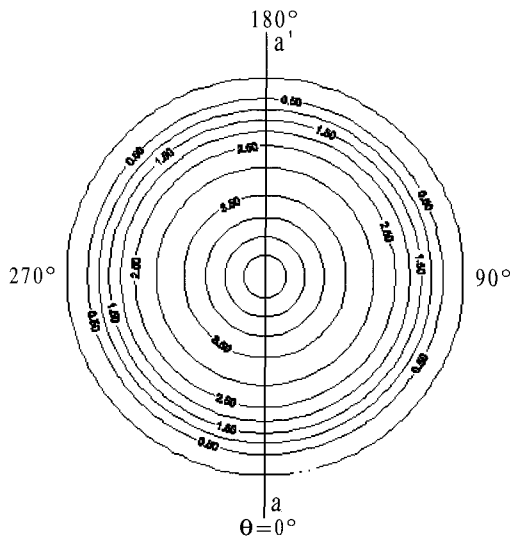
$$\begin{matrix} W\text{방향} \left\{ \begin{matrix} r=0 & \rightarrow & g=6 \\ r=4 & \rightarrow & g=4 \\ r=8 & \rightarrow & g=3 \end{matrix} \right. \\ U\text{방향} \left\{ \begin{matrix} r=0 & \rightarrow & g=9 \\ r=4 & \rightarrow & g=1 \\ r=8 & \rightarrow & g=1 \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

$$V\text{방향} \begin{cases} r=4 & \rightarrow & g=1 \\ r=8 & \rightarrow & g=1 \end{cases} \quad (19)$$

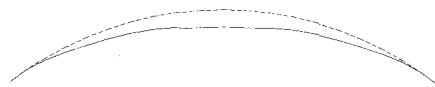
따라서, 식(17)~식(19)을 이용하여 등방성 구형셀의 좌굴해석을 수행하여 그 결과를 <그림 4>에 나타내었다. 그림은 등방성 구형셀의 형상계수 λ 에 따른 무차원화 좌굴하중을 나타낸다. 종축은 구형셀의 형상계수 λ 를 나타내며 횡축은 무차원화 좌굴하중 Q 을 나타낸다.



<그림 4> 양단고정 구형셀의 형상계수에 따른 무차원화 좌굴하중 (Q)



(a) 변형분포



(b) $\theta = 0^\circ$ 의 변형단면

<그림 5> 등방성 구형셀의 변형모드 ($\lambda=8$)

<그림 4>에서 보여지듯이 $\lambda < 12$ 일 경우에는 양단 고정된 균일한 분포하중을 받는 Huang의 무차원 좌굴하중과 거의 동일한 값이 구해지지만, $\lambda > 12$ 일 경우에는 Galerkin법의 정도문제 등으로 그 값에서 다소 차이가 발생한다. 그러나, 정상적인 셀 형태에서 이와 같은 정밀도로 Huang식과 일치함으로써 프로그램의 타당성이 입증되었다.

<그림 5>는 균일한 외압을 받는 양단고정된 형상계수 (λ)가 8인 등방성 구형셀의 변형모드를 나타낸다. <그림 5(a)>는 면의방향의 변형을 원주방향(θ)로 동일한 변위를 갖는 위치를 연결한 선, 즉 등고선 형식으로 나타내고, <그림 5(b)>는 θ 가 0° 일 때의 구형셀 단면의 변형모드를 표시한다. 여기서, 점선은 구형셀의 형상을 나타내고, 실선은 구형셀의 변형모드를 나타내고 있다. <그림 5>에서 보여지듯이 동일한 경선방향의 거리에 대해서 원주방향으로 균일하게 하방향으로 변형이 발생하고 있다.

4.2 강성분포가 주기성을 갖는 구형셀

이 절은 <그림 2>에서 보여지는 강성분포의 주기성을 갖는 구형셀, 즉 2방향 그리드(Grid)를 갖는 구형셀에 대해서 3장에서 유도한 프로그램에 의해 좌굴해석을 수행하여 좌굴하중과 변형분포에 중점을 둔 좌굴특성을 파악한다.

