

一般逆行列을 이용한 케이블네트 構造物의 形狀決定에 관한 研究

A Study on the Shape Finding of Cable-Net Structures Introducing General Inverse Matrix

서삼열* 이장복**
Sur, Samuel Lee, Jang-Bok

Abstract

In this study, the "force density method" for shape finding of cable net structures is presented. This concept is based on the force-length ratios or force densities which are defined for each branch of the net structures. This method renders a simple linear "analytical form finding" possible. If the free choice of the force densities is restricted by further condition, the linear method is extended to a nonlinear one. The nonlinear one can be applied to the detailed computation of networks. In this paper, the general inverse matrix is introduced to solve the nonlinear equilibrium equation including Jacobian matrix which is rectangular matrix. Several examples for linear and nonlinear analysis applied additional constraints are presented. It is shown that the force density method is suitable for form finding of cable net and the general inverse matrix can be applied to solve the nonlinear equation without Lagrangian factors.

keywords : General Inverse Matrix, Force Density, Cable Net Structures, Form Finding, Nonlinear Analysis, Constraints Conditions

1. 서론

케이블로 이루어진 네트워크의 형상해석방법으로는 유한요소법(finite element method), 동적이완법(dynamic relaxation method), 내력밀도법(force density method) 등이 있다. 이들 중 가장 보편적으로 사용되고 있는 유한요소법은 케이블네트 구조물 뿐 아니라 유연구조물인 막 구조물의 형상해석 및 응력-변형 해석에 사용되고 있으며, 지금까지 국내 외적으로 많이 개발되어 왔다. 서삼열¹⁾, 김승덕²⁾ 등은 유한요소법을 이용한 유연구조물의 형상해석 및 응력-변형 해석에 관한 연구를 수행하였으며, 실제 구조물^{2, 3)}에 응용하기도 하였다. 또한, 동적이완법 및 내력밀도법을 이용한 형상해석은 외국에서는 이

미 오래 전부터 사용되었던 기법들이고, 근래에 들어와 국내에서는 한상을⁴⁾ 등에 의하여 수행되어 성과를 얻은 바 있다. 또한, 한상을⁵⁾ 등은 동적이완법을 이용한 케이블네트의 안정화 이행과정에 관한 연구를 수행하였다. 항가이(半谷裕彦)⁶⁾는 일반역행렬에 대한 이론적 배경을 제시하였으며, 이 이론을 이용하여 제한조건을 갖는 구조물 및 좌굴 후 구조거동을 해석할 수 있었다. 국내에서는 김재열⁷⁾이 일반역행렬을 이용하여 다중하중을 받는 구조물의 안정경계(stability boundary) 해석을 수행하였다.

이러한 유연구조물에 대한 다양한 형상해석 기법 중에서, 1974년 독일의 Schek⁸⁾가 개발하여 보급된 내력밀도법은 케이블로 이루어진 네트 구조물의 해석에 유용하게 사용되고 있다. 이 방법의 특징중의 하나는 케이블 네트구조물의 어떠한 평형상태라도 선형방정식으로 이루어진 하나의 시스템만으로 해

* 정회원 · 대림대학 건축설비학과 조교수, 공학박사
** 정회원 · 대동MS 총괄팀장, 공학박사

를 얻을 수 있다는 것이다. 이 시스템은 각 부재들에 있어서 하중-부재길이의 비 혹은 내력밀도를 이용하여 구축된다. 즉, 각 부재에 대해 어떠한 일정량을 정하여 부가하고 선형방정식을 풀므로써 유일해를 갖는 평형상태를 얻는 기법이다. 이때 주어지는 '일정량을 내력밀도라고 부른다. 여기까지는 선형인해를 구하는 문제이기 때문에 매쉬의 형상에 대한 특별한 제한 조건은 필요 없이 간단히 어느 구조물이든 해석될 수 있다. 그러나 좀더 세밀하고 다양한 네트를 얻기 위해서는 해석하기 전 부재축력, 부재길이 그리고 변형형상에 대한 임의의 제한조건을 부과할 필요가 있다. 이때에는 앞서 세워진 선형 평형방정식은 더 이상 사용될 수 없다. 이러한 구속조건을 도입한 형상해석을 수행하기 위해서는 평형방정식의 비선형해법을 도입하여야 된다. Sheck는 위에서 언급한 비선형성을 도입한 해석법을 선형해석기법과 동시에 발표하였다. 이 논문에서 Sheck는 추가 구속조건에 관한 식을 좌표와 내력밀도의 함수로써 나타내었다. 여기서 Sheck가 정식화 한 야코비안 매트릭스는 $(m \times n)$ 의 장방형행렬(rectangular matrix)로 구성되고 있으며, 이를 풀기 위해 또 하나의 부가적인 조건인 라그랑지안 인자(Lagrangian Factor)를 도입하였다. 본 논문에서는 Sheck가 제안한 식을 기초로 하고 있으나, 위에서 언급한 야코비안 매트릭스가 장방형행렬이 되는 것에 착안하여, 이들의 역행렬을 쉽게 구할 수 있는 일반역행렬을 이용하여 푸는 방법을 제안하고자 한다. 다양한 케이블네트 모델에 대한 형상해석을 수행하였으며, Sheck의 방법과 비교하여 본 논문에서 제시한 기법의 타당성을 검증하였다.

