

# 직교 이방성 관통 다공 후판의 탄성 해석

## Elastic Analysis of Orthotropic Thick Plates with Perforated Many Holes

김 우 식\*      권 택 진\*\*  
Kim, Woo-Sik      Kwun, Taek-Jin

### Abstract

The structures with many perforated openings are widely used as a load-carrying element in the fields of civil engineering works, top slab of prestressed concrete reactor vessel, petrochemical industries and the like. Perforated concrete plates are usually thick. Therefore, the effect of transverse shear deformation is not negligible.

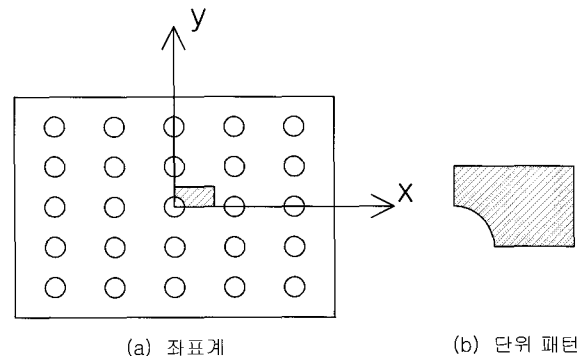
This paper describes a new analytical method of perforated plates combining both the finite element method for effective elastic constants and the usual method in solving orthotropic plate with transverse shear deformation.

*keywords* : thick plate, perforated plate, many openings plates

## 1. 서 론

관통(貫通)된 다공평판(多孔平板)이나 많은 개구부를 갖는 벽(壁) 또는 PCRV(Prestressed Concrete Reactor Vessel)의 상부상판 등의 이론적 해석은 응력집중 등의 어려운 문제에 직면하기 때문에 거의 발표되지 않고 있다<sup>1,2,3,4)</sup>.

본 논문에서는 그 해석적인 방법을 제시하고, 전단변형을 고려한 직교이방성 관통다공후판(貫通多孔厚板)을 이론적으로 해석하는 방법을 제안한다. 해석방법을 먼저 관통된 다공판의 특성을 고려하여 유한요소법으로 그 등가탄성정수(等價彈性定數)<sup>5)</sup>를 구하고, 구해진 탄성정수를 이론적으로 구해진 전단변형을 고려한 직교이방성 후판의 식<sup>6)</sup>을 적용하게 되면 결국 관통된 다공판의 해석이 되는 것이다. 등가탄성정수를 구하는 시점에서 응력집중계수는 구할 수 있다. 본 논문에서는 다음 그림(1)과 같은 원형 구멍을 갖는 직교이방성 후판의 예를 들어 해석하기로 한다.



〈그림 1〉 원형 관통 구멍을 갖는 직교이방성 판

만약, PCRV의 상부상판의 경우에는 등가 강성을 등방성으로 간주하여 해석한 다음 그 결과를 전단변형을 고려한 후판에 적용하면 해를 얻을 수 있으리라고 판단된다.

## 2. 직교 이방성 관통 다공 후판의 등가강성

본 장에서는 그림1(b)에서와 같은 직교이방성체의 성질을 갖는 단위 패턴(unit pattern)을 취하여 유한요소법으로 등가탄성정수를 구한다<sup>7)</sup>. 응력 성분

\* 정희원 · 성균관대학교 대학원 석사과정  
\*\* 정희원 · 성균관대학교 건축공학과 교수

을  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\}$ 라하고 대응하는 변형도 성분은  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\}$ 라고 표시하면 다음 식(1)과 같이 응력·변형도식을 생각할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & d_{44} & 0 & 0 \\ sym. & & & d_{55} & 0 \\ & & & & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서,

$$\begin{aligned} d_{11} &= E_1/(1-\nu_1\nu_2), & d_{22} &= E_2/(1-\nu_1\nu_2) \\ d_{12} &= E_1\nu_2/(1-\nu_1\nu_2) \\ &= E_2\nu_1/(1-\nu_1\nu_2) = d_{21} \text{ (相反作用의 정리)} \\ d_{44} &= G_{23}, & d_{55} &= G_{31}, & d_{66} &= G_{12} \end{aligned}$$

$E_1, E_2$ 와  $\nu_1, \nu_2$ 는 각각  $x, y$ 방향의 탄성계수 (young coefficients)와 프와송의 비(Poisson's ratio)이고  $G_{23}, G_{31}, G_{12}$ 는 전단탄성계수이다.