2방향 그리드(Grid)를 갖는 구형셀의 좌굴해석에 앞서, 면내응력-변형도 관계식과 면외응력-곡률변화 관계식에서의 면내·외 등가강성계수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{111} &= \frac{3}{4} & C_{112} &= \frac{1}{4} & C_{113} &= 0 \\ C_{121} &= \frac{1}{4} & C_{122} &= -\frac{1}{4} & C_{123} &= 0 \\ C_{131} &= 0 & C_{132} &= 0 & C_{133} &= \frac{1}{4} \\ C_{221} &= C_{111} & C_{222} &= C_{112} & C_{223} &= 0 \\ C_{231} &= 0 & C_{232} &= 0 & C_{233} &= -\frac{1}{4} \\ C_{331} &= \frac{1}{4} & C_{332} &= -\frac{1}{4} & C_{333} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 B_{111} &= D - D_t & B_{112} &= D_t & B_{113} &= 0 \\
 B_{121} &= D_t & B_{122} &= -D_t & B_{123} &= 0 \\
 B_{131} &= 0 & B_{132} &= 0 & B_{133} &= D_t \\
 B_{221} &= B_{111} & B_{222} &= B_{112} & B_{223} &= 0 \\
 B_{231} &= 0 & B_{232} &= 0 & B_{233} &= -D_t \\
 B_{331} &= T + D_t & B_{332} &= -D_t & B_{333} &= 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

그리고, 식(15)의 가정변위함수에서, 원주방향의 파수를 나타내는 r 과 원주방향의 파수에 관계되며 경선방향의 자유도를 넓히기 위해 고려된 g 는 각각 다음과 같이 한다.

$$\begin{aligned}
 \text{W방향} & \begin{cases} r=0 & \rightarrow & g=6 \\ r=4 & \rightarrow & g=4 \\ r=8 & \rightarrow & g=3 \end{cases} \\
 \text{U방향} & \begin{cases} r=0 & \rightarrow & g=9 \\ r=4 & \rightarrow & g=6 \\ r=8 & \rightarrow & g=4 \end{cases} \\
 \text{V방향} & \begin{cases} r=4 & \rightarrow & g=6 \\ r=8 & \rightarrow & g=4 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{22}$$

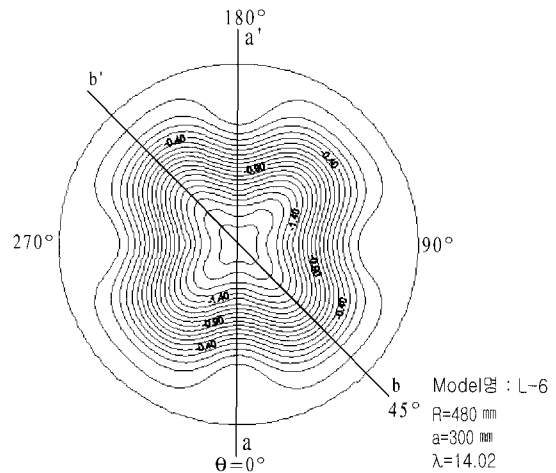
따라서, 식(20)과 식(21)의 강성분포의 주기성을 갖는 구형셀의 면내·외 등가강성계수와 식(22)의 가정변위함수를 이용하여 좌굴해석을 수행한다.

본 해석프로그램의 타당성 검토를 위해서 <표 1>에서 보여지듯이 동일한 형상에 대해서 4종류의 부재모델에 대한 기존문헌⁸⁾의 실험 및 프레임 해석결과와의 비교를 한다. 표에서 R 은 곡률반경, b 는 부재단면폭, d 는 부재단면높이, L 은 부재길이이고, q_{CE} 와 q_{CF} 는 기존문헌⁸⁾의 실험 및 프레임 해석에 의한 좌굴하중이며, q_{CP} 는 강성분포의 주기성을 갖는 구형셀의 좌굴해석에서 무차원화한 좌굴하중 Q 에 기준하중값 q_0 을 곱한 값 즉 $Q \times q_0$ 에 의해 얻어진 좌굴하중이다. <표 1>에서 알 수 있듯이 본 논문에서 개발한 해석프로그램의 결과(q_{CP})는 기존의 해석결과보다 0.012~0.029 g/mm² 정도의 높은 값을 보이지만 그 차이가 미비하여 거의 근사한 값을 보이고 있다.

