

불규칙 진동을 받는 복합 적층보의 응력 및 파괴해석

Random Vibration Analysis of Composite Laminated Beams

전 용 선* 강 주 원**
Jeon, Yong-Sun Kang, Joo-Won

Abstract

The responses of composite laminated beams modeled with finite element and excited by stochastic loading are studied. The cantilevered laminated beam having a 5 ply configuration is considered. The beam is 1m long, 0.1m wide, and 0.02m thick, yielding a length to thickness ratio of $L/h=50$. The laminated beams was assumed to be made of Born Epoxy. The four nodes at the free end of the cantilever were loaded with identical zero-mean white noise excitations. Stress and failure analysis loaded with identical zero-mean white noise excitations is carried out. Along with the obtained results, comparison and discussion are presented for the cases of symmetric-ply, antisymmetric-ply, angle-ply, and cross-ply laminated beams.

keywords : Composite Laminated Beams, White Noise Excitations, Stress and Failure Analysis

1. 서 론

복합재료란 성분이나 형태가 다른 두 종류 이상의 소재가 거시적으로 조합되어 유효한 기능을 갖는 재료를 일컫는다. 그러나 두 종류 이상의 재료가 미시적으로 조합되어 거시적으로 균질성을 갖는 합금들은 복합재료라 하지 않으며, 복합재료는 구성소재들 사이에 거시적으로 경계면을 가지고 있다는 점이 합금과 다르다. 복합재료의 구성요소로는 섬유(fiber), 입자(particle), 층(lamina), 모재(matrix) 등이 있으며, 이러한 요소들로 구성된 복합재료는 일반적으로 층상 복합재료, 입자강화 복합재료, 섬유강화 복합재료 등으로 구분할 수 있다.

특히, 섬유강화 복합재료는 치수 안정성, 피로특성, 비강도 및 비강성 등에서 우수한 기계적 성질을

가지고 있다. 따라서 여러 구조물에 응용되고 있으며, 특히 경량화가 요구되는 항공기에 주로 사용되고 있다. 또한 섬유강화 복합재료는 적층판 각 층의 두께와 섬유방향, 그리고 적층 순서를 결정할 수 있는 이방성 재료의 특성을 가지고 있기 때문에 설계자의 요구조건에 적합한 특성을 갖도록 구조 요소를 설계, 제작할 수 있다는 장점이 있다.

최근 건축 및 토목분야에서의 복합재료의 사용이 점진적으로 증가되고 이에 따른 구조 부재요소의 거동해석이 필요하다. 아울러 현재 많이 해석되어지고 있는 확정적인 동하중을 구조물에 가하는 해석보다 현실적이고 랜덤한 동하중에 대한 해석의 요구가 높아지고 있다. 그러므로 본 연구에서는 랜덤한 동하중을 받는 적층보의 응력해석을 수행한 후 파괴해석을 수행하여 구조물 설계에 새로운 결과를 제시하고자 한다.

* 학생회원 · 영남대학교 건축공학과 석사과정

** 정회원 · 영남대학교 건축학부 조교수

※ 이 논문은 2001학년도 영남대학교 학술연구조성비 지원에 의한 것임.

2. 유한요소 해석

2.1 유한요소 정식화

2.1.1 보요소

한 개의 적층보에 대해 살펴보면 변위함수는 다음과 같이 가정된다.

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^4 \quad (1)$$

a_1, a_2, a_3, a_4 는 보의 양단의 절점의 경계조건에서 얻어진다.

$$v(x) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

N_1, N_2, N_3, N_4 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{L^3}(2x^3 - 3x^2L + L^3) \\ N_2 &= \frac{1}{L^3}(x^3L - 2x^2L^2 + xL^3) \\ N_3 &= \frac{1}{L^3}(-2x^3 + 3x^2L) \\ N_4 &= \frac{1}{L^3}(x^3L - x^2L^2) \end{aligned} \quad (3)$$

절점과 보이론의 부호규약 관계로부터 양 지점의 전단력과 모멘트를 F, M 으로 표현하면

$$\begin{aligned} F_1 &= EIv'''(0) \\ F_2 &= -EIv'''(L) \\ M_1 &= -EIv''(0) \\ M_2 &= EIv''(L) \end{aligned} \quad (4)$$

위의 식을 이용하여 행렬형태로 바꾸면 아래와 같고,

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

위의 행렬식을 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$\{F\} = [k]\{d\} \quad (6)$$

2.1.2 유한요소법을 이용한 진동해석

유한요소를 이용한 진동 해석은 다음과 같은 동적 지배 방정식으로부터 출발한다.