여기에서 유한요소법은 탄성정수를 구하기 위하여 강제변위를 사용한다. 즉, 식(1)에서  $\varepsilon_x = 1$  ( $\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$ )이라고 두면

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

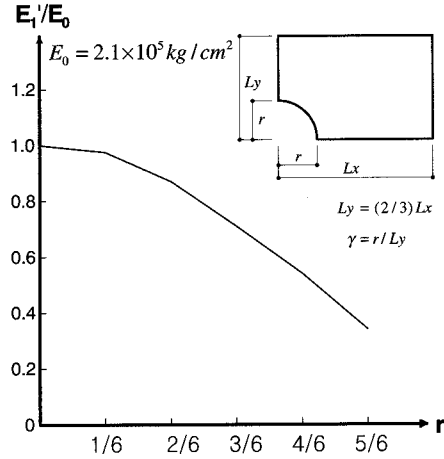
같은 방법으로  $\varepsilon_y = 1$  ( $\varepsilon_x = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$ )이라 두면

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

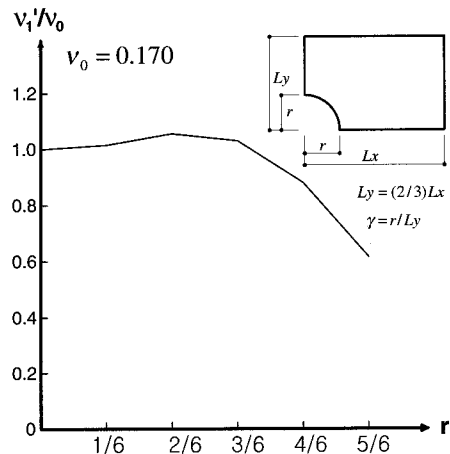
가 성립하기 때문에, 단위 패턴을 평면응력 모델로 취급하여  $x, y$  2방향의 강제변위를 주어서 주변반력의 평균값  $\{\sigma_x, \sigma_y\}$ 를 구하여  $\{d_{11}, d_{12}, d_{22}\}$ 를 결정하면 된다. 같은 방법으로  $d_{44}, d_{55}, d_{66}$ 을 결정할 수 있다<sup>7)</sup>.

본 논문에서는 콘크리트의 재료정수 ( $\nu = 0.17, E = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ )를 이용하여 원형구멍의 크기별로 6종류 (0/6, 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6)로 나누어 계산된 등가 탄성 정수  $E'_1, E'_2, \nu'_1, \nu'_2, G'_{12}$ ,

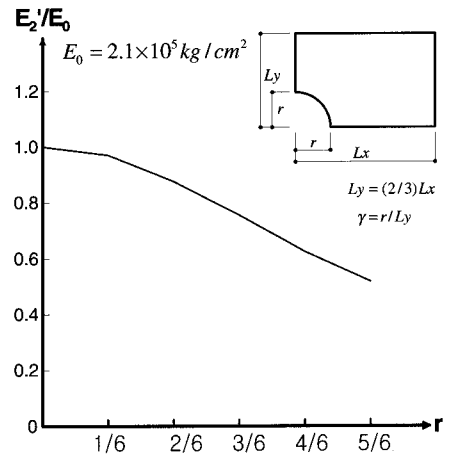
$G'_{23}, G'_{31}$ 의 구멍크기에 대한 계수의 변화는 다음 그림과 같이 된다.