2. 내력밀도법의 선형해석에 대한 정식화

2.1 부재-절점 매트릭스

n_{total} 개의 절점과 m 개의 부재를 가진 네트워크 모델을 고려하자. 고정절점(n_{fix})과 자유절점(n_{free})으로 나누어 $n_{total} = n_{free} + n_{fix}$ 로 나타낸다. j 번째의 부재 번호는 시작 절점을 $i(j)$ 로 하고, 반대편 절점

을 $k(j)$ 로 나타낸다. 일반적인 부재-절점 매트릭스 C_i 는 다음과 같이 1, -1 그리고 0을 이용하여 구성한다. 이 매트릭스는 구속절점과 자유절점으로 구분하는 역할을 한다.

$$i(j) = 1 \rightarrow +1$$

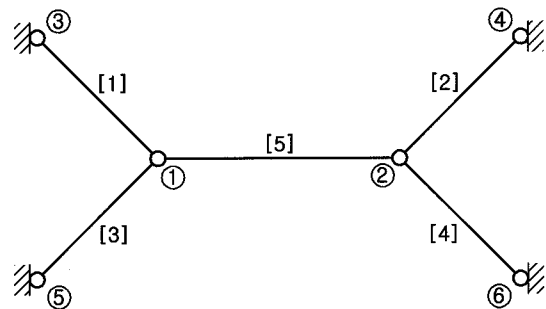
$$C_i(j, i) = k(j) = 1 \rightarrow -1$$

다른 모든 경우 $\rightarrow 0$

여기에서, +는 자유절점, -는 고정절점을 나타내며, 고정점의 좌표 C_{fix} 와 자유절점의 좌표를 이용하여 부재 C_{free} -절점관계를 나타내면 다음과 같다.

$$C_{total} = C_{free} + C_{fix} \tag{1}$$

부재-절점 매트릭스 C_i 를 간단한 구조물을 이용하여 나타내어 보면 그림 1과 같다.



〈그림 1〉 절점번호 및 부재번호

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	-1	0	0	0
2	0	1	0	-1	0	0
3	1	0	0	0	-1	0
4	0	1	0	0	0	-1
5	1	1	0	0	0	0
	C_{free}			C_{fix}		

〈그림 1〉 내력밀도법에서의 부재-절점관계

2.2 내력밀도법의 선형해석에 대한 정식화

케이블로 이루어진 하나의 네트에 있어서 좌표 $(x_i, y_i, z_i, (i = 1, \dots, n))$ 를 갖는 각 절점들을 P_i 라고 정하고, 이들중에서 고정절점의 좌표를

$(x_{ti}, y_{ti}, z_{ti}, (i=1, \dots, n_t))$ 라고 하자. 이 때, 모든 절점의 좌표는 자유 절점의 n_{free} 벡터 $x_{free}, y_{free}, z_{free}$ 와 고정 절점의 n_{fix} 벡터 $x_{fix}, y_{fix}, z_{fix}$ 로 구성된다. 부재길이 l_i 와 부재력 s_j 는 m 벡터를 갖는 l 과 s 을 구성한다. 하중벡터는 p_x, p_y, p_z 이다. 즉, i 번째의 절점은 각각 x, y, z 방향으로 p_x, p_y, p_z 의 성분을 갖는다. 절점간 부재연결에 있어서 x, y, z 의 좌표차 u, v, w 는 부재-절점 매트릭스 C_{fix} 와 C_{free} 를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} u &= C_{free}x_{free} + C_{fix}x_{fix} \\ v &= C_{free}y_{free} + C_{fix}y_{fix} \\ w &= C_{free}z_{free} + C_{fix}z_{fix} \end{aligned} \quad (2)$$

u, v, w 와 l 을 포함하는 대각행렬 U, V, W 및 L 을 이용하고, 각 절점에서의 힘의 평형을 고려하면 아래의 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} C_{free}^T UL^- s &= p_x \\ C_{free}^T VL^- s &= p_y \\ C_{free}^T WL^- s &= p_z \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서, 다음과 같은 야코비안 매트릭스를 사용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x} &= C_{free}^T UL^- \\ \frac{\partial l}{\partial y} &= C_{free}^T VL^- \\ \frac{\partial l}{\partial z} &= C_{free}^T WL^- \end{aligned} \quad (4)$$

식(3)을 간단히 하기 위해 다음과 같은 표현을 도입한다.