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = f \quad (7)$$

여기서 M 은 질량 행렬, C 는 감쇠 행렬, K 는 강성 행렬, f 는 하중 벡터, y 는 변위 벡터를 의미한다.

식 (7)의 해는 시간이 지남에 따라 무수히 많은 경우의 응답 특성을 계산해야 하는 단점이 있어서 분명히 비현실적이다. 진동과 같은 공학적 해석에서는 일정 형태의 입력에 대한 동적 특성을 계산하기 위하여 고유치 해석(Eigenvalue Analysis)을 수행하며 고유치 문제는 식 (7)에서 감쇠 계수 C 가 0이며 외력 f 가 0인 경우를 말한다.

유한 요소 모델의 각 절점에서의 운동은 그 절점의 최대 진폭의 정현함수로 표현된다고 가정한다면

$$\begin{aligned} y &= a \sin(\omega t) \\ \dot{y} &= a \omega \cos(\omega t) \\ \ddot{y} &= -a \omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)을 식 (7)에 대입하면

$$(K - \lambda M)a = 0 \quad (9)$$

이 되며 이는 고유치 문제가 된다. 여기서

$$\lambda = \omega^2 \quad (10)$$

λ 는 고유치(eigenvalue)라 부르며 각 고유치에 대응하는 진폭을 고유 벡터(eigenvector) 또는 모드 형태(mode shape)라 부른다. 그리고 고유 진동수는

$$f_n = \frac{\omega}{2\pi} \quad (11)$$

이다.

유한요소 모델에서 독립된 고유치의 개수는 모델에서의 총 자유도와 일치하며 모드 형태 벡터는 각 고유치의 방향과 일치하는 방향 벡터로 표현되므로 모드 벡터는 영 벡터가 될 수 없다. 따라서 식 (10)은 유용해를 가져야 하므로 그 조건은 다음과 같다.

$$|K - \lambda M| = 0 \tag{12}$$

위 식은 고유치 λ 의 다항식으로 표현되며 이를 풀면 고유치가 얻어지며 그리고 각각의 고유치를 식 (9)에 대입하여 고유 벡터를 얻어낼 수 있다. 또한 이 고유치는 유한 요소 모델의 각 자유도에 대한 고유 진동수가 된다. 그러나 일반적으로 진동평가에서는 많은 고유 진동수 중 작은 몇 개의 고유 진동수만을 이용한다.

2.2 복합재료 적층보 이론

순수휨을 받는 적층보 이론은 재료역학의 Bernoulli-Euler 이론으로부터 발전된 것으로 이 이론의 적용이 꽤 제한되지만 더 일반적인 고전적층이론을 자연스럽게 소개해 준다.

여기에 묘사된 이론은 Pagano의 해석에 기초하고 있으며 휨모멘트 M을 받는 순수휨 상태의 층이 h이고 폭이 b인 직사각형 단면의 적층보가 그림 1에 있으며 그 해석개발에 사용된 가정 5가지를 살펴보면 다음과 같다.

가정 1. 처음에 보의 길이축에 수직인 평면은 휨을 받는 동안 여전히 수직이고 평면으로 남는다.

가정 2. 보는 중립축에 대해 기하학적, 재료적 특성이 대칭이다. (즉 각층들은 xy평면에 대해 대칭적으로 배열되어져 있다.)

가정 3. 각 층은 선형탄성이고 전단연결은 갖지 않는다. (즉, 플라이의 적층각들은 0° 또는 90°이다.)

가정 4. 각 층들은 완전히 접촉되어져 있어서 층의 접촉면에서 슬립이 생기지 않는다.

가정 5. 응력요소는 단지 σ_x 만 존재한다.