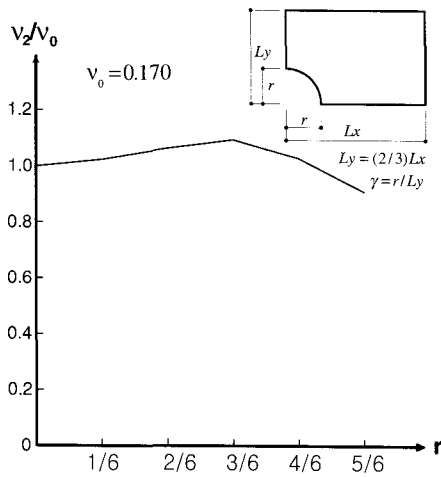
〈그림 2〉 x방향의 영계수와 프와송비의 변화



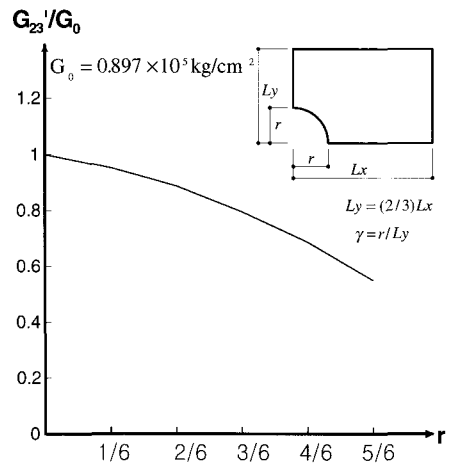
〈그림 3〉 x방향의 영계수와 프와송비의 변화



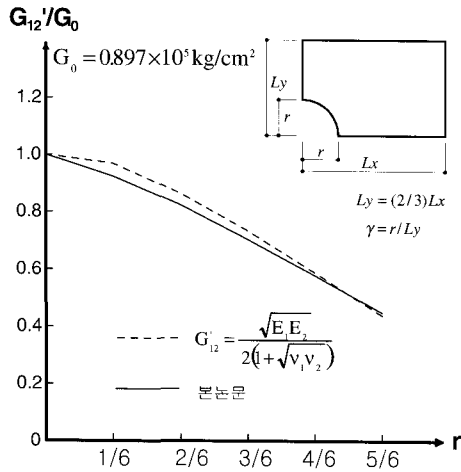
〈그림 4〉 y방향의 영계수와 프와송비의 변화



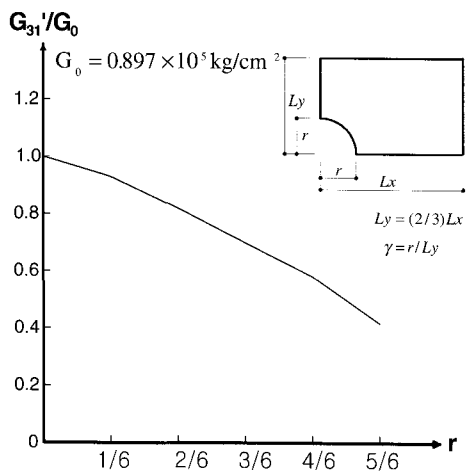
〈그림 5〉 y방향의 영계수와 프와송비의 변화



〈그림 8〉 면외전단탄성계수  $G_{31}, G_{23}$ 의 변화



〈그림 6〉 면내전단탄성계수의 변화



〈그림 7〉 면외전단탄성계수  $G_{31}, G_{23}$ 의 변화

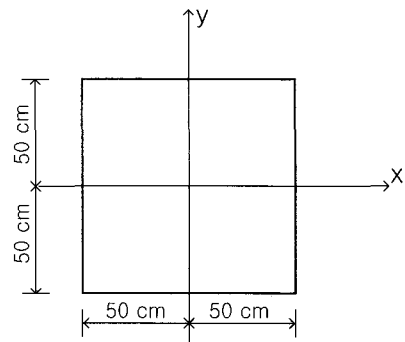
등가 탄성정수를 유한요소법으로 구하는 중에 주응력을 계산하여 다음 표(1)과 같이 원형구멍주위의 응력집중계수를 구할 수 있다.

〈표 1〉 응력집중계수(직교이방성 원형구멍의 경우)

구멍의 크기	0/6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6
응력집중계수	1.0	2.0	2.2	2.1	2.0	2.1

### 3. 관통 다공을 갖는 직교 이방성 후판의 해석 예

다음 그림 9와 같은 정4각형(100×100)판에 대하여 해석하기로 한다. 그리고 원형구멍의 크기의 종류는 모두 Case 1, 2, 3, 4, 5가 있는데 본고에서는 Case 4에 대하여 시행한다. Case4에 대한 직교이방성 재료의 등가탄성정수는 다음과 같이 구할 수 있다.



〈그림 9〉 판의 좌표

〈표 2〉 등가 탄성 정수

탄성 정수	단위
$E_1 = 1.495 \times 10^5$	$kg/cm^2$
$E_2 = 1.577 \times 10^5$	$kg/cm^2$
$G_{23} = 0.712 \times 10^5$	$kg/cm^2$
$G_{31} = 0.628 \times 10^5$	$kg/cm^2$
$G_{12} = 0.632 \times 10^5$	$kg/cm^2$
$\nu_1 = 0.175$	
$\nu_2 = 0.184$	

그런데, 두께  $h = 5, 10, 15, 20, 25, 30$  경우에 대하여 해석하였다. 위의 재료정수를 갖고  $h = 20$  cm인 경우 고전이론에 의한 해와 경계조건이  $\phi = 0$  인 경우와  $M_{xy} = 0$ 인 경우에 대하여 각각 해석한 결과는 다음 표와 같이 된다.