$$q = L^- s \quad (5)$$

여기에서, m 벡터 q 의 성분 q_i 는 하중-길이의 비 혹은 부재의 내력밀도이다. 식(4) 및 식(5)를 이용하여 다음의 평형방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} C_{free}^T Uq &= p_x \\ C_{free}^T Vq &= p_y \\ C_{free}^T Wq &= p_z \end{aligned} \quad (6)$$

또한, 다음 식이 성립한다.

$$Uq = Qu, \quad Vq = Qv, \quad Wq = Qw \quad (7)$$

식(7)과 식(2)의 u, v, w 를 이용하여 식(6)을 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} C_{free}^T QC_{free}x_{free} + C_{free}^T QC_{fix}x_{fix} &= p_x \\ C_{free}^T QC_{free}y_{free} + C_{free}^T QC_{fix}y_{fix} &= p_y \\ C_{free}^T QC_{free}z_{free} + C_{free}^T QC_{fix}z_{fix} &= p_x \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

$$D_{free} = C_{free}^T QC_{free} \quad (9)$$

$$D_{fix} = C_{free}^T QC_{fix} \quad (10)$$

라고 두면, 다음과 같은 평형상태의 좌표를 얻는다.

$$\begin{aligned} x &= D_{free}^- (p_x - D_{fix}x_{fix}) \\ y &= D_{free}^- (p_y - D_{fix}y_{fix}) \\ z &= D_{free}^- (p_z - D_{fix}z_{fix}) \end{aligned} \quad (11)$$

즉, 식(11)을 이용하여 지정해 준 내력밀도에 의한 케이블네트의 최종 평형형상이 결정된다.

3. 내력밀도법의 비선형해석에 대한 정식화

2절에서는 선형인 평형방정식을 이용하여 케이블네트의 형상해석을 수행하였으나 보다 정밀하고 세부적인 형상해석을 위한 제한조건을 도입하기 위해서는 지금까지 다루어온 평형방정식과는 다른 식을 정식화하여야 하며, 이들은 일반적으로 비선형이 된다.

3.1 제한조건을 포함하는 비선형방정식

지정된 r 개의 부재에 대해 제한조건을 다음과 같이 나타낸다고 가정하자.

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z, q) &= 0 \\ g_2(x, y, z, q) &= 0 \\ &\vdots \\ g_r(x, y, z, q) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

여기에서, 제한조건은 내력밀도의 함수로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g^*(q) = g(x(q), y(q), z(q), q) = 0 \tag{13}$$

이 식은 일반적으로 비선형 방정식이 되며, 선형해석에 의한 초기형상에 대한 내력밀도 $q^{(0)}$ 에서는 만족하지 않는다. 한편, 여기에서는 이 비선형식을 풀기 위해 각 스텝별 $g^*(q^{(1)}) = 0$ 을 만족하는 $q^{(1)} = q^{(0)} + \Delta q$ 를 결정하여야 하며, 다음과 같이 반복법을 채택한다. 우선, $g^*(q^{(1)}) = 0$ 대신에 Δq 를 만족하는 선형식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g^*(q^{(0)}) + \frac{\partial g^*(q^{(0)})}{\partial q} \Delta q = 0 \tag{14}$$

식 (14)를 다음과 같이 두면,

$$G^T = \frac{\partial g^*(q^{(0)})}{\partial q} \Delta q \tag{15}$$

$$r = -g^*(q^{(0)}) \tag{16}$$

결국 식(15), 식(16)은 Δq 에 대한 선형조건식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$G^T \Delta q = r \tag{17}$$

식(17)에서 G^T 가 부가조건에 대한 비선형성을 포함하는 야코비안 매트릭스가 되며, 주어지는 조건에 따라 다르게 된다.

3.2 비선형성을 지배하는 야코비안 매트릭스

실제 해석에 있어서, 좌표 x, y, z 및 내력밀도 q 에 대한 함수인 g^* 에 대해 다음과 같이 체인룰(chain rule)을 이용하여 야코비안 매트릭스 (Jacobian matrix) G^T 를 구성한다.

$$G^T = \frac{\partial g^*}{\partial q} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial q} \tag{18}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q} &= -D^{-1} C^T U \\ \frac{\partial y}{\partial q} &= -D^{-1} C^T V \\ \frac{\partial z}{\partial q} &= -D^{-1} C^T W \end{aligned} \tag{19}$$

3.3 부가 구속조건

3.3.1 부재길이에 대한 제한

제한조건으로써 가해진 부재길이를 l_{spi} 라고 할 때, 다음과 같은 조건식이 된다.