가정 1에 의해서 중립면으로부터 z의 거리에 있는

종방향 수직변형은 아래와 같이 주어진다.

$$\epsilon_x = \frac{(\rho + z)\Phi - \rho\Phi}{\rho\Phi} = \frac{z}{\rho} \tag{13}$$

여기서 ρ = 휨을 받는 동안의 중립축의 곡률반경

Φ = 그림 1에 정의된 각

z = xy평면에 의해 정의되는 중립면으로부터의 거리

가정 3으로부터 j번째 플라이의 횡방향응력은 아래와 같다.

$$(\sigma_x)_j = (E_x)(\epsilon_x)_j \tag{14}$$

여기서 $(E_x)_j$: x방향에 따른 j번째 플라이의 영계수

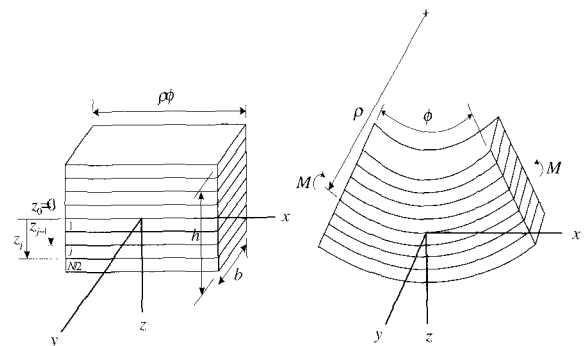
$(\epsilon_x)_j$: x방향에 따른 j번째 플라이의 횡방향 변형

식(13)과 (14)로부터 종방향 응력은 다음과 같다.

$$(\sigma_x)_j = (E_x)_j \frac{z}{\rho} \tag{15}$$

정적평형으로부터 휨모멘트 M은 길이방향의 응력으로부터 다음과 같다.

$$M = 2 \int_0^{h/2} \sigma_x z b dz \tag{16}$$



<그림 1> 적층보의 휨모멘트를 받기 전과 후의 모습

여기서는 가정 2가 사용되었다. 식(15)을 (16)에 대입하게 되면

$$M = \frac{2b}{3\rho} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (z_j^3 - z_{j-1}^3) \quad (17)$$

여기서 N은 플라이의 수이고, z_j 는 중립면으로부터 j 번째 플라이의 바깥면까지의 거리이다. 균일한 두께의 짝수의 플라이에 대해서는 $z_j = jh/N$ 이므로 식(17)는 아래와 같이 된다.

$$M = \frac{2bh^3}{3\rho N^3} \sum_{j=1}^{N/2} (E_x)_j (3j^2 - 3j + 1) \quad (18)$$

식(18)은 플라이가 짝수일 경우, 각각의 플라이를 원래 플라이의 두께의 반인 동일한 2개의 플라이로 나누어서 사용한다.

동질성에 대해 상기하면 등방성보의 모멘트 곡률 관계는 아래와 같이 주어진다.

$$M = \frac{E_f I_{yy}}{\rho} = \frac{E_f bh^3}{12\rho} \quad (19)$$

여기서, $I_{yy} = \int z^2 dA = \frac{bh^3}{12}$ 는 중립축(y축)에 대한

단면2차모멘트

A = 단면적

E_f = 보의 유효휨계수 (동질성, 등방성 보에 대한 보 재료의 영계수)

j번째 플라이에서 응력에 대한 다른 표현은 식 (15)과 (19)을 결합하여 곡률반경을 제거함으로써 다음을 얻을 수 있다.

$$(\sigma_x)_j = \frac{M}{E_f I_{yy}} (E_x)_j z = \frac{Mz}{I_{yy}} \left[\frac{(E_x)_j}{E_f} \right] \quad (20)$$

따라서, 대괄호 안의 항은 수정항으로 생각될 수 있으며 유사 동질등방성보의 응력, Mz/I_{yy} 로 곱해지면 적층보의 j 번째 응력을 구할 수 있다.

3. 복합 적층보의 파단이론

3.1 최대 응력 이론

최대 응력 이론은 플라이의 응력을 플라이 축에

대해서 나타냈을 때 다음과 같은 범위 내만 적층판의 플라이가 안전하다는 이론이다.

$$X^c < \sigma_1 < X^t \quad (21)$$

여기서, X^t, X^c 는 각각 판의 물질 대칭 방향에 대한 종방향 압축, 인장강도이다.