〈표 3〉 처짐  $w(0, y)$  단위  $qa^4/D(\times 10^3)$

경계조건 $y$	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	3.99	4.63	5.38
10	3.82	4.42	5.16
20	3.28	3.82	4.47
30	2.42	2.84	3.35
40	1.28	1.53	1.84
50	0.0	0.0	0.0

〈표 4〉 전단력  $Q_x(a/4, y)$  단위  $qa$

경계조건 $y$	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	-0.134	-0.133	-0.132
10	-0.128	-0.128	-0.127
20	-0.112	-0.112	-0.114
30	-0.846	-0.845	-0.082
40	-0.459	-0.460	0.014
50	0.0	0.0	0.403

〈표 5〉 전단력  $Q_x(a/2, y)$  단위  $qa$

경계조건 $y$	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	-0.329	-0.323	-0.417
10	-0.321	-0.315	-0.405
20	-0.294	-0.288	-0.363
30	-0.245	-0.239	-0.274
40	-0.163	-0.156	-0.077
50	0.0	0.0	0.425

〈표 6〉 전단력  $Q_y(a/4, y)$  단위  $qa$

경계조건 $y$	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.0	0.0	0.0
10	-0.377	-0.379	-0.393
20	-0.795	-0.800	-0.824
30	$-0.130 \times 10$	$-0.131 \times 10$	$-0.133 \times 10$
40	$-0.196 \times 10$	$-0.196 \times 10$	$-0.203 \times 10$
50	$-0.279 \times 10$	$-0.275 \times 10$	$-0.336 \times 10$

〈표 7〉 전단력  $Q_y(a/2, y)$  단위  $qa$

경계조건 $y$	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.185
20	0.0	0.0	0.359
30	0.0	0.0	0.494
40	0.0	0.0	0.529
50	0.0	0.0	0.439

〈표 8〉 휨모멘트  $M_x(0, y)$  단위  $qa^2(\times 10)$

경계조건 $y$	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.429	0.421	0.463
10	0.410	0.403	0.428
20	0.355	0.349	0.405
30	0.265	0.261	0.314
40	0.145	0.142	0.208
50	0.0	0.0	0.166

〈표 9〉 휨모멘트  $M_x(a/4, y)$  단위  $qa^2(\times 10)$

y \ 境界조건	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.353	0.348	0.418
10	0.339	0.333	0.402
20	0.296	0.291	0.352
30	0.224	0.220	0.271
40	0.124	0.122	0.171
50	0.0	0.0	0.122

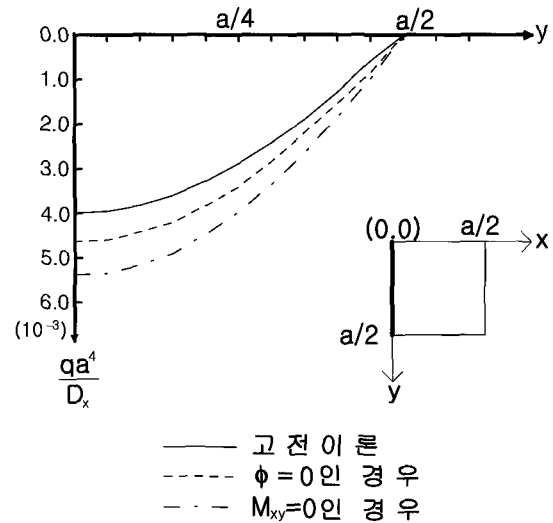
〈표 13〉 비틀림모멘트  $M_{xy}(a/2, y)$  단위  $qa^2(\times 10)$

y \ 境界조건	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.0	0.0	0.0
10	$-0.952 \times 10^{-1}$	$-0.971 \times 10^{-1}$	$0.434 \times 10^{-4}$
20	-0.187	-0.190	$0.111 \times 10^{-3}$
30	-0.271	-0.276	$0.292 \times 10^{-3}$
40	-0.339	-0.346	$0.102 \times 10^{-2}$
50	-0.373	-0.380	$0.109 \times 10^{-1}$