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= l_1(x, y, z) - l_{s1} = 0 \\ g_2(x, y, z) &= l_2(x, y, z) - l_{s2} = 0 \\ &\vdots \\ g_r(x, y, z) &= l_r(x, y, z) - l_{sr} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

여기에서, 조건이 부가된 부재에 대한 벡터 \bar{l} , 전체 부재에 대한 벡터 l 그리고 이들에 대응하는 대각행렬 \bar{L} , \bar{U} , \bar{C} 를 구성한다. 결국, 다음 조건을 만족하는 해를 구하는 문제가 된다.

$$g = \bar{l} - \bar{L}_{sp} = 0 \tag{21}$$

여기에서, 다음의 관계를 이용한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{l}}{\partial x} = \bar{C}_{free} \bar{U} \bar{L}^{-1} \\ \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{\partial \bar{l}}{\partial y} = \bar{C}_{free} \bar{V} \bar{L}^{-1} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{z}} = \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{L}}^{-1}$$

식 (19)와 식 (22)를 식 (18)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_d^T = & -\bar{\mathbf{L}}^{-1} (\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{U} \\ & + \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (23)$$

3.3.2 부재 축력에 대한 제한

제한조건으로서 가해진 부재축력을 s_{spi} 라고 할 때, 다음과 같은 조건식이 된다.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{q}) = \bar{\mathbf{L}} \mathbf{q} - \bar{\mathbf{s}}_{sp} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{l}} - \bar{\mathbf{s}}_{sp} = 0 \quad (24)$$

여기에서, 다음의 관계를 이용한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} &= \bar{\mathbf{Q}} \frac{\partial \bar{\mathbf{l}}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} &= \bar{\mathbf{L}} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (19)와 식 (25)를 식 (18)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_f^T = & \bar{\mathbf{L}} - \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{L}}^{-1} (\bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{U} \\ & + \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{V} + \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{C}}_{free} \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{C}_{free}^T \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (26)$$

4. 일반역행렬의 도입

일반역행렬은 다음과 같이 정의 된다. 「 \mathbf{A} 를 행장 (m, n) 방형매트릭스라고 할 때 다음의 조건을 전부 만족하는 매트릭스 \mathbf{A}^{-} 가 일반역행렬(general inverse)이다」.

$$(\mathbf{A} \mathbf{A}^{-})^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-} \quad (27)$$

$$(\mathbf{A}^{-} \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^{-} \mathbf{A} \quad (28)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-} \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (29)$$

$$\mathbf{A}^{-} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-} = \mathbf{A}^{-} \quad (30)$$

방정식의 해가 존재하기 위한 조건을 살펴보기 위해 \mathbf{A} 가 (m, n) 형 장방형매트릭스이고, 벡터 \mathbf{b} 를 갖는다고 가정한다.

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (31)$$

이때, 식(31)을 만족하는 해가 존재하기 위해서는 아래의 관계가 성립하여야 한다.

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-} \mathbf{b} = \mathbf{b} \quad (32)$$

여기서, 단위 매트릭스 \mathbf{I} 를 도입하여 다시 나타내면 다음과 같다.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{A}^{-}) \mathbf{b} = 0 \quad (33)$$

즉, 식 (33)이 주어진 조건에 대한 해의 존재성을 체크하는 식이 된다.

4.1 일반역행렬의 도입

본 논문에서 풀고자 하고 있는 기본식은 (17)이다. 즉, 각각의 제한조건을 포함하는 \mathbf{G}^T 를 구한 후, 이 식을 식(17)에 대입하여 $\Delta \mathbf{q}$ 가 주어진 오차에 수렴하도록 반복법을 계산하고자 한다. 이 과정에서 \mathbf{G}^T 의 역행렬을 구해야 되는데, 식(23)의 \mathbf{G}_d^T 와 식(26)의 \mathbf{G}_f^T 는 $m \times n$ 형(m :총 부재수, n :총 부재수제한조건이 도입된 부재수) 장방형 매트릭스가 되기 때문에 식(17)에 그대로 적용하여 풀 수가 없다. 이러한 문제를 없애기 위해 장방형매트릭스의 역행렬을 구할 수 있는 일반역행렬을 도입하였다. 즉, Schek의 방법에서는 식(17)에서 나타나는 식(23)과 식(26)이 장방형매트릭스 이기 때문에 이들을 정방형 매트릭스로 바꾸기 위해 라그랑지안 인자 \mathbf{k} 를 이용한 과정을 도입하였다. 그러나 본 논문에서 제시한 일반역행렬을 이용하므로써 이 과정이 생략되고 바로 식(17)의 \mathbf{G}^T 에 대한 역행렬을 구할 수 있

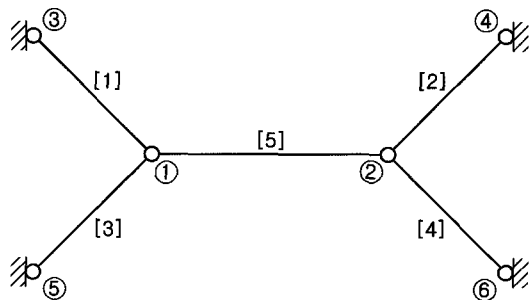
게 된다. 아울러 Schek의 방법에서는 해의 존재성 대해서 수렴성에 의존한 판단이었지만, 역행렬을 이용한 방법에서는 (33)식이 같은 정식화에 의해서 이루어지고 있다.