일방향 플라이가 섬유 방향이 적층판의 축 x에 대하여 θ 만큼 기울어져 있을 경우에, 일방향 플라이에 대해 x-방향으로 σ_x 를 가했을 때의 플라이 응력은 다음과 같이 표시되며

$$\sigma_1 = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta \quad (22)$$

복합재료의 최대 응력을 구하기 위해 식 (21)을 식(22)에 대입하면 아래와 같은 식을 구할 수 있다.

$$\frac{X^c}{\cos^2 \theta} < \sigma_x < \frac{X^t}{\cos^2 \theta} \quad (23)$$

3.2 최대 변형률 이론

최대 변형률 이론은 플라이의 변형률을 플라이 축에 나타냈을 때 다음과 같은 범위 내만 적층판의 플라이가 안전하다는 이론이다.

$$\begin{aligned} \epsilon^{Lc} < \epsilon_1 < \epsilon^{Lt} \\ \epsilon^{Tc} < \epsilon_2 < \epsilon^{Tt} \end{aligned} \quad (24)$$

$$-\gamma^{LT} < \epsilon_3 < \gamma^{LT}$$

여기서 $\epsilon^{Lc}, \epsilon^{Lt}, \epsilon^{Tc}, \epsilon^{Tt}, \gamma^{LT}$ 는 각각 물질 대칭 방향에 대한 종방향, 횡방향 압축, 인장 그리고 전단 변형률이다.

변형률을 복합재료의 최대 응력항으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{X^c}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} < \sigma_x < \frac{X^t}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} \\ \frac{Y^c}{\sin^2 \theta - \nu_{12} \cos^2 \theta} < \sigma_x < \frac{Y^t}{\sin^2 \theta - \nu_{12} \cos^2 \theta} \\ -\frac{S}{\sin \theta \cos \theta} < \sigma_x < \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned} \quad (25)$$

4. 불규칙 진동

스펙트럼밀도함수가 진동수 범위내에서만 0이 아닌 값을 갖는 진동을 협대역 진동이라 부른다. 이와는 대조적으로 광대역 진동은 스펙트럼밀도함수가 광대역 진동수 범위에 걸쳐 0이 아닌 값을 갖는 진동이다. 이때 이와 같은 진동의 시간이력은 전 진동수대역의 중첩으로 이루어져 있다. 극한값으로 진동수대역이 $\omega_1 = 0$ 으로부터 $\omega_2 = \infty$ 까지 확대될 때 이와 같은 스펙트럼을 백색잡음이라 부른다.

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (26)$$

식(26)로부터 백색 잡음의 제곱평균은 무한대이어야 한다. 그러므로 백색 잡음진동은 단지 이론적인 개념일 뿐이다. 실제로 진동수대역폭이 주된 관심사가 되는 진동수를 훨씬 초과할 때의 진동을 백색 잡음진동(white noise process)이라 부른다.

5. 예제 적용 및 비교 분석

적층보의 해석모델은 5개의 층에 대해서 길이 1m, 폭 0.1m, 두께 0.02m의 크기의 적층된 FRP Beams를 유한요소 해석을 수행하기 위해서 3개의 요소로 나누어 불규칙 진동 해석을 위한 가진은 캔틸레버보의 자유단쪽에 하중을 주는 모델링을 했다.

적층순서는 대칭형 및 비대칭형의 경우는 $\pm 30^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 60^\circ$ 그리고 Cross형, Angle형의 경우로 나누어서 해석을 하였다.

섬유강화 복합재료는 Boron/Epoxy Narmco 5505 이고 댐핑비는 0.02%이다.

불규칙 진동해석을 위해 구조시스템은 확정론적이고 선형해석으로 가진은 Gaussian Random Process 로 가정하여 가진레벨은 $10 N^2 \cdot sec$ 이다.

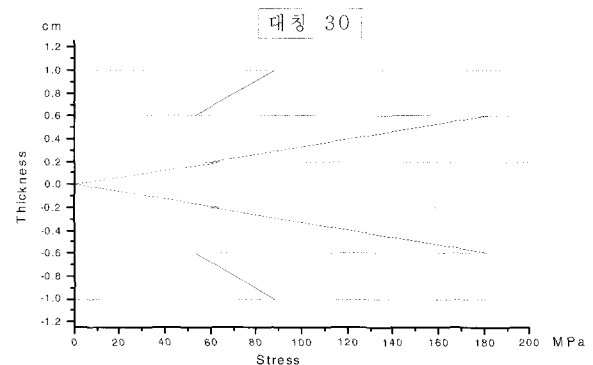
복합재료 Boron/Epoxy Narmco 5505의 재료적 특성은 아래와 같다.(Kommineni and Kant 1993)