〈표 10〉 휨모멘트  $M_y(0, y)$  단위  $qa^2(\times 10)$

y \ 境界조건	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.454	0.447	0.511
10	0.442	0.435	0.501
20	0.403	0.398	0.469
30	0.328	0.324	0.404
40	0.201	0.199	0.279
50	0.0	0.0	0.0

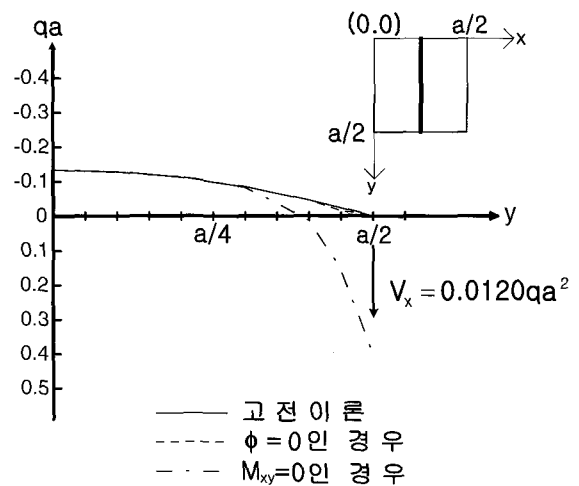
위의 표를 그림으로 표시하면 다음과 같다.



〈그림 10〉 w의 비교

〈표 11〉 휨모멘트  $M_y(a/4, y)$  단위  $qa^2(\times 10)$

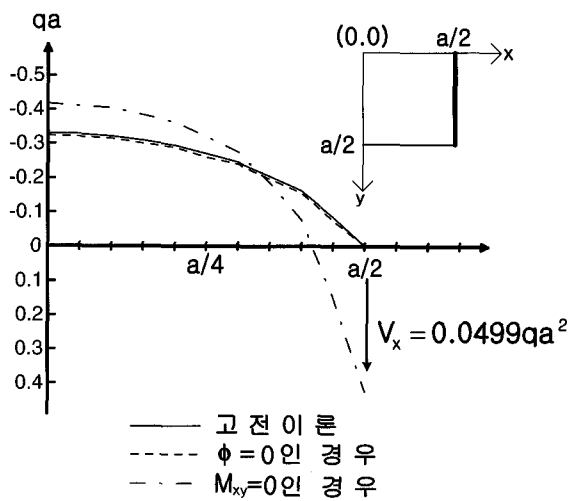
y \ 境界조건	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.333	0.328	0.385
10	0.325	0.321	0.378
20	0.300	0.295	0.363
30	0.248	0.245	0.304
40	0.156	0.155	0.212
50	0.0	0.0	0.0