5. 형상해석 및 결과

4절까지의 정식화에 의한 선형 및 비선형 형상해석을 수행하였다. 먼저 해석모델 I은 6절점 2차원 구조물을 고려하였다. 해석모델 II는 각 매쉬의 단부가 고정되어 있는 장방형 형상이고, 해석모델 III은 장방형 형상의 네 모서리 부분에서만 고정인 모델이다. 해석모델 IV는 장방형이 아닌 임의의 형상을 갖는 모델을 선정하였다. 각 해석모델에 대해서는 부재길이(조건 1) 및 부재축력(조건 2)에 대한 제한조건을 가하여 해석을 수행하였다.

5.1 해석모델 I

본 예제는 절점 6개, 부재 5개로 구성된 간단한 구조물이다. 본 예제에서는 부재축력(조건 2)에 대한 제한조건을 가하여 해석을 수행하였다.



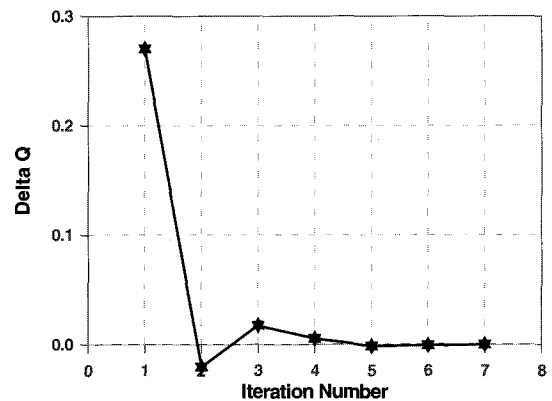
〈그림 2〉 절점번호 및 부재번호

〈표 1〉 축력비교

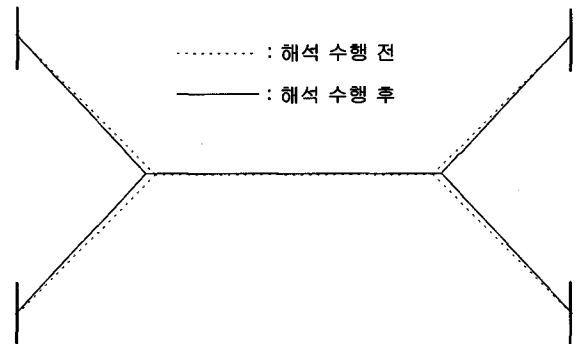
부재번호	초기축력	지정축력	해석결과
1	1.414	1.0	0.99
2	1.414	1.0	0.99
3	1.414	1.0	0.99
4	1.414	1.0	0.99

절점번호 및 부재번호는 그림 2와 같고, 축력비교

는 표1에 나타내었다. 초기축력을 1.414로 주고 1~4 부재를 축력이 1.0이 되도록 하여 해석을 수행한 결과, 표 1과 같이 주어진 값과 거의 정확하게 일치하였다. 해석 수렴과정은 그림 3과 같다. x축은 반복수렴횟수 그리고 y축은 Δq 를 나타내고 있다. Δq 가 7번의 간단한 반복계산에 의해 수렴되는 것을 알 수 있다. 해석 수행 전·후의 비교는 그림 4에 나타내었다. 해석 전체적으로 길이 및 축력에 대한 단위는 생략하였다.



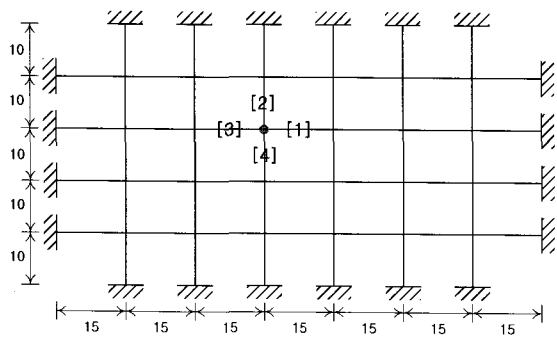
〈그림 3〉 해석 수렴과정



〈그림 4〉 해석 수행 전·후 비교

5.2 해석모델 II

본 해석모델은 절점 44개, 부재 58개로 구성된 구조물이다. 본 해석모델에서도 부재축력(조건 2)에 대한 제한조건을 가하여 해석을 수행하였다. 그림 5에서 보는 바와 같이, 그림에 표시한 절점을 +z 방향으로 30.0만큼 강제변위시켜 형상해석을 수행하였다. 이때 부재 1, 2, 3, 4에 발생한 축력은 표2에 나타내었고, 초기형상 및 형상해석 결과는 그림 6, 7에 나타내었다.