- 섬유방향의 탄성계수 = 205 GPa

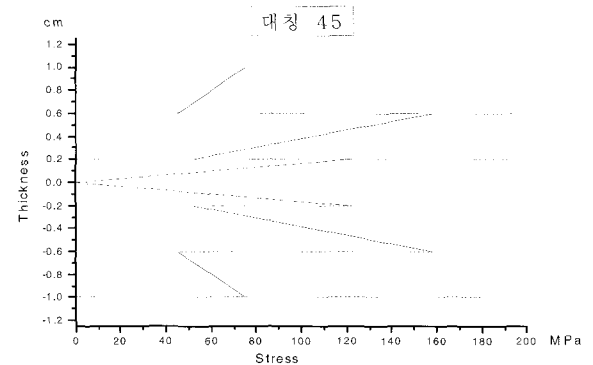
- 섬유수직방향의 탄성계수 = 19 GPa
- 평면 전단 탄성계수 = 6 GPa
- 밀도 = 2000 kg/m^3
- 12 방향 푸아송비 = 0.225
- 섬유방향 인장 강도 = 1586 MPa
- 섬유 수직방향 인장강도 = 62.7 MPa
- 섬유방향 압축강도 = 2482 MPa
- 섬유 수직방향 압축강도 = 241 MPa
- 평면 전단강도 = 82.7 MPa

5.1 응력해석 및 동해석

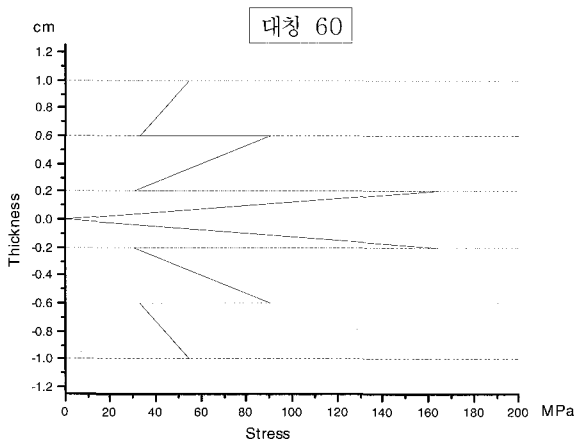
중립축에서 응력이 0으로 나타나고, 중립축을 중심으로 대칭적인 형상을 나타내고 있다. 동질 등방성보와 같이 끝단에서 응력이 가장 큰 경우는 비대칭 30, 비대칭 45, Cross의 세 경우이고, 다른 경우에는서는 내부 플라이에서 최대응력이 발생하고 있다.



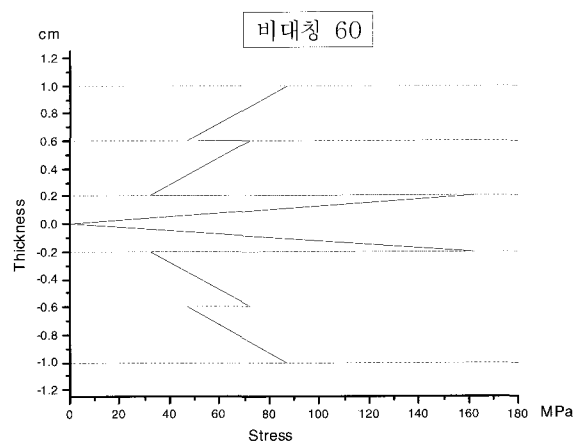
<그림 2> 30° /-30° /0° /-30° /30° 의 층별 응력 분포



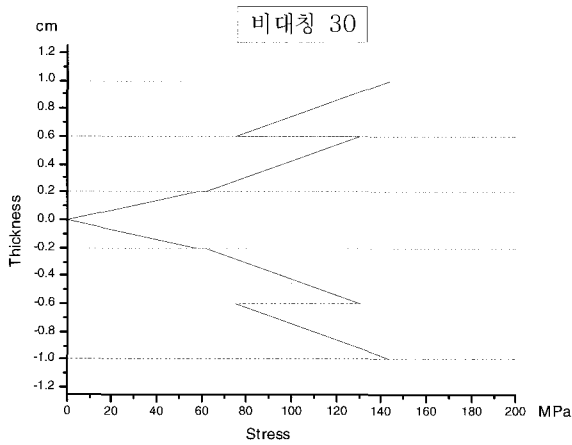
<그림 3> 45° /-45° /0° /-45° /45° 의 층별 응력 분포