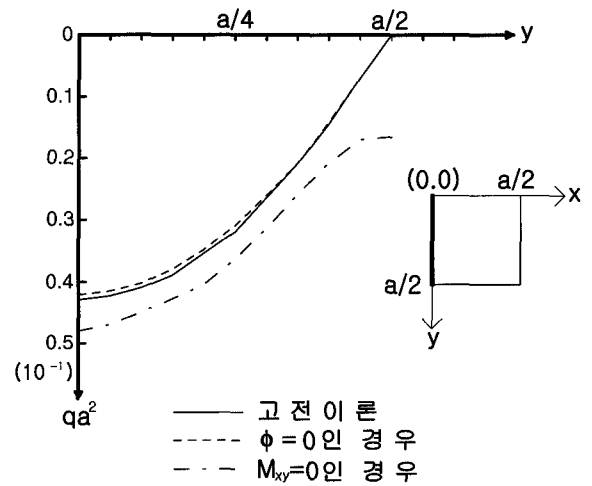
〈그림 11〉  $Q_x$ 의 비교

〈표 12〉 비틀림모멘트  $M_{xy}(a/4, y)$  단위  $qa^2(\times 10)$

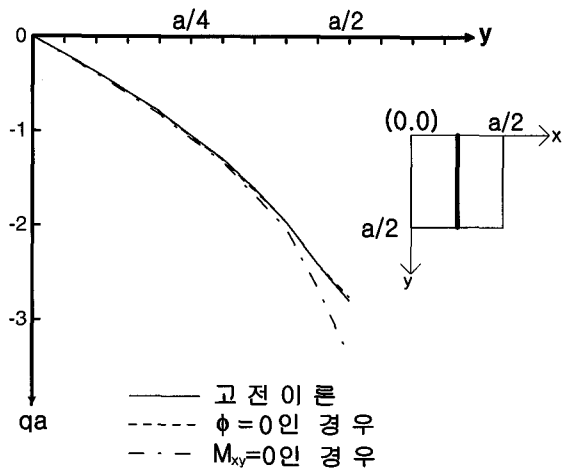
y \ 境界조건	고전이론	$\phi = 0$	$M_{xy} = 0$
0	0.0	0.0	0.0
10	$-0.648 \times 10^{-1}$	$-0.659 \times 10^{-1}$	$-0.726 \times 10^{-1}$
20	-0.126	-0.128	-0.141
30	-0.178	-0.181	-0.197
40	-0.216	-0.219	-0.203
50	-0.229	-0.233	0.0