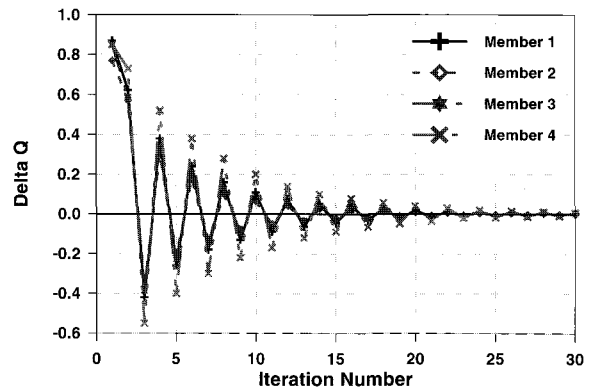


〈그림 5〉 해석모델

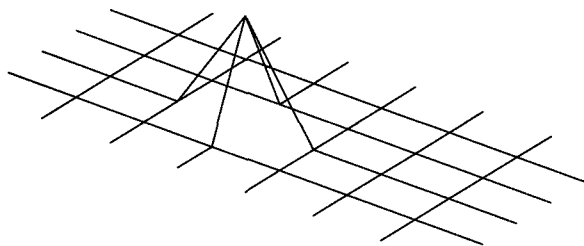
〈표 2〉 축력비교

부재번호	초기축력	지정축력	해석결과
1	22.79	16.0	15.98
2	21.63	16.0	15.99
3	23.15	16.0	15.99
4	19.68	16.0	15.96

진 4개의 부재에 가해진 장력이 모두 16.0이 되도록 지정하여 해석을 수행한 결과를 표 2 및 그림 8에 나타내었다. 이때 각 부재의 수렴과정은 그림 9와 같다. +부호는 부재 1, ◇는 부재 2, ★ 표시는 부재 3, 그리고 ×표시는 부재 4의 수렴과정을 각각 나타낸다. x축은 총 반복수, y축은 Δq 를 나타낸다.



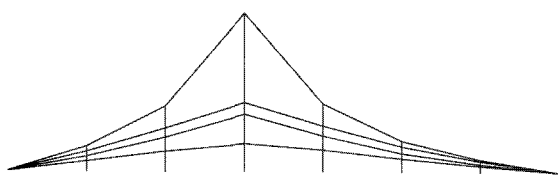
〈그림 9〉 해석 수렴과정



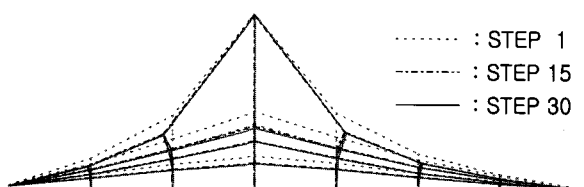
〈그림 6〉 초기 형상

5.3 해석모델 III

본 해석모델은 절점 49개, 부재 96개로 구성된 구조물이다. 본 해석모델에서는 부재길이(조건 1)에 대한 제한조건을 가하여 해석을 수행하였다. 그림 10에서 보는 바와 같이, 그림상에 표시한 절점을 +z 방향으로 50.0만큼 강제변위시켜 형상해석을 수행하였다. 이때 1~8번 부재의 길이는 표 3에 나타내었고, 초기형상 및 형상해석 결과는 그림 11, 12에 나타내었다.

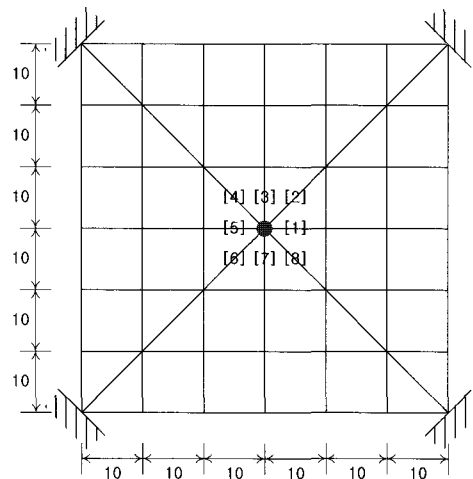


〈그림 7〉 형상해석 결과



〈그림 8〉 해석 수행 결과

그림 7의 형상해석 결과에서 1~4 부재의 초기 축력은 표 2에서 보는 바와 같이 각각 22.79, 21.63, 23.15, 19.68 로 각각 다르게 나타났다. 頂点과 이어