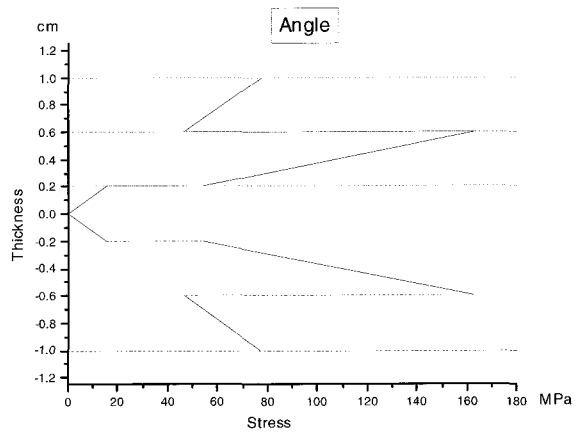
〈그림 4〉 60° /-60° /0° /-60° /60° 의 층별 응력 분포



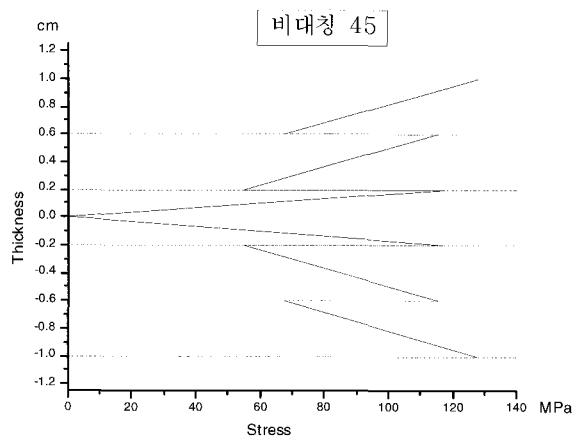
〈그림 7〉 60° /-60° /0° /60° /-60° 의 층별 응력 분포



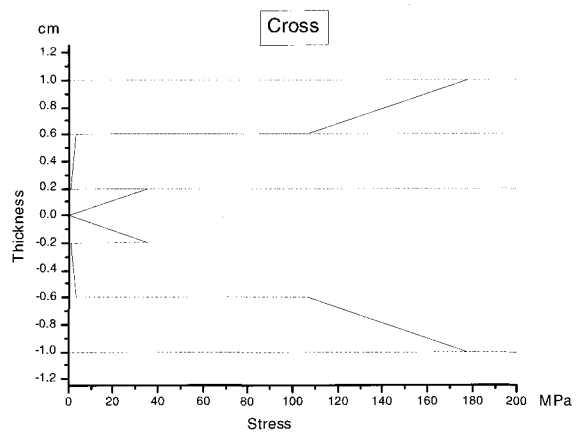
〈그림 5〉 30° /-30° /0° /30° /-30° 의 층별 응력 분포



〈그림 8〉 45° /-45° /45° /-45° /45° 의 층별 응력 분포



〈그림 6〉 45° /-45° /0° /45° /-45° 의 층별 응력 분포



〈그림 9〉 0° /90° /0° /90° /0° 의 층별 응력 분포

〈표 1〉 5-layer 고유주파수 (Hz)

Mode	대칭			Angle
	30	45	60	
1	19.63	12.6	10.54	12.23
2	125.5	82.94	67.32	80.84
3	252.76	235.32	187.19	229.94
4	355.74	269.63	238.76	286.78
5	459.46	491.27	423.05	492.11
Mode	비대칭			Cross
	30	45	60	
1	20.84	12.84	10.59	29.72
2	133.39	85.18	67.85	150.48
3	247.2	237.18	187.70	182.78
4	380.93	269.96	237.64	186.89
5	469.59	529.66	464.42	529.15

고유주파수는 대칭, 비대칭에 관계없이 섬유방향에 영향을 많이 받고 있으며, 적층각이 증가함에 따라 감소하는 경향을 나타내고 있으며, 섬유방향이 60° 일 때 약 10.5Hz 정도로 가장 낮은 주파수를 나타내고 있고, 30° 일 때 약 20Hz 정도를 나타내고, Cross일 경우 가장 높은 29.72Hz를 나타내고 있다.