<표 1> 기존의 해석결과와의 비교

R (mm)	a (mm)	b (mm)	d (mm)	L (mm)	q_{CE} (g/mm ²)	q_{CF} (g/mm ²)	q_{CP} (g/mm ²)
480	300	5.25	3.3	81	0.204	0.211	0.216
480	300	4.20	3.3	65	0.198	0.201	0.211
480	300	3.50	3.3	54	0.181	0.191	0.206
480	300	3.00	3.3	46	0.172	0.181	0.201

R : 곡률반경, a : 저면반경, b : 부재단면폭, d : 부재단면높이, L : 대표부재길이
 q_{CE} : 기존문헌⁸⁾의 실험에 의한 좌굴하중
 q_{CF} : 기존문헌⁸⁾의 프레임 해석에 의한 좌굴하중
 q_{CP} : $Q \times q_0$ 에 의한 좌굴하중



(a) 변형분포



(b) 변형단면 ($\theta = 0^\circ$)



(c) 변형단면 ($\theta = 45^\circ$)

<그림 6> 강성분포가 주기성을 갖는 구형셀의 변형분포 및 변형모드($b=3.0$ 및 $d=3.3$ 일 때)

<그림 6>은 강성분포가 주기성을 갖는 구형셀 ($b=3.0$ 및 $d=3.3$ 일 때)의 면외방향의 변형분포(a) 및 θ 방향이 0° 축(b) 및 45° 축(c)의 변형모드를 나타낸다. <그림 6>의 표현방법은 <그림 5>와 동일하다.

<그림 6(a)>에서 보여지듯이 등방성 구형셸의 경우와 달리 돔의 정점이 \ominus 방향의 솟아오르는 원주방향으로 4파의 주기성을 가지는 변형모드를 가지는 것을 알 수 있다. <그림 6(a)>의 a-a'단면, 즉 θ 방향이 0° 일 때의 변형모드<그림 6(b)>는 ξ 방향에 대해서 돔의 중앙부를 경계로 하여 정점이 상방향이고 경계가 하방향인 돔의 직경에 대해 미소하지만, 1.5 파의 모드를 표현하고 있다. 그리고, b-b'단면, 즉 θ 방향이 45° 일 때의 변형모드<그림 6(c)>은 돔의 정점이 상방향이고, 경계부분에서 거의 변형이 발생하지 않고 있다.

5. 결론

본 논문은 대공간 구조물의 구형지붕 격자형태에 의해 나타나는 지붕강성분포의 주기성을 모델화하여 구형셸의 비선형 적합방정식에 Galerkin법을 적용하여 정식화한 구조해석 프로그램을 개발하였으며, 개발된 프로그램에 의해 얻어진 등방성 구형셸 및 2방향 그리드(Grid)를 갖는 격자셸의 좌굴하중 및 변형분포는 기존의 연구^{2),8)}와의 비교에 의하여 그 신뢰성을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

1. Brush, D. O. and Almroth, B. O., Buckling of Bars, Plates, and Shells, McGraw-Hill, 1975
2. Huang, N. C., "Unsymmetric Buckling of Thin Shallow Spherical Shells", J. Appl. Mech., vol. 31, 1964, pp.447-457
3. Teng, J. G., "Buckling of thin shells:Recent advances and trends", Appl. Mech. Rev., vol. 49, no. 4, April 1996, pp.263-274
4. Yamada, M., "An approximation of the buckling analysis of orthogonally stiffened and framed spherical shells under external pressure", Proceedings of the IASS Symposium on Shell and Spatial Structures, Rio de Janeiro, 1984, pp.173-193
5. 山田大彦, "單層ラチスド-ムの安定解析-その現状と問題占- 4章. 連續體近似による單層ラチスド-ムの座屈耐力評價について", 日本建築學會シェル空間構造運營委員會,1989, pp.191-254
6. 山田大彦, "補剛扁平球殼の外壓による座屈とその近似解析法に關する研究 I", 日本建築學會學術講演講梗概集, 昭和54年, pp.943-944
7. 日置興一郎, 스페스프레-ム(立體格子構造)의設計·解析·施工, 昭和57年度文部省科學研究費補助金 總合研究(B) 研究報告書, 1983
8. 鄭煥穆, 四角形ネットワーク單層ラチスド-ムの座屈特性に關する研究, 東北大學博士學位論文, 1992
9. 이수곤, 곡면구조론-제1권 막이론, 전남대학교출판부, 1989
10. 정환목, SPACE FRAME 구조물의 구조해석, 설계 및 시공 - 제2부 스페이스 프레임 구조물의 구조적 특성과 안정문제, 한국전산구조공학회, pp.73-131, 1995
11. 권택진, 셸 구조론, 한국전산구조공학회, 1998