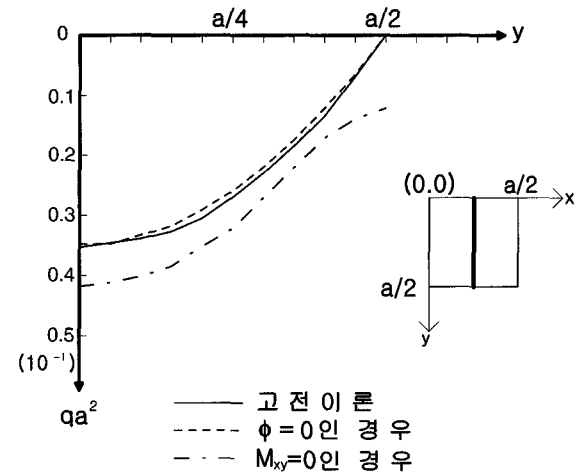
〈그림 12〉  $Q_x$ 의 비교



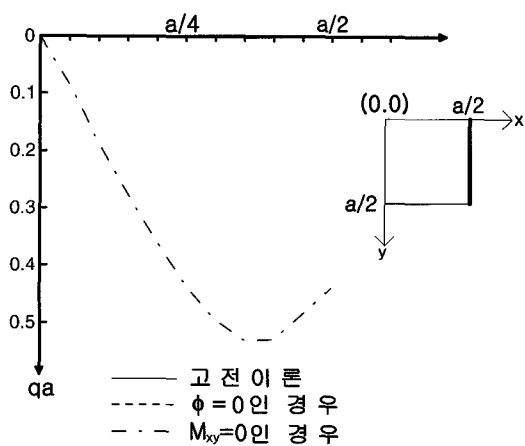
〈그림 15〉  $M_x$ 의 비교



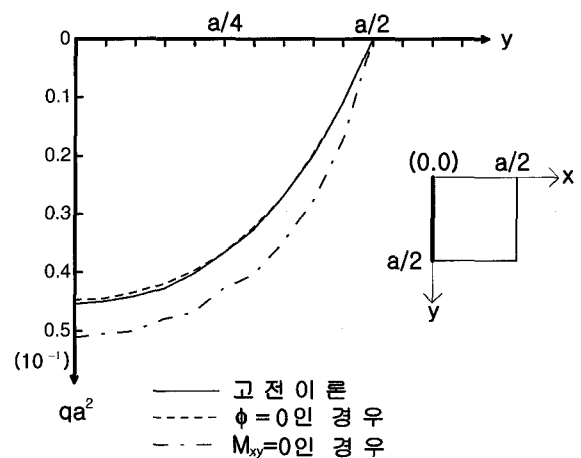
〈그림 13〉  $Q_y$ 의 비교



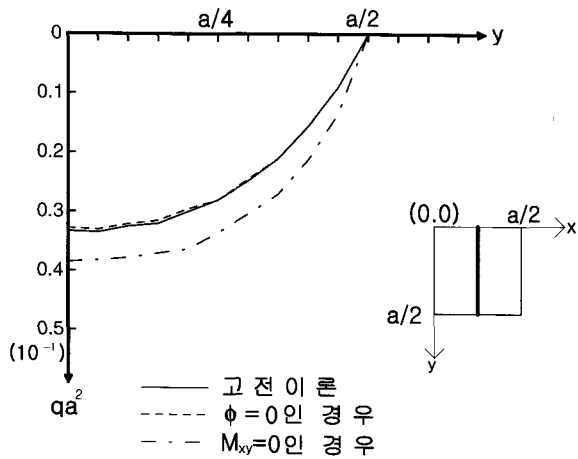
〈그림 16〉  $M_x$ 의 비교



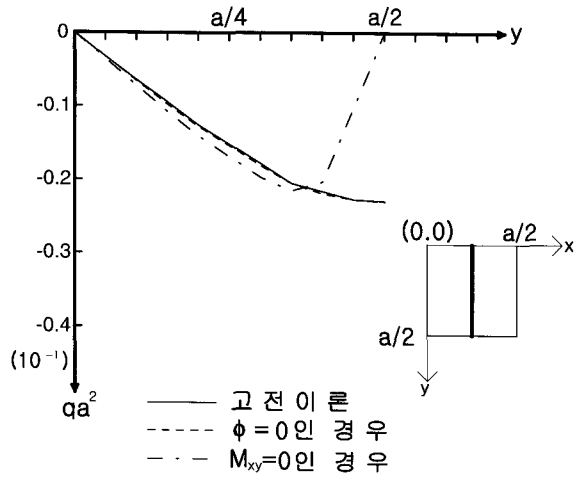
〈그림 14〉  $Q_y$ 의 비교



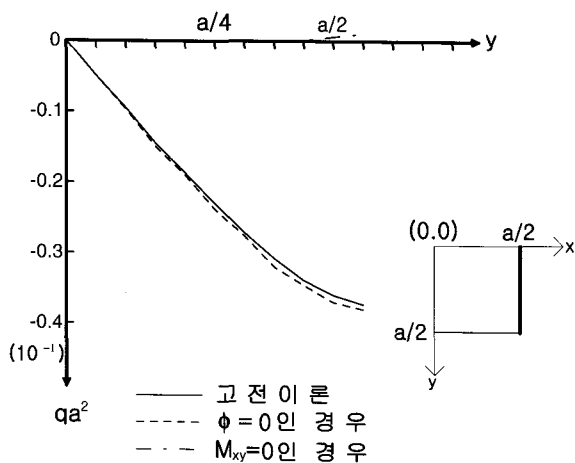
〈그림 17〉  $M_y$ 의 비교



〈그림 18〉  $M_y$ 의 비교



〈그림 19〉  $M_{xy}$ 의 비교



〈그림 20〉  $M_{xy}$ 의 비교

## 4. 결 론

많은 관통구멍을 갖는 직교이방성 다공 후판의 해석이 매우 난해하므로 본 연구에서는 등가탄성정수를 유한요소법으로 구하여 구멍이 없는 직교이방성 후판의 이론식에 이 등가탄성정수를 적용함으로써 해결하는 방안을 제시하였다. 구멍주위의 응력집중문제는 이때 구해진 응력집중계수를 적용하면 가능하다. 고전이론과 비교하면 전단력등의 불연속성 등의 모순이 본 연구에서는 해결된다. 본 연구는 그 간에 공식적인 발표를 하지 못한 본인의 박사논문<sup>8)</sup> 중의 일부분임을 알린다.

## 참고문헌

1. 權宅鎮, 川股重也, “有孔板의 等価剛性”, 日本建築學會關東支部研究報告集, 1975年 7月.
2. 權宅鎮, 半谷裕彦, 川股重也, “剪斷變形を考慮した 有孔板의 解析” 日本建築學會大會學術講演梗概集, 1975年 10月.
3. 田中伸幸, 坪井善勝, 川股重也, “有限要素法による連續體의 解析, 其の6, 開口行列をもつ回轉體의 有効剛性,” 日本建築學會大會學術講演梗概集, 1967年10月.
4. 望月重也, 板構造, 鹿島出版社, 1969年.
5. 權宅鎮, “有孔厚板의 彈性解析에 관한 연구 I, II, 有孔板의 等価剛性” 大韓建築學會誌 23卷 91号 (p23~29), 23卷 92号(p39~44), 1979年.
6. 권택진, “직교이방성 장방형 후판의 탄성이론해석,” 한국공간구조학회지 제1권 제1호(논문편) 2001. 9. p95~108.
7. 權宅鎮, “有孔板의 解析,” 大韓建築學會創立30周年紀念論文集. 1975年 8月 p155~170.
8. 權宅鎮, “有孔板의 彈性解析에 關する 研究”, 東京大學博士論文 1975年 12月.