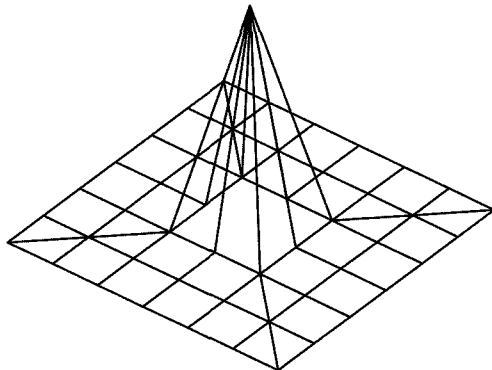


〈그림 10〉 해석모델

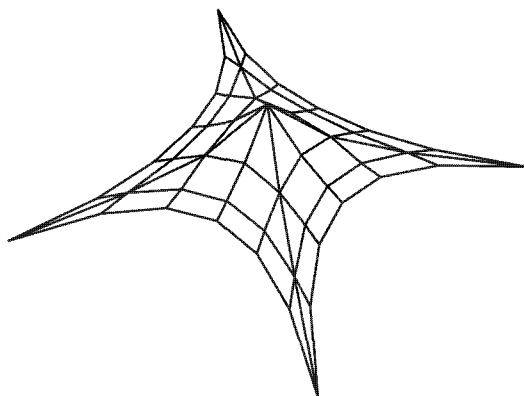
〈표 3〉 길이 비교

부재번호	초기길이	지정길이	해석길이
1	18.16	20.0	19.98
2	23.25	20.0	20.02
3	18.16	20.0	19.98
4	23.25	20.0	20.02
5	18.16	20.0	19.98
6	23.25	20.0	20.02
7	18.16	20.0	19.98
8	23.25	20.0	20.02

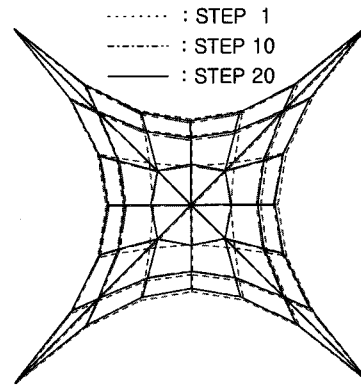
그림 12의형상해석 결과에서 1, 3, 5, 7번 부재와 2, 4, 6, 8번 부재의 초기 길이는 표3에서 보는 바와 같이 각각 18.16, 23.25로 각각 다르게 나타났다. 동일한 길이를 얻기 위하여 이 8개의 부재를 길이가 20.0이 되도록 해석을 수행한 결과는 표 3 및 그림 13에 나타내었다.



〈그림 11〉 초기 형상



〈그림 12〉 형상해석 결과

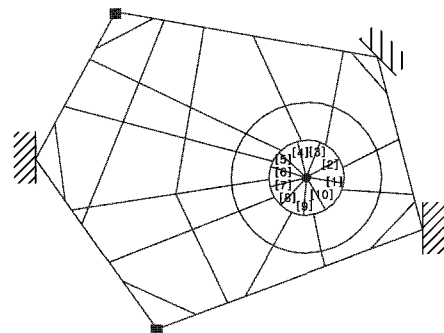


〈그림 13〉 해석 수행 결과

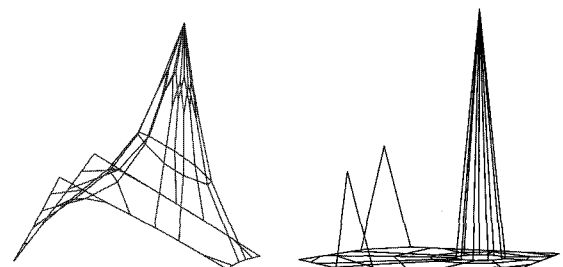
5.4 해석모델 IV

본 해석모델은 절점 67개, 부재 110개로 구성된 구조물이다. 본 해석모델에서는 부재길이(조건 1)에 대한 제한조건을 가하여 해석을 수행하였다.

그림 14에서 보는 바와 같이, ● 절점을 +z 방향으로 500.0, ■ 절점을 +z 방향으로 200.0만큼 강제변위시켜 형상해석을 수행하였다. 이때 1~10번 부재는 정점과 연결된 부재들이다. 각각의 길이는 표4에 나타내었고, 부재번호는 우측 중앙부의 1번 부재를 중심으로 시계반대방향으로 10번까지 일련번호를 부여하였다. 초기형상 및 형상해석 결과는 그림 15, 16과 같다.