아래의 표는 각 경우에 대한 끝단의 최대변위와 최대응력을 나타내고 있다. 최대변위는 대칭, 비대칭형 모두 적층각이 증가함에 따라 변위가 증가하지만, 최대응력의 경우는 적층각과 비례관계를 갖지 않고 있다. 변위가 가장 크게 나타난 경우는 대칭 60° 의 15.48cm 이고, 응력이 가장 크게 나타난 것은 대칭 30° 의 182MPa이다.

〈표 2〉 5-layer 최대변위와 최대응력

Laminated Sequence	Max. Deflection (cm)	Max. Stress (MPa)
대칭	30	6.29
	45	12.43
	60	15.48
비대칭	30	5.62
	45	12.06
	60	15.4
Angle	13.05	163.13
Cross	3.12	177.56

5.2 파괴해석

5.2.1 각 층의 파괴응력값

〈표 3〉 5-layer 파손이론에 의한 파괴응력값

	최대 응력 이론	최대 변형률 이론
Laminated Sequence	σ_x (MPa) - failure	σ_x (MPa) - failure
0	1586.00	1586.00
±30	190.99	190.99
±45	125.40	128.08
±60	83.60	84.19
90	62.70	62.70

5.2.2 5-Layer에 대한 각 층의 파괴여부

각 층별 응력분포에서의 최대응력값과 파괴응력값을 비교하여 파괴 해석을 수행한 결과 최대 응력 이론을 적용한 경우와 최대 변형률 이론을 적용한 두 가지 경우 모두 대칭 30, 비대칭 30, Cross는 파괴에 대해서 안전하고 대칭 45, 비대칭 45는 모든 -45° 층에서 파괴가 발생하고 대칭 60, 비대칭 60은 모든 -60° 층에서 파괴가 발생하고 Angle은 모든 -45° 층에서 파괴가 발생하는 것으로 나타났다.

6. 결 론

다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 대칭형, 비대칭형에서는 적층각과 고유주파수의 관계를 살펴보면 적층각이 증가함에 따라 고유주파수가 감소함을 볼 수 있다.
2. 대칭 및 비대칭형에서 적층각과 변위와의 관계를 살펴 보면 적층각이 증가함에 따라 변위값이 증가함을 알 수 있다.
3. 적층수가 5개인 경우는 적층각이 증가함에 따라 최대변위는 증가하지만, 최대응력은 대칭 30° 에서 최대응력이 나타나지만 최소응력은 비대칭 45° 에서 나타난다.
4. 파괴해석 수행을 한 결과 적층각에 따른 파괴상태시 응력값이 최대 응력 이론과 최대 변형률 이론을 비교하면 0°, ±30°, 90° 층은 같고 ±45°

- $\pm 60^\circ$ 층은 조금 차이가 났다.
5. 적층수가 5개인 경우는 최대 응력 이론을 적용한 경우 대칭 30, 비대칭 30, Cross는 파괴에 대해서 안전하고 대칭 45, 비대칭 45는 모든 -45° 층에서 파괴가 발생하고 대칭 60, 비대칭 60은 모든 -60° 층에서 파괴가 발생하고 Angle은 모든 -45° 층에서 파괴가 발생하는 것으로 나타났다.
 6. 최대 변형률 이론도 최대 응력 이론과 마찬가지로 5개 층에 대해서 모두 같은 파괴상태를 나타냈다.

참 고 문 헌

1. Robert D. Cook, Finite Element Modeling For Stress Analysis, Wiley, 1995, p.320
2. Mario Paz, Structural Dynamics Theory and Computation, Chapman and Hall, 1997, p.948
3. Ronald F. Gibson, Principles of Composite Material Mechanics, McGraw-Hill, 1994, p.425
4. Hashin, Z., "Failure Criteria For Unidirectional Fiber Composites," Journal of Applied Mechanics, 47, 329-334, 1980
5. F. L. Matthews and R. D. Rawling, Composite Materials : Engineering and Science, Chapman and Hall, 1994, p.470
6. Fuh-Gwo Yuan and Robert E. Miller, "A New Finite Element for Laminated Composite Beams", Computer & Structures, Vol.31, No.5, 1989, pp. 737-745
7. Chan, Yiu Mo Patton, "Laminated Beam Theory Based on Homogenization", Dissertation for the Degree of Ph.D. University of Toronto, 2000
8. 김영찬, "Layerwise 이론을 이용한 적층보의 선형 및 파괴해석", 전산구조공학 제9권 제4호, 1996. 12