〈그림 14〉 해석모델

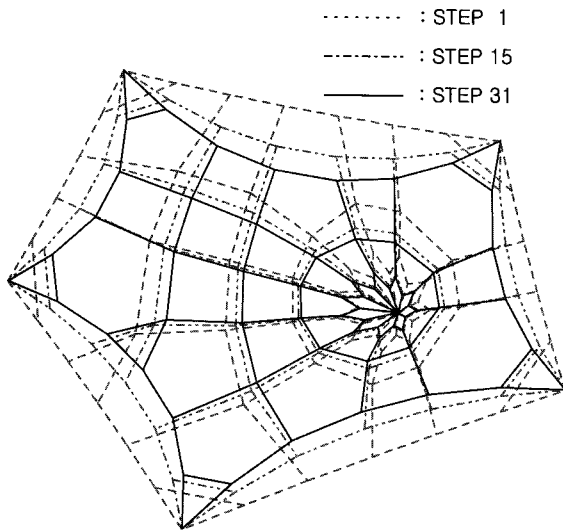


〈그림 15〉 초기 형상

〈그림 16〉 형상해석 결과

〈표 4〉 길이 비교

부재번호	초기길이	지정길이	해석길이
1	157.36	100.00	100.29
2	153.05	100.00	100.30
3	142.09	100.00	100.30
4	127.98	100.00	100.29
5	116.34	100.00	100.31
6	111.92	100.00	100.30
7	113.71	100.00	100.30
8	122.34	100.00	100.31
9	135.79	100.00	100.30
10	149.50	100.00	100.29



〈그림 17〉 해석 수행 결과

그림 16의 형상해석 결과에서 1~10번 부재의 초기 길이는 표4에서 보는 바와 같이 각각 111.92부터 157.36으로 각각 다르게 나타났다. 동일한 길이를 얻기 위하여, 10개의 부재를 길이가 100.0으로 되도록 해석을 수행한 결과는 표 4 및 그림 17에 나타내었다.

6. 결 론

내력밀도법을 이용한 형상해석에 있어서 일반역행렬을 도입한 해석법을 제시하였다. 본 논문에서는 Sheck에 의해 제안된 바 있는 라그랑지안 연산자를 도입하는 방법 대신에 구해진 야코비안 매트릭스에 대해 일반역행렬을 도입하여 직접 풀고자 하였다.

즉, Schek의 방법에서는 식(17)에서 나타나는 식 (23)과 식(26)이 장방형매트릭스이기 때문에 이들을 정방형 비트릭스로 바꾸기 위해 라그랑지안 인자 k 를 이용한 과정을 도입하였다. 그러나 본 논문에서는 제시한 일반역행렬을 이용함으로써 이 과정이 생략되고 바로 식(17)의 G^T 에 대한 역행렬을 구할 수 있게 된다. 아울러, Schek의 방법에서는 해의 존재성에 대해서 수렴성에 의존한 판단이었지만, 역행렬을 이용한 방법에서는 (33)식과 같은 정식화에 의해서 이루어지고 있다. 본 논문에서 제시된 방법에 의해 얻은 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 논문에서 제시한 방법을 이용함으로써 라그랑지안 연산자를 구할 필요 없이 해석을 진행할 수 있었다.

둘째, 제시된 방법을 이용한 결과는 주어진 제한 조건에 비교적 정확히 수렴되었다.

셋째, 제시된 방법을 이용한 결과는 Sheck가 제안한 방법과 거의 일치하였다.

넷째, Schek의 방법에서는 해의 존재성에 대해서 수렴성에 의존한 판단이었지만, 역행렬을 이용한 방법에서는 (33)식의 정식화에 의해서 이루어지고 있다.

결론적으로, 본 논문에서 제시한 일반역행렬을 이용한 방법은 케이블네트의 형상결정에 대한 내력밀도법에 유용하게 이용될 수 있으며, 본 논문에서 이용한 해석모델 뿐 아니라 복합 구속 조건을 갖거나 혹은 불안정 구조물의 해석에도 응용이 가능하리라고 사료된다.

참고문헌

1. 徐三悅, 膜構造物의 反復的 最適 形狀探索 解析에 關한 研究, 博士學位論文, 成均館大學校, 1992.
2. 김승덕 外 3人, “비선형해석 프로그램 Nass 98을 이용한 연성 막구조물의 구조설계에 관한 연구,” 대한건축학회 추계학술발표대회, pp. 27-32, 1998. 10
3. 서귀포 월드컵 축구경기장 지붕구조물 설계보고서, 성균관대학교 건축공학과, 1998
4. 한 상을, 이 경수 “내력밀도법에 의한 막 구조물

- 의 초기형상 결정”, 대한건축학회 논문집, 제15권 2호, pp. 73-80, 1999
5. 한 상을, 이 경수 “내력밀도법에 의한 돔 구조물의 안정화 기법에 관한 연구”, 대한건축학회 학술 발표논문집, pp. 111-116, 1999.4
6. 半谷裕彦, 川口健一, 形態解析, 培風館, pp. 21-42, 東京, 1991
7. Kim, J. Y., Choong, K. K., " A Study on the Stability Boundary for Multi-Loading System by using Generalized Inverse", 전산구조공학 제 12권 제 2호, pp. 223-231, 1999. 6
8. H. J. Schek, "The force density method for form finding and computation of general networks", Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 3, pp.115-134, 1974.